Zdeněk Vorel

O některých aplikacích Ljapunovovy theorie stability v elektrotechnice

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 1, 59–78

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102516

O NĚKTERÝCH APLIKACÍCH LJAPUNOVOVY THEORIE STABILITY V ELEKTROTECHNICE

ZDENĚK VOREL

(Došlo dne 26. října 1955.) DT: 621.3.078.001.2

Jsou uvedeny ty výsledky Ljapunovovy theorie stability, které mají použití v theorii elektrických strojů. Na několika příkladech je ukázán způsob tohoto použití.

Stabilita elektromechanických soustav se v současné době vyšetřuje matematickými metodami hlavně v těch případech, kdy je možno alespoň přibližně popsat soustavu lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty.

Soustavy nelineární lze jen v ojedinělých případech řešit tak, že nalezneme explicitní výraz pro řešení příslušného systému rovnic. Přibližné metody nás mohou poučit o chování jednotlivých integrálních čar, ale nikoliv o průběhu všech řešení, vycházejících z dané oblasti, na nekonečném časovém intervalu. Vnucuje se myšlenka, zda by k cíli nevedla nepřímá metoda, která se nezabývá vlastnostmi jednotlivých řešení, nýbrž vlastnostmi souhrnu integrálních čar, vycházejících z dané oblasti. S podobnou myšlenkou se shledáváme v různých oborech fysiky, na příklad v mechanice, když pracujeme s energií soustavy místo se silami, nebo v elektromagnetismu, když při zjišťování silových účinků pole se nestaráme o rozložení siločar, ale o energetické poměry ve zdroji, který pole vyvolal.

Dále se budeme zabývat vyšetřováním stability soustav, popisovaných nelineárními diferenciálními rovnicemi, nepřímou metodou, nazvanou podle autora Ljapunovovou. Její podstata spočívá v tom, že z vlastností jistých funkcí soudíme na stabilitu soustavy. Jak uvidíme, jde tu o zobecnění integrálu energie, s nímž se setkáváme v mechanice.

Nejprve si vyjasníme pojem stability, potom vyslovíme základní tvrzení Ljapunovovy theorie s nastíněním hlavní myšlenky důkazu a konečně ukážeme možnosti aplikací na příkladech z theorie elektrických strojů.

Definice stability

Aniž jsme se předtím setkali s matematickou definicí stability, můžeme v mnoha případech intuitivně rozhodnout, zda soustava je stabilní. Tak na příklad pro stabilitu turbiny regulované na konstantní otáčky požadujeme, aby při náhlém zvýšení zatížení se otáčky po nějaké době opět ustálily v blízkosti původní hodnoty. Uvažujeme-li stejnosměrný motor připojený na síť o konstantním napětí a zatížený konstantním momentem, požadujeme, aby nepatrné poruchy síťového napětí nezměnily otáčky nad stanovenou mez. Jak je vidět z těchto dvou příkladů, mohou být poruchy, ohrožující stabilitu, různé povahy. V prvém případě se skokem změní jeden z parametrů a potom již nepůsobí žádné rušivé vlivy. V druhém případě neustále působí drobné změny síťového napětí, o jejichž průběhu nemůžeme zpravidla nic bližšího říci.

Z uvedeného vyplývá, že je nesnadné nalézti definici, která by zachycovala všechny případy stability, vyskytující se v praxi. Může se pak stát, že podle jedné definice je soustava stabilní, podle jiné nikoliv. Uvedeme zde dvě definice, s kterými vystačíme pro většinu případů.

Uvažujme soustavu

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}t} = Y_s(t, y_1, \ldots, y_n) \quad (s = 1, \ldots, n)\,, \tag{1}$$

která pro $t \geq T$ a všechna y_s $(s = 1, \ldots, n)$ splňuje některé podmínky existence a jednoznačnosti. Řešení soustavy (1) $y_s^0(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$, jehož stabilitu vyšetřujeme, nazveme neporušené. Každé jiné řešení soustavy (1) $y_s(t)$ nazveme porušené. O neporušeném řešení předpokládáme, že je definováno pro všechna $t \geq T$, neboť nemá smyslu mluvit o stabilitě řešení, které na příklad roste nad všechny meze, když t se blíží konečné hodnotě t_1.[1])

Neporušené řešení $y_s^0(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ *nazveme stabilní, když ke každému* $t_0 > T$ *a* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že* $|y_s(t) - y_s^0(t)| < \varepsilon$ *pro všechna* $t \geq t_0$, *jakmile* $|y_s(t_0) - y_s^0(t_0)| < \delta$ $(s = 1, \ldots, n)$. *Platí-li navíc* $\lim\limits_{t\to\infty} (y_s(t) - y_s^0(t)) = 0$, *je* $y_s^0(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ *asymptoticky stabilní.*

Pro jednorozměrný případ je obsah definice znázorněn na obr. 1. Smyslem definice je, že požadujeme, aby porušené řešení se lišilo od neporušeného stále libovolně málo, jakmile se na počátku liší dostatečně málo.

Abychom následující úvahy zjednodušili, nebudeme pracovat se soustavou (1), ale se soustavou, kterou obdržíme z této transformací

$$x_s = y_s - y_s^0(t) \quad (s = 1, \ldots, n)\,.$$

---

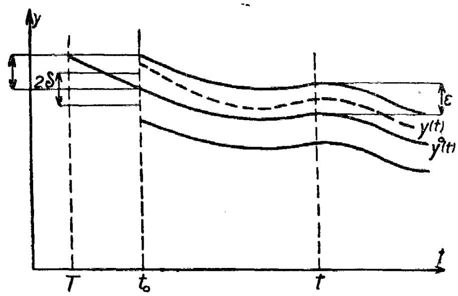
[1]) Tak je tomu třeba u funkce $y = \dfrac{1}{c - t}$ definované pro $t < c$, $c > 0$, která je řešením rovnice $y'' = y^2$.

Dosadíme-li do (1), obdržíme

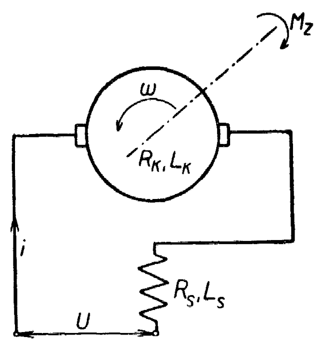
$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = Y_s(t, x_1 + y_1^0(t), \ldots, x_n + y_n^0(t)) - Y_s(t, y_1^0(t), \ldots y_n^0(t)) \quad (s = 1, \ldots, n) \,. \quad (2)$$

Odtud ihned vidíme, že $x_s = 0$ $(s = 1, \ldots, n)$ je řešením soustavy (2).

Funkce $x_s = y_s - y_s^0(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ nazýváme poruchami, což odpovídá fysikální interpretaci těchto úvah. Přiřadili jsme tedy neporušenému řešení soustavy (1) triviální řešení soustavy (2) a každému porušenému řešení $y_s(t)$ poruchu $x_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$. Místo stability neporušeného řešení soustavy (1) vyšetřujeme stabilitu triviálního řešení soustavy (2).



Obr. 1.



Obr. 2.

Zavedené pojmy osvětlíme jednoduchým příkladem (obr. 2). Seriový motor je připojen na konstantní napětí U. R_k, R_s, L_k, L_s značí odpory a vlastní indukčnosti kotvy a budícího vinutí. Zatěžovací moment M_z je funkcí úhlové rychlosti ω, M_{el} je moment vyvozený motorem.

Použitím Kirchhoffova zákona obdržíme rovnici:

$$U = (R_k + R_s)\, i + (L_k + L_s) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ci\omega \,.$$

Druhou rovnici dostaneme z rovnováhy momentů:

$$M_{el} = M_z + I \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \,.$$

Přitom $M_{el} = ki^2$, $M_z = \alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2$, kde k, α, β, γ jsou konstanty.

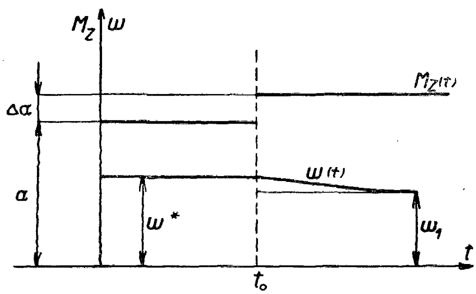
Rovnice upravíme na tvar

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{U}{L_k + L_s} - \frac{R_k + R_s}{L_k + L_s}\, i - \frac{c}{L_k + L_s}\, i\omega \,, \\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\alpha}{I} - \frac{\beta}{I}\,\omega + \frac{\gamma}{I}\,\omega^2 + \frac{k}{I}\, i^2 \,. \end{aligned} \qquad (3)$$

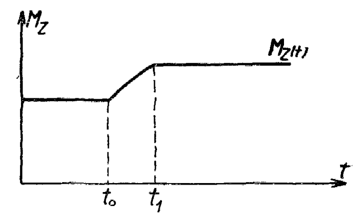
Soustava rovnic (3) má tvar soustavy (1). Převedeme ji na tvar (2), totiž na rovnice poruch. K tomu musíme určit řešení, jehož stabilitu máme zjistit. Jistě nás bude zajímat jen stabilita ustáleného stavu, t. j. $i = i^* =$ konst, $\omega = \omega^* =$ konst. Hodnoty i^*, ω^* dostaneme řešením soustavy (3), kde do levých stran dosadíme 0.

Zavedeme poruchy:

$$x_1 = i - i^* \,, \quad x_2 = \omega - \omega^* \,.$$



Obr. 3.



Obr. 4

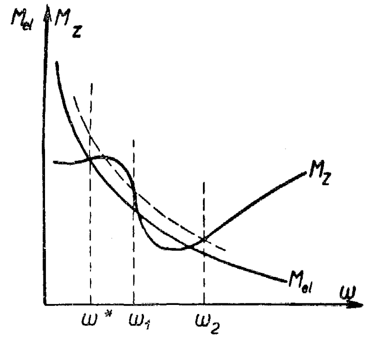
Rovnice poruch mají tvar:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left(-\frac{R_k + R_s}{L_k + L_s} - \frac{c\omega^*}{L_k + L_s}\right) x_1 - \frac{ci^*}{L_k + L_s}\, x_2 - \frac{c}{L_k + L_s}\, x_1 x_2 \,, \\ \dot{x}_2 &= \frac{2ki^*}{I}\, x_1 - \left(\frac{\beta}{I} + \frac{2\gamma\omega^*}{I}\right) x_2 + \frac{k}{I}\, x_1^2 - \frac{\gamma}{I}\, x_2^2 \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Označíme konstanty jiným způsobem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_1 x_2 \,, \\ \dot{x}_2 &= A_2 x_1 + B_2 x_2 + D_2 x_1^2 + E_2 x_2^2 \,. \end{aligned} \tag{4_1}$$

Ukážeme na tomto příkladu, jaká je fysikální interpretace uvedené definice. Pro větší názornost budeme předpokládat, že motor běží v ustáleném stavu ($i = i^* =$ konst, $\omega = \omega^* =$ konst) a že zatěžovací moment $M_z = \alpha$ nezávisí na ω (obr. 3). V okamžiku $t = t_0$ zvětšíme skokem M_z o $\Delta\alpha$, kde $\Delta\alpha$ je dostatečně malé kladné číslo. Ze zatěžovací charakteristiky seriového motoru je zřejmé, že po uplynutí přechodového stavu se proud i otáčky ustálí na nových hodnotách i_1, ω_1. Předpokládejme, že řešení soustavy (3) je asymptoticky stabilní a že v okamžiku $t = t_0$ platí $\omega = \omega^*$, $i = i^*$. Potom $|i(t) - i_1|$, $|\omega(t) - \omega_1|$ bude libovolně malé, je-li $|i^* - i_1|$, $|\omega^* - \omega_1|$ dostatečně malé a kromě toho $\lim\limits_{t\to\infty} i(t) = i_1$, $\lim\limits_{t\to\infty} \omega(t) = \omega_1$. Vidíme tedy, že uvedené definice asymptotické stability můžeme použít pro případy, kdy v soustavě se skokem změní některý z parametrů. Ve skutečnosti však změna parametrů probíhá v konečném časovém intervalu (t_0, t_1) (obr. 4). Ukážeme, že ze stability při změně parametru skokem neplyne ještě stabilita při obecném časovém průběhu parametru. Pro určitost předpokládejme, že momentové charakteristiky motoru a zátěže probíhají podle obr. 5. V ustáleném stavu, který je zřejmě asymptoticky stabilní, je úhlová rychlost ω^*. V intervalu (t_0, t_1) zvýšíme napětí U podle obr. 6a o ΔU. Napětí $U + \Delta U$ odpovídá čárkovaná momentová charakteristika na obr. 5. Je-li ΔU dosti malé, ustálí se ω po uplynutí přechodového stavu na hodnotě ω_1. Je-li však průběh podle obr. 6b a impuls napětí $\int_{t_0}^{t_1} (U - U_0)\, dt$ dostatečně velký, ustálí se ω až na hodnotě ω_2 (obr. 5).

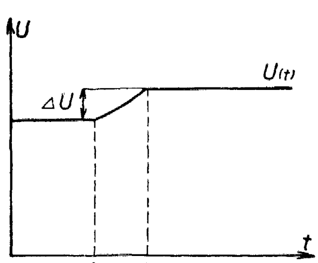


Obr. 5.

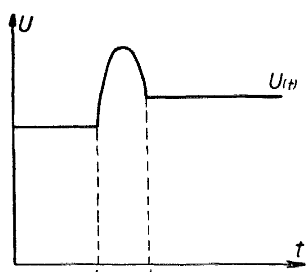
Jde tedy o to, vymezit průběh změny parametru tak, aby stabilita při změně skokem zaručovala stabilitu při skutečném průběhu. K tomu stačí na př. zjistit, zda v okamžiku t_1 hodnoty proměnných i, ω se neliší od ustálených hodnot i_1 a ω_1 více než $|i_1 - i^*|$, $|\omega_1 - \omega^*|$. Tento odhad ve většině případů nečiní potíží. Úvaha se provede obdobně, změní-li se jiný z parametrů, na př. odpor obvodu $R_k + R_s$, nebo indukčnost L_s.

Jsou ovšem i jiné vlivy, které mohou porušit stabilitu stroje, než jednorázová změna parametrů soustavy. Jsou to na příklad trvale působící změny parametrů, jako kolísání síťového napětí nebo přídatné síly, které při sestavování rovnic nemohly být uvažovány (vibrace základů a pod.). Tyto rušivé vlivy se projeví jako přídavné členy R_s v pravých stranách soustavy (1)

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \ldots, y_n) + R_s(t, y_1, \ldots, y_n) \quad (s = 1, \ldots, n)\,. \tag{5}$$



Obr. 6a.



Obr. 6b.

Jak je vidět z tvaru soustavy (5), rušivé vlivy vyjádřené členy R_s $(s = 1, \dots, n)$ nelze zachytit v definici stability podle počátečních podmínek. Přesněji řečeno, je-li soustava (1) stabilní podle shora uvedené definice, nemusí být ještě stabilní při působení trvalých poruch. Vyslovíme tedy jinou definici stability, která je vhodná, působí-li poruchy trvale.

Uvažujme soustavu rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = X_s(t, x_1, \dots, x_n) \quad (s = 1, \dots, n)\,, \tag{6}$$

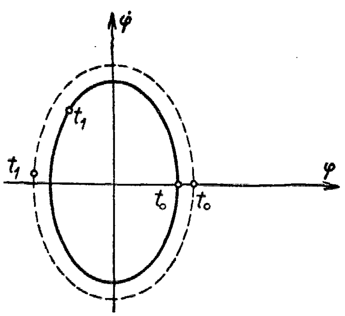
která má triviální řešení $x_s = 0$ $(s = 1, \dots, n)$.

Triviální řešení soustavy (6) *je stabilní při trvale působících poruchách, existují-li ke každému* $\varepsilon > 0$ *čísla* $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ *tak, že řešení soustavy*

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = X_s(t, x_1, \dots, x_n) + R_s(t, x_1, \dots, x_n) \quad (s = 1, \dots, n)$$

splňuje podmínku

$|\bar{x}_s\ (t)| < \varepsilon$ *pro* $t > t_0$, *jakmile* $|\bar{x}_s(t_0)| < \delta_1$ *a jakmile* $|R_s(t, x_1, \dots, x_n)| < \delta_2$.



Obr. 7.

Na štěstí lze dokázat, že z asymptotické stability plyne stabilita při trvale působících poruchách pro nejčastěji se vyskytující případy, t. j. když pravé strany soustavy (6) jsou periodické funkce t anebo na t vůbec nezávisí.

O vztahu mezi stabilitou ve fysikálním a matematickém smyslu můžeme souhrnem říci: Jsou-li funkce X_s $(s = 1, \dots, n)$ v soustavě (6) periodické funkce t anebo na t nezávisí, a je-li triviální řešení této soustavy asymptoticky stabilní podle počátečních podmínek, je soustava popsaná těmito rovnicemi stabilní s hlediska fysikálního. Zatím ovšem necháváme stranou otázku, jak veliké smí být rušivé vlivy a změny parametrů. Předpokládáme prostě, že jsou dostatečně malé.

Může se stát, že soustava není stabilní podle žádné z uvedených definic, přesto však vyhovuje požadavkům, které na ni s hlediska fysikální stability klademe. Za příklad takové soustavy může sloužit matematické kyvadlo. Uvažujme jeho ustálený pohyb, na př. kývání kolem dolní rovnovážné polohy s maximální amplitudou $\varphi_{\max} < \frac{1}{2}\pi$. Změní-li se v okamžiku t_0 počáteční podmínky jakkoliv málo, bude se lišit nově ustavený pohyb od původního až o $2\varphi_{\max}$, neboť doba kyvu závisí na amplitudě. Podle původní definice je pohyb kyvadla nestabilní. Všimněme si však, že se průběh charakteristiky ve fázové rovině φ, $\dot{\varphi}$ změní libovolně málo, změní-li se počáteční podmínky $\varphi(t_0)$, $\dot{\varphi}(t_0)$ dostatečně málo (obr. 7). V takových případech říkáme, že pohyb je orbitálně stabilní.

Podstata Ljapunovovy metody

Omezíme se na případ, že funkce X_s ($s = 1, \ldots, n$) v rovnicích (6) nezávisí na čase

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = X_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n)\,. \tag{7}$$

O funkcích X_s ($s = 1, \ldots, n$) předpokládáme, že v okolí počátku jsou spojité a splňují podmínku jednoznačnosti řešení. Ljapunovova metoda spočívá v nalezení funkcí proměnných $x_1, \ldots, x_n$, které úzce souvisí se soustavou (7). Splňují-li nalezené funkce určité podmínky, je rozhodnuto o stabilitě triviálního řešení soustavy (7). O těchto funkcích budeme nadále předpokládat, že jsou jednoznačně definovány v dostatečně velkém okolí počátku, mají zde spojité parciální derivace a v počátku nabývají nulové hodnoty.

Budeme ještě potřebovat několik definicí:

Spojitá funkce $V(x_1, \ldots, x_n)$ se nazývá positivně definitní, když v nějakém okolí počátku $V(x_1, \ldots, x_n) > 0$ pro $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$ a $V(0, \ldots, 0) = 0$. Funkce $V(x_1, \ldots, x_n)$ se nazývá negativně definitní, když funkce $- V(x_1, \ldots, x_n)$ je positivně definitní.

Funkce $V(x_1, \ldots, x_n)$ nazývá se positivně semidefinitní, když v nějakém okolí počátku $V(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, $V(0, \ldots, 0) = 0$.

Funkce $V(x_1, \ldots, x_n)$ nazývá se negativně semidefinitní, když $- V(x_1, \ldots, x_n)$ je positivně semidefinitní.

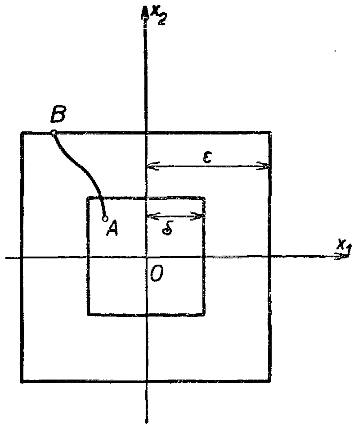
Tak na př. $V = x_1^2 + x_2^2$ je positivně definitní, uvažujeme-li ji jako funkci dvou proměnných, ale positivně semidefinitní, díváme-li se na ni jako na funkci tří proměnných. Funkce $V = - x_1^2 x_2^2$ je negativně semidefinitní.

Dosadíme-li do funkce $V(x_1, \ldots, x_n)$ za nezávisle proměnné nějaké řešení soustavy (7) $x_s(t)$ ($s = 1, \ldots, n$), stane se V funkcí t a tedy i funkcí bodu pohybujícího se po integrální čáře soustavy (7). Podle pravidla o derivování složené funkce

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i\,.$$

Výraz $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i$ je tedy derivací funkce $V(x_1, \ldots, x_n)$ podle integrální čáry soustavy (7).

I. věta o stabilitě: *Jestliže existuje positivně definitní funkce* $V(x_1, \ldots, x_n)$, *jejíž derivace podle integrální čáry soustavy* (7) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i$ *je negativně semidefinitní, je triviální řešení soustavy* (7) *stabilní.*



Obr. 8.

Větu zde nebudeme přesně dokazovat, ale ukážeme na dvourozměrném případu hlavní myšlenku důkazu.

Zvolme $\varepsilon > 0$ dostatečně malé. Máme ukázat, že existuje $\delta > 0$ tak, že integrální čára vycházející ze čtverce o straně 2δ zůstane stále ve čtverci o straně 2ε (obr. 8). Nazveme l min $V(x_1, x_2)$ na obvodu čtverce o straně 2ε. Ze spojitosti funkce $V(x_1, x_2)$ plyne, že existuje čtverec o straně 2δ, v němž všude $V(x_1, x_2) < l$. Integrální čára soustavy (7) vycházející v čase t z libovolného bodu A uvnitř čtverce o straně 2δ nedosáhne nikdy hranice čtverce o straně 2ε. Kdyby jí totiž dosáhla, třeba v čase t a v bodě B, potom $V(B) - V(A) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \leqq 0$, neboť $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ je negativně semidefinitní. To je však spor, neboť $V(B) \geqq l > V(A)$. Jak je vidět, nepoužívá se zde podstatným způsobem toho, že pracujeme v rovině. Stejná úvaha platí i pro n-rozměrný prostor.

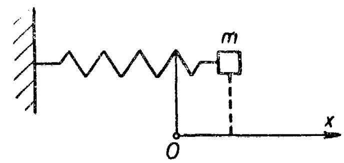
II. věta o asymptotické stabilitě: *Jestliže existuje positivně definitní funkce* $V(x_1, \ldots, x_n)$, *jejíž derivace podle integrální čáry soustavy* (7) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s$ *je negativně definitní, je triviální řešení soustavy* (7) *asymptoticky stabilní.*

Navážeme na důkaz předchozí věty. Soustava je stabilní, protože jsou splněny předpoklady předchozí věty. Derivace funkce $V(x_1, x_2)$ podle integrální čáry vycházející ze čtverce o straně 2δ zůstává pro všechna t záporná, protože jednak tato čára nevyjde ze čtverce o straně 2ε, jednak neprochází počátkem vzhledem k jednoznačnosti triviálního řešení. $V(t)$ je tedy monotonně klesající. Má limitu, protože je zdola omezená. Dokážeme, že tato limita je rovna nule. Předpokládejme, že je od nuly různá, t. j. lim $V(t) = a > 0$. Pak existuje t_0 a $\eta > 0$ tak, že $|x_s(t)| > \eta$ pro $t > t_0$, což plyne ze spojitosti funkce V. Potom však $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}} < -\alpha$ $(\alpha > 0)$ a platí:

$$V(t) = V(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \leqq V(t_0) - \alpha(t - t_0)\,.$$

To je spor, neboť výraz v pravé části nerovnosti může být libovolně malý zatím co $V(t)$ nemůže být záporné. Z toho plyne, že $\lim x_s(t) = 0$, čímž je věta dokázána.

Lze dokázat, že druhou větu o asymptotické stabilitě je možno obrátit, t. j. že z asymptotické stability triviálního řešení plyne existence Ljapunovovy funkce. Není tedy obavy, že bychom se snažili najít funkci $V(x_1, \ldots, x_n)$ k asymptoticky stabilní soustavě, zatím co by neexistovala. Avšak v některých případech může býti nalezení funkce velmi obtížné. Uvidíme, že velmi často lze funkci V najít pomocí linearisované soustavy rovnic.



Obr 9.

Je-li $V(x_1, \ldots, x_n)$ Ljapunovova funkce, splňující na příklad podmínky 2. věty o asymptotické stabilitě, potom jsou tyto podmínky splněny i libovolnou diferencovatelnou funkcí $\Phi(V)$, která má tyto vlastnosti: Pro $V > 0$ je $\Phi(V) > 0$, $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}V} > 0$; $\Phi(0) = 0$. Za funkci $\Phi(V)$ můžeme vzít třeba $\Phi(V) = V^n$ (n je celé kladné číslo). Z toho je vidět, že k asymptoticky stabilní soustavě existuje nekonečně mnoho funkcí splňujících podmínky 2. věty o asymptotické stabilitě

Poznamenejme ještě, že funkce V je v jistém smyslu zobecněním energie mechanické soustavy. Uvažujme na příklad netlumený oscilátor na obr. 9, který je popsán rovnicí

$$m\ddot{x} + kx = 0\,, \quad k > 0\,. \tag{7_1}$$

Kinetická energie $E_k = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$. Potenciální energie $E_p = \int\limits_0^x kx\,\mathrm{d}x = \frac{kx^2}{2}$.

Označíme $\dot{x} = v$. Potom napíšeme (7_1) ve tvaru $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v + kx = 0$. Označíme $E_k + E_p = E$. Pak $\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_k + \mathrm{d}E_p = mv\,\mathrm{d}v + kx\,\mathrm{d}x = 0$. Z toho plyne, že $E =$ konst. Celková energie $E(x, \dot{x})$ pro netriviální řešení rovnice je kladná hodnota, nezávislá na času t. V klidové poloze $E(0, 0) = 0$. $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$ pro každé t. $E(x, \dot{x})$ splňuje požadavky první věty o stabilitě a klidová poloha je proto stabilní.

Na druhé straně však nemůžeme použít energie jako Ljapunovovy funkce, abychom dokázali asymptotickou stabilitu triviálního řešení tlumené soustavy: $m\ddot{x}^2 + c\dot{x} + kx = 0$, ($c > 0, k > 0$). Poslední rovnici přepíšeme ve tvaru $mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + cv + kx = 0$. Z toho $\mathrm{d}E = -cv\,\mathrm{d}x$, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -cv^2$. $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ je tedy negativně semidefinitní a dokazuje pouze stabilitu, nikoliv však asymptotickou stabilitu triviálního řešení. Abychom dokázali asymptotickou stabilitu, stačí zvolit $V = ax^2 + bv^2 + dxv$, kde $a = \frac{k}{2}\left(\frac{m}{k} + 1\right) + \frac{c^2}{2k}$; $b = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m}{k} + 1\right)$; $d = \frac{cm}{k}$. Snadno se přesvědčíme, že derivace funkce V podle integrální čáry soustavy $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -c(x^2 + v^2)$.

Oblast asymptotické stability

Pro většinu případů, vyskytujících se v technické praxi, má jen malý význam, zjistíme-li, že soustava je asymptoticky stabilní. K dané soustavě jsou totiž často zadány i velikosti počátečních poruch a jest úkolem určit, zda při těchto poruchách v čase t_0 řešení zůstane omezené pro všechna $t \geq t_0$, a zda $\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0$, zatím co asymptotická stabilita nám pouze zaručuje, že řešení má žádané vlastnosti při počátečních poruchách dostatečně malých, při čemž nic není řečeno o jejich skutečné velikosti.

V některých případech lze odhadnout oblast počátečních podmínek, které určují řešení žádaných vlastností, metodami přímo vyplývajícími z Ljapunovovy theorie. Vyslovíme nejdříve definici oblasti asymptotické stability:

Nechť triviální řešení $x_s(t) = 0$ $(s = 1, \ldots, n)$ soustavy rovnic (7) jest asymptoticky stabilní. Oblastí asymptotické stability budeme nazývat souhrn Ω všech bodů, které mají tuto vlastnost: Jestliže počáteční bod $x_s(t_0)$ integrální čáry soustavy (7) $x_s(t)$ je v Ω, potom $\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0$. (Lze ukázat, že Ω je homeomorfním obrazem koule, čili že vznikne spojitou deformací n-rozměrné koule.)

Najdeme-li pro danou soustavu odhad oblasti asymptotické stability, musíme se ještě přesvědčit, zda integrály vycházející z odhadnuté oblasti stále zůstávají v dosti malém okolí počátku. Může se totiž stát, že tato soustava nevyhovuje s technického stanoviska, protože výkyvy proměnných veličin překročí stanovenou mez. Na příklad výkyv proudu v elektrickém motoru je omezen mechanickými a tepelnými vlastnostmi vodičů a pod. Jak vyplyne z dalšího, odhad takového okolí počátku nečiní potíží.

Metoda prvního přiblížení

Budeme předpokládat, že pravé strany soustavy (7) lze v okolí počátku $|x_s| < A$, $A > 0$ rozložit v potenční řady s konstantními koeficienty:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \overline{X}_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n)\,. \tag{8}$$

$\overline{X}_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ jsou potenční řady, začínající členy nejméně druhého stupně. Podstata metody prvního přiblížení spočívá v tom, že místo soustavy (8) vyšetřujeme linearisovanou soustavu

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \tag{8_1}$$

a ze stability této soustavy soudíme za určitých podmínek na stabilitu soustavy (8).

Stabilitu triviálního řešení soustavy (8_1) určíme z vlastností reálných částí kořenů charakteristického determinantu $D(\lambda) = |p_{si} - \lambda\delta_{si}|$ $(\delta_{si} = 0$ pro $s \neq i$, $\delta_{ii} = 1)$. V theorii lineárních rovnic s konstantními koeficienty se totiž dokazuje, že obecné řešení soustavy (8_1) je typu

$$x_s(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_{si}(t)\, e^{\lambda_i t}\,, \quad (s = 1, \ldots, n)\,,$$

kde C_i jsou integrační konstanty, $f_{si}(t)$ jsou polynomy v proměnné t nebo konstanty a λ_i kořeny charakteristického determinantu. Jsou-li reálné části všech kořenů λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ záporné, pak zřejmě $\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0$ a triviální řešení soustavy (8_1) je asymptoticky stabilní. Má-li aspoň jeden kořen kladnou reálnou část, je soustava nestabilní. Mají-li kořeny nulové, ale nikoliv kladné reálné části, je triviální řešení soustavy (8_1) stabilní nebo nestabilní podle toho, je-li nejvyšší stupeň polynomů f_{si} roven nule nebo větší.

O stabilitě soustavy (8) nás poučí tato

Věta: *Nechť charakteristický determinant $D(\lambda)$ soustavy prvního přiblížení (8_1) má jen kořeny se zápornou reálnou částí. Potom triviální řešení soustavy (8) je asymptoticky stabilní.*

Důkaz této věty naznačíme aspoň v hrubých rysech, neboť je v něm obsažena metoda odhadu oblasti asymptotické stability. Za předpokladů věty lze dokázati, že k libovolně zvolené negativně definitní kvadratické formě $U(x_1, \ldots, x_n)$ existuje positivně definitní kvadratická forma $V(x_1, \ldots, x_n)$ tak, že

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = U(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Zvolme pro určitost

$$U = -(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\,.$$

Utvořme

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \overline{X}_s)\,,$$

což je derivace funkce V podle integrální čáry soustavy (8). Podle definice funkce V je

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -(x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \sum_{s=1}^{n} \overline{X}_s \frac{\partial V}{\partial x_s}. \tag{9}$$

Člen $\sum_{s=1}^{n} \overline{X} \frac{\partial V}{\partial x_s}$ obsahuje mocniny x_s nejméně třetího stupně. Proto v dostatečně malém okolí počátku

$$|x_1^2 + \ldots + x_n^2| > \left| \sum_{s=1}^{n} \overline{X}_s \frac{\partial V}{\partial x_s} \right|$$

a levá strana rovnice (9) je zde záporná. Našli jsme positivně definitní funkci $V(x_1, \ldots, x_n)$, jejíž derivace je negativně definitní a řešení je tedy asymptoticky stabilní. Tím je věta dokázána.

Platí též tato

Věta. *Má-li charakteristický determinant* (8_1) *aspoň jeden kořen s kladnou reálnou částí, je triviální řešení soustavy* (8) *nestabilní.*

Tuto větu uvádíme bez důkazu.

Má-li charakteristický determinant soustavy (8) kořeny s nulovou reálnou částí, ale nikoliv s kladnou reálnou částí, je triviální řešení soustavy (8) stabilní nebo nestabilní podle toho, jak vypadají členy vyšších stupňů v rozvojích pravých stran rovnic (8). V tomto kritickém případě nemůžeme řešit stabilitu linearisací rovnic.[2])

Stabilitu soustav typu (7), vyskytujících se v praxi, lze řešiti methodou prvního přiblížení, pokud parametry možno zvoliti tak, aby charakteristický determinant soustavy (8_1) měl všechny kořeny se zápornými reálnými částmi. Potíže však vznikají při odhadu oblasti asymptotické stability. Předně proto, že oblast, kde $V(x_1, \ldots, x_n)$ je positivně definitní a její derivace podle integrální čáry negativně definitní, může býti podstatně menší než skutečná oblast asymptotické stability. Různou volbou funkce V můžeme dosáhnouti různých odhadů oblasti. Pouze v nejjednodušších případech můžeme určiti koeficienty kvadratické formy V tak, že dostaneme uspokojivý odhad. U složitějších případů je to pro nepřehlednost výrazů nemožné.

Druhá potíž není sice zásadního charakteru, avšak může způsobit ještě větší nepříjemnosti. Spočívá v tom, že v obecném případě nemáme technických prostředků k tomu, abychom určili okolí počátku, v němž $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ je záporná. To vede k tomu, že není možno určit oblast parametrů, pro něž oblast asymptotické stability vyhovuje požadavkům daným v úloze. Můžeme však často zjistit, zda oblast asymptotické stability vyhovuje pro dané číselné hodnoty parametrů.

[2]) Rozbor některých kritických případů je proveden v Malkinově knize [1]

Odhad oblasti asymptotické stability

Nechť $\dfrac{dV}{dt}$ z rovnice (9) je v jistém okolí počátku S negativně definitní a $V(x_1, \ldots, x_n)$ je positivně definitní kvadratická forma.[3]) Potom může nastati jen jeden z těchto případů:

1. S vyplňuje celý prostor. Potom triviální řešení soustavy (8) konverguje k nule při libovolně velkých počátečních poruchách.

2. Existují body, které nepatří do oblasti S. Najdeme-li číslo L tak, že uvnitř elipsoidu $V(x_1, \ldots, x_n) \leq L$ nejsou žádné body hranice oblasti S kromě počátku, je oblast, ohraničená plochou $V = L$ odhadem oblasti asymptotické stability.

V dalším ukážeme na příkladech z teorie elektrických strojů, jak lze provést odhad oblasti asymptotické stability.

Příklad 1. Pro stejnosměrný seriový motor byly odvozeny rovnice (4_1). Linearisovaná soustava má tvar:

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1x_1 + B_1x_2\,, \quad \frac{dx_2}{dt} = A_2x_1 + B_2x_2\,. \tag{10}$$

Utvořme charakteristický determinant

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} A_1 - \lambda & B_1 \\ A_2 & B_2 - \lambda \end{vmatrix}\,.$$

Předpokládejme, že parametry v soustavě (10) byly zvoleny tak, aby $D(\lambda)$ měl oba kořeny se zápornou reálnou částí. Zvolme negativně definitní kvadratickou formu $U = -(gx_1^2 + hx_2^2)$, kde g a h jsou kladné, zatím blíže neurčené koeficienty. K ní existuje jediná positivně definitní kvadratická forma V tak, že

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}(A_1x_1 + B_1x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(A_2x_1 + B_2x_2) = -(gx_1^2 + hx_2^2)\,. \tag{11}$$

Abychom určili koeficienty formy $V = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_1x_2$, dosadíme ji do rovnice (11), která platí pro všechny hodnoty x_1, x_2.

$$2\alpha A_1x_1^2 + \gamma A_1x_1x_2 + 2\alpha B_1x_1x_2 + B_1\gamma x_2^2 + 2\beta A_2x_1x_2 + \gamma A_2x_1^2 + 2\beta B_2x_2^2 + \\ + \gamma B_2x_1x_2 = -gx_1^2 - hx_2^2\,.$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} 2\alpha A_1 + \gamma A_2 &= -g\,, \\ \gamma B_1 + 2\beta B_2 &= -h\,, \\ \gamma A_1 + 2\alpha B_1 + 2\beta A_2 + \gamma B_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{12}$$

---

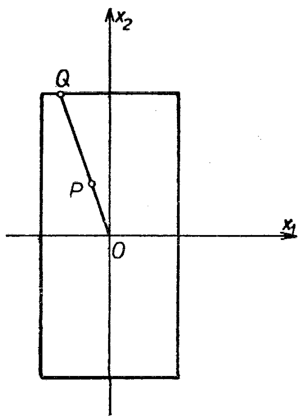
[3]) Kvadratickou formou nazýváme výraz $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, kde a_{ij} jsou reálná čísla.

Na základě existence jediné formy V lze dokázat, že determinant soustavy (12) $D \neq 0$. Můžeme tedy vypočítat koeficienty α, β, γ. Utvoříme derivaci formy V podle integrální čáry nelineární soustavy (4_1)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial V}{\partial x_i} (A_i x_1 + B_i x_2 + C_i x_1 x_2 + D_i x_1^2 + E_i x_2^2) .$$

Protože platí (11), máme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -(g x_1^2 + h x_2^2) + 2C_1 \alpha x_1^2 x_2 + \gamma C_1 x_1 x_2^2 + 2\beta D_2 x_1^2 x_2 + \gamma D_2 x_1^3 + $$
$$+ 2\beta E_2 x_2^3 + \gamma E_2 x_1 x_2^2 . \tag{13}$$



Obr. 10.

Dále odhadneme okolí počátku, v němž $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < 0$. To je možno učinit v našem případě tak, že podle velikosti koeficientů v pravé straně rovnice (13) zvolíme obdélník $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$ a přesvědčíme se, zda na jeho obvodu platí

$$g x_1^2 + h x_2^2 > \left| \sum_{i=1}^{6} B_i(x_1, x_2) \right|$$

kde $B_i(x_1, x_2)$ jsou jednotlivé členy 3. stupně v pravé straně rovnice (13). Platí-li nerovnost na obvodu obdélníku, platí s výjimkou počátku i uvnitř. Skutečně, uvažujme libovolný bod $P(x_1^P, x_2^P)$ uvnitř obdélníku, různý od počátku (obr. 10). Na obvodu obdélníku zvolíme bod $Q(x_1^Q, x_2^Q)$ tak, aby bod P ležel na úsečce $\overline{OQ}$.

Označíme $g x_1^2 + h x_2^2 = A(x_1, x_2)$, $\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \lambda < 1$.

Potom

$$\frac{A(x_1^P, x_2^P)}{A(x_1^Q, x_2^Q)} = \lambda^2, \quad \frac{\left|\sum_{i=1}^{6} B_i(x_1^P, x_2^P)\right|}{\left|\sum_{i=1}^{6} B_i(x_1^Q, x_2^Q)\right|} = \lambda^3 .$$

Z toho

$$A(x_1^P, x_2^P) = \frac{A(x_1^Q, x_2^Q)}{\left|\sum_{i=1}^{6} B_i(x_1^Q, x_2^Q)\right|} \frac{1}{\lambda} \left|\sum_{i=1}^{6} B_i(x_1^P, x_2^P)\right| > \left|\sum_{i=1}^{6} B_i(x_1^P, x_2^P)\right| .$$

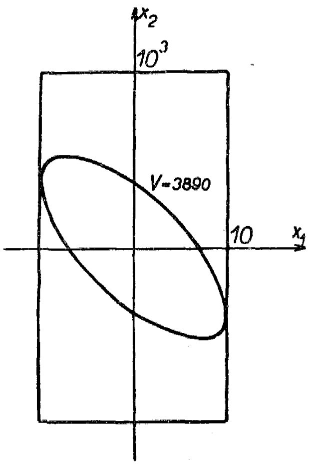
Na hranici obdélníku $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$ najdeme minimum $V = L$. Elipsa $V = L$ je hledaný odhad oblasti asymptotické stability.

Tento postup provedeme pro konkretní případ seriového motoru s těmito údaji: Výkon $P_n = 24$ kW, napětí $U = 230$ V, otáčky $n = 1300$, $R_k + R_s =$

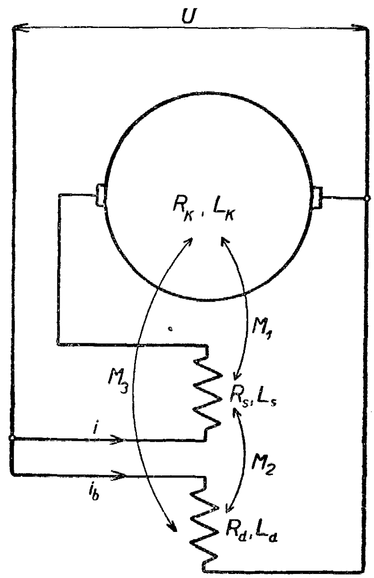
$= 0{,}5\ \Omega$, $L_k + L_s = 0{,}02$ H, $c = 2{,}08 \cdot 10^{-4}$ ($\mathrm{H}^2 \sec \mathrm{A}^{-1}$), $k = 2{,}742\ 10^{-3}$ (kgm A^{-2}), $I = 1{,}86$ (kgm^2), $\alpha = -4{,}1547\ 10^3$ (kgm), $\beta = 0{,}917$ (kgm. sec), $\gamma = -5{,}10^{-5}$ (kgm. sec^2).

Pro neporušené řešení najdeme hodnoty $i^* = 104{,}5$ A, $\omega^* = 8{,}170\ \sec^{-1}$. Kořeny charakteristického determinantu $\lambda_{1,2} = -55{,}26 \pm 54{,}60$ jsou záporné, takže neporušené řešení je asymptoticky stabilní. Formu U zvolíme:

$$U = -10^4 x_1^2 - x_2^2 .$$



Obr. 11.



Obr. 12.

Forma V pak vyjde:

$$V = 45{,}5x_1^2 + 3{,}04 \cdot 10^{-2}x_2^2 + 0{,}893x_1x_2 .$$

Snadno zjistíme, že $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ je záporná v obdélníku $|x_1| \leqq 10$, $|x_2| \leqq 10^3$. Minimum funkce V na obvodu tohoto obdélníku $\min V = 3890$. Elipsa $V = 3890$ je hledaný odhad oblasti asymptotické stability (obr. 11).

Příklad 2: *Koumpaundní stejnosměrný motor* (schema na obr. 12). Na proudové obvody použijeme Kirchhoffova zákona:

$$U = i(R_k + R_s) + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(L_k + L_s + M_1) + \frac{\mathrm{d}i_b}{\mathrm{d}t}(M_2 + M_3) + \omega(ai + \mathrm{d}i_b) ,$$

$$U = R_d i_b + L_d \frac{\mathrm{d}i_b}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(M_2 + M_3) .$$

Moment vyvozený motorem $M_{el} = fi^2 + gii_b$.

Moment zátěže $M_z = \alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2$.

Třetí rovnici dostaneme z rovnováhy momentů:

$$M_{el} = M_z + I \frac{d\omega}{dt}.$$

Převedeme rovnice na normální tvar:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\alpha}{I} - \frac{\beta\omega}{I} - \frac{\gamma}{I}\omega^2 + \frac{f}{I} i^2 + \frac{g}{I} ii_b ,$$

$$\frac{di}{dt} = [(L_k + L_s + M_1) L_d - (M_2 + M_3)^2]^{-1}[U(L_d - M_2 - M_3) - \\ - iL_d(R_s + R_k) + i_b R_d(M_2 + M_3) - i\omega a L_d - i_b \omega d] ,$$

$$\frac{di_b}{dt} = [(L_k + L_s + M_1) L_d - (M_2 + M_3)^2]^{-1}[U(L_k + L_s + M_1 - M_2 - M_3) + \\ + i(R_k + R_s)(M_2 + M_3) - i_b R_d(L_k + L_s + M_1) + \\ + i\omega a(M_2 + M_3) + i_b \omega d(M_2 + M_3)] .$$

Položíme levé strany rovnic této soustavy rovny nule a vyřešíme takto vzniklou soustavu tří algebraických rovnic. Postupujeme třeba tak, že vyjádříme z 1. rovnice neznámou i_b a dosadíme ji do zbývajících dvou. V obou rovnicích, které jsou kvadratické vzhledem k i, vyjádříme i jako funkci ω. Porovnáním pravých stran dostaneme algebraickou rovnici pro ω, kterou můžeme vyřešit s libovolnou přesností. Snadno lze dokázat, že tímto postupem obdržíme všechna řešení kromě toho, v němž $i = 0$, pokud vůbec takové řešení existuje. Tento případ nás však s fysikálního hlediska nezajímá. Budeme vyšetřovat stabilitu neporušeného řešení $\omega = \omega^* = \text{const}$, $i = i^* = \text{const}$, $i_b = i_b^* = \text{const}$. Porušené řešení vyjádříme pomocí poruch: $\omega = \omega^* + x_1$, $i = i^* + x_2$, $i_b = i_b^* + x_3$. Rovnice poruch mají tvar:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_1^2 + e_1x_2^2 + f_1x_2x_3 , \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_1x_2 + e_2x_1x_3 , \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_1x_2 + e_3x_1x_3 . \end{aligned} \tag{14}$$

Parametry soustavy zvolíme tak, aby charakteristický determinant linearisovaného systému rovnic měl všechny kořeny se zápornými reálnými částmi. Soustava nelineárních rovnic je tedy asymptoticky stabilní. Abychom odhadli oblast asymptotické stability, zvolíme negativně definitní formu

$$U = -(\alpha' x_1^2 + \beta' x_2^2 + \gamma' x_3^2) .$$

Koeficienty formy $V = \bar{\alpha}x_1^2 + \bar{\beta}x_2^2 + \bar{\gamma}x_3^2 + \bar{\delta}x_1x_2 + \bar{\varepsilon}x_1x_3 + \bar{\eta}x_2x_3$ určíme z rovnice

$U = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$, kde dosadíme za $\frac{dx_i}{dt}$ pravé strany rovnic

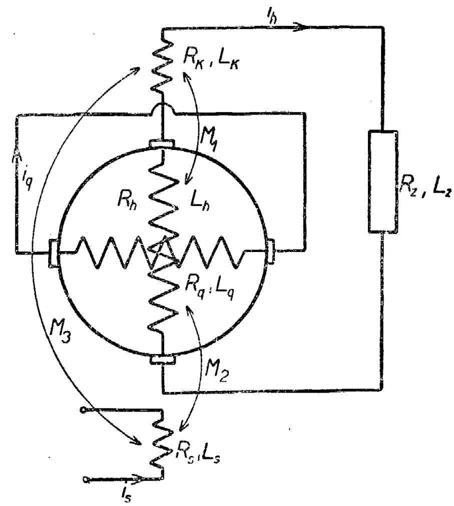
$$\frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 ,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 ,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 .$$

Derivace funkce V podle integrální čáry nelineární soustavy

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = (2\bar{\alpha}x_1 + \bar{\delta}x_2 + \\ + \bar{\varepsilon}x_3)(d_1x_1^2 + e_1x_2^2 + f_1x_2x_3) + \\ + (2\bar{\beta}x_2 + \bar{\delta}x_1 + \bar{\eta}x_3)(d_2x_1x_2 + \\ + e_3x_1x_3) + (2\bar{\gamma}x_3 + \bar{\varepsilon}x_1 + \bar{\eta}x_2) \,. \\ . \,(d_3x_1x_2 + e_3x_1x_3) - \\ - (\alpha'x_1^2 + \beta'x_2^2 + \gamma'x_3^2) \,.$$



Obr. 13.

Protože na pravé straně poslední rovnice je polynom obsahující pouze členy 2. a 3. stupně, můžeme k odhadu oblasti asymptotické stability použít stejné metody jako v předchozím příkladě.

Příklad 3: *Amplidyn poháněný konstantním momentem* (schema na obr. 13).

Na tři proudové obvody použijeme Kirchhoffova zákona

$$(L_h + L_k + 2M_1)\frac{di_h}{dt} + R_hi_h + R_ki_h + (M_2 + M_3)\frac{di_s}{dt} = k_1i_q - R_zi_h - L_z\frac{di_h}{dt} ,$$

$$L_q\frac{di_q}{dt} + R_qi_q = k_2i_s + k_3i_h ,$$

$$L_s\frac{di_s}{dt} + R_si_s + (M_2 + M_3)\frac{di_h}{dt} = U_s .$$

Moment poháněcího motoru $M_p =$ konst. Moment vyvozený amplidynem $M_{el} = ai_si_q + bi_qi_q$. Z rovnováhy momentů obdržíme čtvrtou rovnici

$$M_p = M_{el} + I\frac{d\omega}{dt} .$$

Soustavu rovnic převedeme na normální tvar

$$\frac{di_s}{dt} = a_1 i_s + b_1 i_h + c_1 i_q \omega + d_1 ,$$

$$\frac{di_h}{dt} = a_2 i_s + b_2 i_h + c_2 i_q \omega + d_2 ,$$

$$\frac{di_q}{dt} = a_3 i_q + b_3 i_s \omega + c_3 i_h \omega + d_3 ,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = a_4 i_s i_q + b_4 i_q i_h + c_4 .$$

Položíme levé strany těchto rovnic rovny nule a vzniklou soustavu algebraických rovnic vyřešíme.

Vyšetříme stabilitu neporušeného řešení $i_s = i_s^*$, $i_h = i_h^*$, $i_q = i_q^*$, $\omega = \omega^*$. Zavedeme poruchy jako nové proměnné

$$x_1 = i_s - i_s^*;\; x_2 = i_h - i_h^*;\; x_3 = i_q - i_q^*,\; x_4 = \omega - \omega^* .$$

Rovnice poruch mají tvar:

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3 + D_1 x_4 + E_1 x_3 x_4 ,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 + D_2 x_4 + E_2 x_3 x_4 ,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 + D_3 x_4 + E_3 x_1 x_4 + F_3 x_2 x_4 ,$$

$$\frac{dx_4}{dt} = A_4 x_1 + B_4 x_2 + C_4 x_3 + D_4 x_4 + E_4 x_1 x_3 + F_4 x_2 x_3 .$$

Pomocí Hurwitzova kriteria zvolíme parametry soustavy tak, aby charakteristický determinant linearisované soustavy rovnic měl všechny kořeny se zápornými reálnými částmi. Zvolíme-li negativně definitní formu $U = -\sum_{i=1}^{4} k_i x_i^2$ a vypočítáme koeficienty positivně definitní formy $V = \sum_{i,k=1}^{4} a_{ik} x_i x_k$, má derivace funkce V podle integrální čáry nelineární soustavy tvar

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = U + \left(2 \sum_{i=1}^{4} a_{1i} x_i\right) E_1 x_3 x_4 + \left(2 \sum_{i=1}^{4} a_{2i} x_i\right) E_2\, x_3 x_4 +$$
$$+ \left(2 \sum_{i=1}^{4} a_{3i} x_i\right) (E_3 x_1 x_4 + F_3 x_2 x_4) + \left(2 \sum_{i=1}^{4} a_{4i} x_i\right) (E_4 x_1 x_3 + F_4 x_2 x_3) .$$

Odhad oblasti asymptotické stability se provede v podstatě stejně jako v předchozích příkladech, neboť v poslední rovnici se vyskytují pouze členy 2. a 3. stupně.

LITERATURA

[1] *И. Г. Малкин:* Теория устойчивости движения.
[2] *Г. Н. Дубошин:* Основы теории устойчивости движения.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

ЗДЕНЕК ВОРЕЛ (Zdeněk Vorel)

(Поступило в редакцию 26/X 1955 г.)

Статья предназначается для первого ознакомления с теорией устойчивости Ляпунова. В ней содержатся важнейшие результаты, находящиеся в связи с исследованием устойчивости электрических машин. Приведено определение устойчивости по Ляпунову, далее первая и вторая теорема об устойчивости для автономных систем. Поясняется связь между устойчивостью в физическом и математическом смысле. Показан способ, как в конкретном случае можно произвести оценку области асимптотической устойчивости, пользуясь методом первого приближения. Далее производится оценка области асимптотической устойчивости для мотора постоянного тока последовательного включения с числовыми данными. Наконец намечен общий путь при производстве оценки области асимптотической устойчивости для двигателя смешанного возбуждения постоянного тока и для амплидина с постоянным приводным моментом.

Summary

ON SOME APPLICATIONS OF LIAPOUNOFF'S THEORY OF STABILITY IN ELECTRICAL MACHINERY

ZDENĚK VOREL

(Received October 26, 1955.)

This paper may give the first look at Liapounoff's theory of stability. It contains the most important results closely related to stability of electric machines. Liapounoff's definition of stability is followed by the first and second theorems of stability for autonomous systems. The relation of stability in

physical and mathematical sense is explained. The method of the first approximation is applied to value the domain of asymptotical stability. A numerical solution of this problem is carried out for direct-current series machine. Finally the general proceeding in valuation of the domain of asymptotical stability for a direct-current compounded motor and for an amplidyne driven with constant moment is showed.