Vladimir G. Maz'ya; S. V. Poborchij

Продолжение функций из классов С. Л. Соболева во внешность области с вершиной пика на границе, I.

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 36 (1986), No. 4, 634–661

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102122

Czechoslovak Mathematical Journal, 36 (111) 1986, Praha

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ С. Л. СОБОЛЕВА ВО ВНЕШНОСТЬ ОБЛАСТИ С ВЕРШИНОЙ ПИКА НА ГРАНИЦЕ, I.

В. Г. МАЗЬЯ, С. В. ПОБОРЧИЙ, Ленинград

(Поступило в редакцию 23/VIII 1985 г.)

Пусть $W_p^l(\Omega)$ – пространство С. Л. Соболева функций в области $\Omega \subset R^n$, снабженное нормой $\|u\|_{p,l,\Omega} = \sum_{s=0}^{l} \|\nabla_s u\|_{p,\Omega}$, где $l = 1, 2, \ldots, 1 \leqq p \leqq \infty$, ∇_s – градиент порядка s, $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ – норма в $L_p(\Omega)$.

Будем говорить, что область $\Omega \subset R^n$ с компактной границей $\partial\Omega$ принадлежит классу EW_p^l, если существует линейный непрерывный оператор $\mathscr{E}: W_p^l(\Omega) \to \to W_p^l(R^n)$, который является оператором продолжения, т.е. $\mathscr{E}u|_\Omega = u$ для всех $u \in W_p^l(\Omega)$.

Хорошо известно, что этому классу принадлежит область с достаточно гладкой границей [1, 2], а также область с границей класса $C^{0,1}$, которая локально может быть определена в некоторой декартовой системе координат с помощью липшицевой функции [3, 4]. В последнее время много внимания было уделено исследованию минимальных требований к границе области Ω, при которых $\Omega \in EW_p^l$ (см. [5–9] и др.). В частности, согласно [6, 7], классу EW_p^l, $p \in [1, \infty]$, $l \geqq 1$, принадлежит плоская область, граница которой является квазиокружностью (т.е. представляет собой образ окружности при квазиконформном отображении плоскости на себя). По теореме Альфорса [10] последнее условие равносильно следующему: справедливо неравенство $|x - z| \leqq c|x - y|$, $c = = \text{const}$, где x, y – любые точки на границе области Ω, а z – произвольная точка на той из двух дуг кривой $\partial\Omega$, соединяющих x и y, которая имеет меньший диаметр.

В работе [5] установлено, что класс плоских односвязных областей из EW_2^1 исчерпывается квазикругами. В. М. Гольдштейн [8] показал, что из одновременного включения плоской односвязной области Ω и области $R^2 \setminus \bar{\Omega}$ в класс EW_p^l следует, что $\partial\Omega$ – квазиокружность. В упомянутой работе Джонса описан некоторый класс n-мерных областей из EW_p^l, более широкий, чем класс липшицевых областей, и при $n = 2$ совпадающий с классом квазикругов. Этому классу принадлежат, в частности, области с внутренними пиками при $n \geqq 3$.

В. И. Буренков [11] построил линейный ограниченный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_p^{[\lambda l]}(R^n)$ для областей Ω с границами класса $C^{0,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$.

Известно, что при $p \in [1, \infty)$, $n \geqq 2$ области с внешними пиками и при $p \in (1, \infty)$, $n = 2$ области с внутренними пиками не входят в класс EW_p^l (см. [9], § 1.5). В настоящей работе выясняется, что в каждом из этих случаев существует линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$, действующий в весовое пространство $W_{p,\sigma}^l(R^n)$ с неотрицательным весом σ, стремящимся к нулю при приближении к вершине пика. В доказанных в работе теоремах даны точные условия на вес σ, при которых существует указанный оператор продолжения. Следствием упомянутых теорем является, в частности, включение плоской области с внутренным пиком в класс EW_1^1 и включение области с внешним пиком в класс EW_∞^l, $l = 1, 2, \ldots, n \geqq 2$.

В работе рассматривается также вопрос о существовании оператора продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$, где $q < p$, а Ω – ограниченная плоская область с внутренним пиком или ограниченная область с внешним пиком при $n \geqq 2$. Получены точные условия, связывающие параметры p, q, l, n с параметрами, описывающими заострение пика, при которых существует линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$.

Отметим в этой связи работу [12], где построен линейный ограниченный оператор продолжения: $W_p^1(\Omega) \to W_q^1(R^2)$ для плоской области Ω с внешним или внутренним пиком, в окрестности вершины которого граница принадлежит классу $C^{0,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$.

Некоторые из доказанных в настоящей статье теорем были анонсированы в заметке [13].

Опишем более подробно полученные в работе результаты на примере n-мерного пика $\Omega = \{x \in R^n: x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < \varphi(x_n)^2, x_n \in (0, 1)\}$. Не стремясь к общности, предположим, что φ – возрастающая выпуклая функция класса $C^{0,1}([0, 1])$, удовлетворяющая условиям $\varphi(t) = o(t)$ при $t \to +0$, $\varphi(2t) \leqq c\,\varphi(t)$, $t \in (0, 1/2)$, $c = \text{const}$. Тогда для того, чтобы существовал линейный непрерывный оператор продолжения из $W_p^l(\Omega)$ в весовое пространство $W_{p,\sigma}^l(R^n)$ с нормой $\|u\|_{W^l{}_{p,\sigma}(R^n)} = \sum_{|\alpha| \leqq l} \|\sigma D^\alpha u\|_{p,R^n}$, достаточно, а если $\sigma(x)$ в окрестности точки 0 зависит лишь от $|x|$ и возрастает, то и необходимо, чтобы в окрестности точки 0 было справедливо неравество*)

$$\sigma(r) \leqq \begin{cases} c(\varphi(r)/r)^l\,, & \text{если} \quad lp < n - 1\,, \\ c(\varphi(r)/r)^l\,|\log(\varphi(r)/r)|^{1-1/p}\,, & \text{если} \quad lp = n - 1\,, \\ c(\varphi(r)/r)^{(n-1)/p}\,, & \text{если} \quad lp > n - 1 \end{cases}$$

при $r = |x|$. Существование линейного непрерывного оператора продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$, где $1 \leqq q < p \leqq \infty$, $lq \neq n - 1$, равносильно сходимости интеграла

$$I_n(\beta) = \int_0^1 (t^\beta/\varphi(t))^{n/(\beta-1)}\, t^{-1}\, \mathrm{d}t\,.$$

*) Мы позволяем себе иногда писать $\sigma(r)$, $\sigma(z)$ и т.п. вместо $\sigma(x)$ для того, чтобы подчеркнуть зависимость σ только от одной переменной r, z и т. п.

Здесь число β определяется из уравнения $1/q - 1/p = l(\beta - 1)/((n-1)\beta + 1)$ при $lq < n - 1$ и из уравнения $1/q - 1/p = (n-1)(\beta - 1)/np$ при $lq > n - 1$. Если $lq = n - 1$, то в подинтегральную функцию интеграла $I_n(\beta)$ добавлятеся множитель $|\log(\varphi(t)/t)|^{-\alpha}$, где $\alpha = (1 - 1/q)/(1/q - 1/p)$, $\beta = (np - q)/(q(n-1))$.

Пусть $n = 2$. Для того, чтобы существовал линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^l(R^2 \setminus \bar{\Omega}) \to W_{p,\sigma}^l(R^2)$ достаточно, а если $\sigma(x)$ зависит на Ω лишь от x_2 и возрастает, то и необходимо, чтобы при $x \in \Omega$ и малых x_2 была верна оценка $\sigma(x) \leqq c(\varphi(x_2)/x_2)^{l-1/p}$, $c = \text{const}$.

При $n = 2$ положим $G = (R^2 \setminus \bar{\Omega}) \cap B$, где B — единичный круг с центром $x = 0$. Тогда необходимым и достаточным условием существования линейного оператора продолжения: $W_p^l(G) \to W_q^l(R^2)$, $1 \leqq q < p \leqq \infty$, является сходимость интеграла $I_n(\beta)$, где $n = 2$, $1/q - 1/p = (l - 1/p)(\beta - 1)/(\beta + 1)$.

Работа состоит из девяти параграфов. Настоящая первая часть работы содержит параграфы 1—5. В § 1 приводятся некоторые вспомогательные результаты, используемые в дальнейшем. В частности здесь доказываются весовые неравенства Харди для внешних пиков. В § 2 строится оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$, где Ω — область в R^n с вершиной внешнего пика на границе, $lp < n - 1$ и σ — весовая функция. Аналогичный оператор продолжения в случае $lp = n - 1$ рассмотрен в § 3. Для построения указанных операторов область Ω в окрестности вершины пика разбивается на такие ячейки, что диаметры вписанного и описанного около каждой ячейки шара имеют один и тот же порядок малости. Затем общий оператор продолжения выписывается с помощью подходящего развиения единицы и локальных операторов продолжения с каждой ячейки. Параграфы 4—5 носят вспомогательный характер. В § 4 изучаются свойства одного оператора типа усреднения, а в § 5 получена оценка нормы оператора продолжения из тонкого цилиндра в более широкий. Результаты последних двух параграфов будут использованы во второй части работы при построении оператора продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$ для области Ω с внешним пиком в случае $lp > n - 1$.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть Ω — область в R^n, $n \geqq 2$, с компактной границей $\partial\Omega$. Предположим, что $0 \in \partial\Omega$ и что $\partial\Omega \setminus 0$ — поверхность класса $C^{0,1}$. Поместим в точку 0 начало декартовых координат $x = (y, z)$, $y \in R^{n-1}$, $z \in R^1$. Пусть φ — функция из $C^{0,1}([0, 1])$, которая удовлетворяет условиям: $\varphi(t) = o(t)$ при $t \to +0$, $\varphi(t)/t$ возрастает. Пусть еще ω — $(n-1)$-мерная область с компактным замыканием и границей класса $C^{0,1}$.

Определение 1.1. Точка 0 называется *вершиной пика, направленного во внешность области* Ω, если существует такая окрестность U этой точки, что $U \cap \Omega = \{x\colon z \in (0, 1),\ y/\varphi(z) \in \omega\}$.

В дальнейшем будем для определенности считать, что множество $\bar{\omega}$ расположено в открытом единичном шаре с центром в точке $y = 0$ и что ω содержит точку $y = 0$. Кроме того, относительно функции φ будем дополнительно предполагать, что $\varphi(t) < t$ при $t \in (0, 1]$.

Пусть измеримая неотрицательная функция σ определена в области $G \subset R^n$ и во внешности любой окрестности точки $0 \in \bar{G}$ ограничена и отделена от нуля.

Определение 1.2. Будем говорить, что функция u *принадлежит пространству* $W^l_{p,\sigma}(G)$, если для любой окрестности V точки 0 справедливо включение $u \in W^l_p(G \setminus \bar{V})$ и конечна величина

$$\|u\|_{W^l_{p,\sigma}(G)} = \sum_{|\alpha| \leqq l} \|\sigma D^\alpha u\|_{p,G}\,, \quad 1 \leqq p \leqq \infty\,.$$

Условимся через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначать положительные постоянные, зависящие лишь от p, q, l, n и области Ω. Положительные величины a, b будем называть эквивалентными ($a \sim b$), если $c_1 \leqq a/b \leqq c_2$. Через $B_r(x)$ обозначим открытый шар в R^n с радиусом r и центром в точке $x \in R^n$; $B_r =^{\text{def}} B_r(0)$.

Лемма 1.1. (Неравенства Харди для внешнего пика.) *Пусть Ω — область в R^n с вершиной* 0 *внешнего пика на границе, и пусть U — окрестность точки* 0 *из определения* 1.1. *Предположим, что функция u задана на множестве $U \cap \Omega$, имеет обобщенные производные порядка $l \geqq 1$ и равна нулю в окрестности $z = 1$. Тогда справедливы неравенства*

$$\|z^{-l}u\|_{p,U\cap\Omega} \leqq c\|\nabla_l u\|_{p,U\cap\Omega}\,, \quad lp < n\,, \tag{1.1}$$

$$\|z^{-l}\sigma_1 u\|_{p,U\cap\Omega} \leqq c\|\sigma_1 \nabla_l u\|_{p,U\cap\Omega}\,, \quad lp \leqq n-1\,, \tag{1.2}$$

$$\|z^{-l}\sigma_2 u\|_{p,U\cap\Omega} \leqq c\|\sigma_2 \nabla_l u\|_{p,U\cap\Omega}\,, \quad lp = n-1\,, \tag{1.3}$$

где $\sigma_1(x) = (z/\varphi(z))^l$, $\sigma_2(x) = \sigma_1(x)\,(\log(z/\varphi(z)))^{(1-p)/p}$.

Доказательство. Достаточно установить оценку

$$\|z^{-k}\sigma u\|_{p,U\cap\Omega} \leqq c\|z^{1-k}\sigma\nabla u\|_{p,U\cap\Omega}\,, \quad 1 \leqq k \leqq l\,, \tag{1.4}$$

в следующих случаях: (1) $lp < n$, $\sigma(x) = 1$; (2) $lp \leqq n-1$, $\sigma(x) = \sigma_1(x)$; (3) $lp = n-1$, $\sigma(x) = \sigma_2(x)$. Оценки (1.1)–(1.3) получаются из (1.4) итерациями.

Пусть $X = (s, t)$, где $s \in R^{n-1}$, $t \in R^1$,

$$\begin{cases} s = y/\varphi(z)\,, \\ t = \displaystyle\int_z^1 \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\,. \end{cases}$$

При таком преобразовании область $\Omega \cap U$ переводится в цилиндр $s \in \omega$, $t \in (0, \infty)$. Положим $v(X) = u(x)$. Замечая, что $|\nabla_x u| \sim |\nabla_X v|/\varphi(z(t))$

и $|D(y, z)/D(s, t)| = \varphi(z(t))^n$, приведем неравенство (1.4) к эквивалентному

$$\int_\omega \mathrm{d}s \int_0^\infty |v(s, t)|^p\, z(t)^{-kp}\, \varphi(z(t))^n\, \sigma(z(t))^p\, \mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq c \int_\omega \mathrm{d}s \int_0^\infty |\nabla_X v|^p\, z(t)^{-(k-1)p}\, \varphi(z(t))^{n-p}\, \sigma(z(t))^p\, \mathrm{d}t\,,$$

где $v(s, t) = 0$ в окрестности $t = 0$. Последнее неравенство следует из одномерного неравенства

$$\int_0^\infty \left|\int_0^t f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right|^p z(t)^{-kp}\, \varphi(z(t))^n\, \sigma(z(t))^p\, \mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq c \int_0^\infty |f(t)|^p\, z(t)^{(1-k)p}\, \varphi(z(t))^{n-p}\, \sigma(z(t))^p\, \mathrm{d}t\,,$$

которое, согласно [14], выполняется в том, и только в том случае, если

$$\sup_{r>0} \left[\left(\int_r^\infty z(t)^{-kp}\, \varphi(z(t))^n\, \sigma(z(t))^p\, \mathrm{d}t\right)^{1/p} \times\right.$$

$$\left.\times \left(\int_0^r z(t)^{(k-1)p/(p-1)}\, \varphi(z(t))^{(p-n)/(p-1)}\, \sigma(z(t))^{p/(1-p)}\right)^{1-1/p}\right] < \infty\,.$$

Делая замену переменной в каждом интеграле, приведем последнее неравенство к виду $\sup\{A(\varepsilon): \varepsilon \in (0, 1)\} < \infty$, где

$$A(\varepsilon) = \left(\int_0^\varepsilon \sigma(z)^p\, z^{-kp}\, \varphi(z)^{n-1}\, \mathrm{d}z\right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int_\varepsilon^1 (z^{(k-1)p}\, \varphi(z)^{1-n}/\sigma(z)^p)^{1/(p-1)}\, \mathrm{d}z\right)^{1-1/p}.$$

(Если $p = 1$, то второй сомножитель заменяется выражением

$$\operatorname{ess\,sup}\{\varphi(z)^{1-n}\, z^{k-1}/\sigma(z): z \in (\varepsilon, 1)\}\,.$$

Рассмотрим, например, случай (1): $lp < n$, $\sigma(z) = 1$. В силу возрастания функции $\varphi(z)/z$ получаем

$$A(\varepsilon) \leqq \left(\int_0^\varepsilon z^{n-1-kp}\, \mathrm{d}z\right)^{1/p} \left(\int_\varepsilon^1 z^{(k-1)p/(p-1)}\, \varphi(z)^{(1-n)/(p-1)} (\varphi(z)\, z^{-1})^{(n-1)/(p-1)}\, \mathrm{d}z\right)^{1-1/p} \leqq$$

$$\leqq c\varepsilon^{n/p-k} \left(\int_\varepsilon^1 z^{(kp-n)/(p-1)-1}\, \mathrm{d}z\right)^{1-1/p} \leqq \mathrm{const}\,.$$

Аналогично проверяется, что $A(\varepsilon) \leqq \mathrm{const}$ и в случаях (2), (3). Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть весовая функция σ определена в R^n, при малых $|x|$ зависит лишь от $|x|$ и возрастает. Тогда всякая гладкая, положительно однородная нулевой степени функция ζ на $R^n \setminus \{0\}$ является мультипликатором в простран-*

стве $W^l_{p,\sigma}(R^n)$, *где* $lp < n$. *При этом для любой функции* $u \in W^l_{p,\sigma}(R^n)$ *верна оценка*

$$\|\zeta u\|_{W^l_{p,\sigma}(R^n)} \leqq c\|u\|_{W^l_{p,\sigma}(R^n)} . \tag{1.5}$$

Доказательство. Поскольку $|(\nabla_s\zeta)(x)| \leqq c|x|^{-s}$, то для справедливости (1.5) достаточно установить оценку

$$\| |x|^{-s} \sigma . (\nabla_{l-s}u)\|_{p,R^n} \leqq c\|\sigma . (\nabla_l u)\|_{p,R^n} , \quad 0 \leqq s \leqq l , \tag{1.6}$$

для функции $u \in W^l_{p,\sigma}(R^n)$, сосредоточенной в окрестности точки 0. Будем считать, что $\operatorname{supp} u \subset B_\varepsilon$, где число $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\sigma(x)$ в шаре B_ε зависит лишь от $|x|$ и возрастает. Заметим, что (1.6) следует из неравенства

$$\| |x|^{-s} \sigma\nabla_{l-s}u\|_{p,B_\varepsilon} \leqq c\| |x|^{-(s-1)} \sigma\nabla_{l-s+1}u\|_{p,B_\varepsilon} , \tag{1.7}$$

в котором $0 \leqq s \leqq l$. Пусть v – любая производная u порядка $l - s$. Тогда (1.7) является следствием оценки

$$\int_{S^{n-1}} \mathrm{d}\theta \int_0^\varepsilon |v(r, \theta)|^p \sigma(r)^p r^{n-1-sp} \,\mathrm{d}r \leqq$$
$$\leqq c \int_{S^{n-1}} \mathrm{d}\theta \int_0^\varepsilon |(\nabla v)(r, \theta)|^p r^{n-1-(s-1)p} \sigma(r)^p \,\mathrm{d}r ,$$

которая, в свою очередь, вытекает из одномерного неравенства

$$\int_0^\varepsilon \left|\int_t^\varepsilon f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|^p t^\mu \sigma(t)^p \,\mathrm{d}t \leqq c \int_0^\varepsilon |f(t)|^p t^{\mu+p} \sigma(t)^p \,\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

при $\mu > -1$. Согласно [14], (1.8) выполняется в том и только том случае, если $\sup\{A(\delta)\colon \delta \in (0, \varepsilon)\} < \infty$, где

$$A(\delta) = \left(\int_0^\delta t^\mu \sigma(t)^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_\delta^\varepsilon t^{(\mu+p)/(1-p)} \sigma(t)^{p/(1-p)} \,\mathrm{d}t\right)^{1-1/p}$$

(при $p = 1$ второй сомножитель заменяется выражением $\operatorname{ess\,sup}\{(t^{\mu+1}\sigma(t))^{-1}, t \in (\delta, \varepsilon)\}$. В силу возрастания σ на промежутке $(0, \varepsilon)$ получаем, что

$$A(\delta) \leqq \left(\int_0^\delta t^\mu \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_\delta^\infty t^{(\mu+1)/(1-p)-1} \,\mathrm{d}t\right)^{1-1/p} \leqq c < \infty .$$

Таким образом установлено неравенство (1.8) и вместе с ним (1.5). Доказательство леммы закончено.

2. ОПЕРАТОР ПРОДОЛЖЕНИЯ: $W^l_p(\Omega) \to W^l_{p,\sigma}(R^n)$, СЛУЧАЙ $lp < n - 1$

Начнем с одного простого утверждения, которым часто будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма 2.1. *Пусть* G – *область в* R^n *с компактным замыканием и границей* *класса* $C^{0,1}$. *Положим* $G_\varepsilon = \{x \in R^n \colon x/\varepsilon \in G\}$, $\varepsilon \in (0, 1)$. *Тогда существует линейный оператор* E_ε, *переводящий функции, заданные на* G_ε, *в функции, заданные на* R^n *и такой, что* $E_\varepsilon u|_{G_\varepsilon} = u$ *и*

$$\|\nabla_s(E_\varepsilon u)\|_{p,R^n} \leqq c(s, p, n, G)\,(\varepsilon^{-s}\|u\|_{p,G_\varepsilon} + \|\nabla_s u\|_{p,G_\varepsilon})$$

для любой функции $u \in W_p^l(G_\varepsilon)$, $s = 0, 1, \ldots, 1 \leqq p \leqq \infty$.

Доказательство. Пусть φ: $R^n \ni x \to \varepsilon x$ и пусть E — построенный Стейном (см. [4] гл. 6, § 3) оператор продолжения из области G на R^n. Тогда с помощью формулы замены переменной в интеграле Лебега легко проверить, что можно положить $E_\varepsilon u = (E(u \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1}$. При этом константа $c(s, p, n, G)$ совпадает с константой c в неравенстве

$$\|\nabla_s(Ev)\|_{p,R^n} \leqq c(\|v\|_{p,G} + \|\nabla_s v\|_{p,G}), \quad v \in W_p^s(G).$$

Основным результатом настоящего параграфа является следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* Ω — *област в* R^n *с вершиной пика, направленного во внешность* Ω, *и пусть* $lp < n - 1$, $p \in [1, \infty)$ *или* $l = n - 1$, $p = 1$.

(i) *Положим*

$$\sigma(x) = \begin{cases} (\varphi(|x|)/|x|)^l, & \text{если } x \in R^n \setminus \bar\Omega,\ |x| < 1, \\ 1 & \text{при остальных } x \in R^n. \end{cases}$$

Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения:

$$W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n).$$

(ii) *Пусть выполнено условие*

$$\varphi(2t) \leqq c\,\varphi(t), \quad t \in (0, 1/2), \tag{2.1}$$

а функция σ *при малых* $|x|$ *и* $x \in R^n \setminus \bar\Omega$ *зависит лишь от* $|x|$ *и возрастает. Если существует ограниченный оператор продолжения:* $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$, *то при достаточно малых* $|x|$, $x \in R^n \setminus \bar\Omega$, *верна оценка*

$$\sigma(x) \leqq c(\varphi(|x|)/|x|)^l.$$

Доказательство. (i) Построим последовательность $\{z_k\}_{k \geqq 0}$ по правилу $z_{k+1} + \varphi(z_{k+1}) = z_k$, где $z_0 \in (0, 1/3)$. Нетрудно видеть, что $z_k \searrow 0$, $z_k z_{k+1}^{-1} \to 1$. Кроме того, справедливо соотношение $\varphi_k \sim \varphi_{k+1}$, где $\varphi_k = \varphi(z_k)$. В самом деле,

$$\varphi_k = \int_{z_{k+1}}^{z_k} \varphi'(t)\,dt + \varphi_{k+1} \leqq (\|\varphi'\|_{\infty,(0,1)} + 1)\,\varphi_{k+1}.$$

Оценка $\varphi_k \geqq \varphi_{k+1}$ очевидна. Будем считать, что число z_0 выбрано столь малым, чтобы выполнялось неравенство $z_0 < 2z_2$ и шар B_{3z_0} содержался в окрестности U вершины пика из определения 1.1.

Пусть $u \in W_p^l(\Omega)$. Продолжим функцию u на R^n. Допустим сначала, что $\operatorname{supp} u \subset U$ и $u(y, z) = 0$ при $z > z_0/2$. Положим при $k \geqq 1$

$$(2.2) \qquad \Omega_k = \Omega \cap U \cap \{x = (y, z),\ y \in R^{n-1},\ z \in (z_{k+1}, z_{k-1})\}\,.$$

Заметим, что диаметр вписанного и описанного шаров для области $D_k = \{x\colon \varphi_k x \in \Omega_k\}$ ограничены сверху и снизу положительными величинами, не зависящими от k. Константа Липшица для ∂D_k та же, что и для $\partial \Omega_k$ и ее можно считать не зависящей от k. Таким образом, норма оператора продолжения по Стейну из $W_p^s(D_k)$ в $W_p^s(R^n)$ ограничена сверху числом, не зависящим от k (см. [4]). По лемме 2.1 существует такой линейный оператор продолжения $\mathscr{E}_k$ из области Ω_k на R^n, что

$$(2.3) \qquad \|\nabla_s(\mathscr{E}_k u)\|_{p,R^n} \leqq c(\varphi_k^{-s}\|u\|_{p,\Omega_k} + \|\nabla_s u\|_{p,\Omega_k})\,, \quad s \leqq l\,.$$

Пусть ξ_k – срезающая функция класса $C_0^\infty(R^{n-1})$ такая, что $\xi_k(y) = 1$, если $|y| < \varphi_{k-1}$, $\xi_k(y) = 0$, если $|y| > 2\varphi_{k-1}$. Предположим еще, что $|(\nabla_s \xi_k)(y)| \leqq c\varphi_k^{-s}$, $y \in R^{n-1}$, $k \geqq 1$.

Рассмотрим последовательность функций $\{\eta_k\}_{k \geqq 1}$ со следующими свойствами: $\eta_k \in C_0^\infty(z_{k+1}, z_{k-1})$, $|\eta_k^{(s)}(z)| \leqq c\varphi_k^{-s}$, $0 \leqq s \leqq l$, $\sum_{k=1}^\infty \eta_k(z) = 1$ при $z \in (0, z_1]$. Положим

$$(2.4) \qquad (\mathscr{E}^{(0)} u)(x) = \sum_{k=1}^\infty \eta_k(z)\, \xi_k(y)\, (\mathscr{E}_k u)(x)\,, \quad x = (y, z) \in R^n\,,$$

и проверим, что $\mathscr{E}^{(0)}$ есть требуемый оператор продолжения. Отметим для всех $k \geqq 1$ справедливость включения $\operatorname{supp}(\eta_k \xi_k) \subset B_{3z_0} \subset U$, откуда следует, что $\operatorname{supp}(\mathscr{E}^{(0)} u) \subset U$. Если $z \geqq z_1$, то $(\mathscr{E}^{(0)} u)(x) = \eta_1(z)\, \xi_1(y)\, (\mathscr{E}_1 u)(x) = 0$, так как $u|_{\Omega_1} = 0$. Далее, при $x \in U \cap \Omega$ имеем $\eta_k(z)\, \xi_k(y) = \eta_k(z)$, поэтому при тех же x и при $z < z_1$ справедливо равенство

$$(\mathscr{E}^{(0)} u)(x) = \sum_{k=1}^\infty \eta_k(z)\, u(x) = u(x)\,.$$

Приведенные рассуждения показывают, что $\mathscr{E}^{(0)} u|_\Omega = u$.

Докажем оценку $\|\mathscr{E}^{(0)} u\|_{W^l_{p,\sigma}(R^n)} \leqq c\|u\|_{p,l,\Omega}$. Можно считать что $\sigma(x) = (\varphi(|x|)/|x|)^l$ при всех $x \in B_1$. Заметим прежде всего следующее: для любого $\varepsilon > 0$ множество $R^n \setminus B_\varepsilon$ пересекается лишь с конечным числом носителей функций $\xi_k \eta_k$ и значит, существуют производные $D^\alpha \mathscr{E}^{(0)} u \in L_p^{\mathrm{loc}}(R^n \setminus \{0\})$, $|\alpha| \leqq l$. Установим оценку

$$(2.5) \qquad \|\sigma \nabla_j \mathscr{E}^{(0)} u\|_{p,R^n} \leqq c\|u\|_{p,l,\Omega}\,, \quad 0 \leqq j \leqq l\,.$$

Пусть

$$G_k = \{(y, z)\colon z \in (z_{k+1}, z_k),\ |y| < 2\varphi_{k-1}\}\,, \quad k \geqq 1\,.$$

Множество G_k пересекается с $\operatorname{supp}(\eta_i \xi_i)$ лишь при $i = k$, $k + 1$ и, кроме того,

$\sigma|_{G_k} \sim \sigma_k$, где $\sigma_k = (\varphi_k/z_k)^l$. Отсюда

$$(2.6) \qquad \|\sigma\nabla_j(\mathscr{E}^{(0)}u)\|_{p,G_k} \leqq c\sigma_k \sum_{i=k}^{k+1} \|\nabla_j(\eta_i\xi_i\mathscr{E}_i u\|_{p,R^n} \leqq$$
$$\leqq c\sigma_k \sum_{i=k}^{k+1} \sum_{s=0}^{j} \varphi_i^{s-j}\|\nabla_s\mathscr{E}_i u\|_{p,R^n}\,.$$

Используя (2.3), мажорируем правую часть в (2.6) выражением

$$c\sigma_k \sum_{i=k}^{k+1} \sum_{s=0}^{j} (\varphi_i^{-j}\|u\|_{p,\Omega_i} + \varphi_i^{s-j}\|\nabla_s u\|_{p,\Omega_i})\,,$$

которое будет оценено с помощью неравенства

$$(2.7) \qquad \|\nabla_s u\|_{p,\Omega_i} \leqq c[(\operatorname{diam}\Omega_i)^{-s}\,\|u\|_{p,\Omega_i} + (\operatorname{diam}\Omega_i)^{l-s}\,\|\nabla_l u\|_{p,\Omega_i}]\,.$$

Замечая, что $\operatorname{diam}\Omega_i \sim \varphi_i$, получим

$$(2.8) \qquad \|\sigma\nabla_j(\mathscr{E}^{(0)}u)\|_{p,G_k}^p \leqq c\sum_{i=k}^{k+1} (z_k^{-lp}\|u\|_{p,\Omega_i}^p + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega_i}^p) \leqq$$
$$\leqq c\|z^{-l}u\|_{p,\Omega_k'}^p + c\|\nabla_l u\|_{p,\Omega_k'}^p\,,$$

где $\Omega_k' = \Omega_k \cup \Omega_{k+1}$. Суммируя (2.8) по k и принимая во внимание конечную кратность покрытия $\{\Omega_k'\}$, придем к оценке

$$\|\sigma\nabla_j(\mathscr{E}^{(0)}u)\|_{p,G} \leqq c\|z^{-l}u\|_{p,\Omega\cap U} + c\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}\,,$$

в которой $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Используем теперь лемму 1.1 (см. неравенство (1.1)) и найдем, что $\|\sigma\nabla_j(\mathscr{E}^{(0)}u)\|_{p,G} \leqq c\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}$. Поскольку $\operatorname{supp}\mathscr{E}^{(0)}u \subset \bar{G}$, то из последней оценки вытекает (2.5). Итак, требуемый оператор продолжения имеет вид (2.4) в случае, когда $\operatorname{supp} u \subset U$ и $u(y, z) = 0$ при $z > z_0/2$.

Переходя к общему случаю, выберем $\varrho = z_0/4$ и построим срезающую функцию $\psi \in C_0^\infty(B_{2\varrho})$ такую, что $\psi|_{B_\varrho} = 1$. Положим $u_0 = \psi u$, $u_1 = (1 - \psi)\,u$ и доопределим u_1 нулем на множестве $B_\varrho \setminus \bar{\Omega}$. Пусть $\mathscr{E}^{(1)}$ – оператор продолжения из липшицевой области $\Omega \cup B_\varrho$ на R^n (см. [4] гл. 6). Тогда оператор продолжения $\mathscr{E}\colon W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$ имеет вид $\mathscr{E}u = \mathscr{E}^{(0)}u + \mathscr{E}^{(1)}u_1$. Доказательство п. (i) теоремы 2.1 закончено.

(ii) Пусть $f \in C_0^\infty(0, 3)$, $f(t) = 1$ при $t \in (1, 2)$. При достаточно малом $\varrho > 0$ положим $u_\varrho|_{\Omega\setminus U} = 0$, $u_\varrho(x) = f(z/\varrho)$, если $x \in U \cap \Omega$ (здесь, как и прежде, $x = (y, z)$, $y \in R^{n-1}$, $z \in R^1$, а U – окрестность точки 0 из определения 1.1). Ясно, что $u_\varrho \in W_p^l(\Omega)$ и $\|u_\varrho\|_{p,l,\Omega}^p \leqq c\varrho^{1-lp}\,\varphi(3\varrho)^{n-1}$. Пусть $\mathscr{E}\colon W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$ – ограниченный оператор продолжения в весовое пространство $W_{p,\sigma}^l(R^n)$ с монотонным в окрестности точки 0 весом $\sigma(x)$, зависящим только от $|x|$. В силу монотонности σ имеем

$$(2.9) \qquad \|u_\varrho\|_{p,l,\Omega}^p \geqq c\|\nabla_l(\mathscr{E}u_\varrho)\,\sigma\|_{p,R^n}^p \geqq$$
$$\geqq c\,\sigma(\varrho)^p \int_\varrho^{2\varrho} \mathrm{d}z \int_{R^{n-1}} |(\nabla_l\mathscr{E}u_\varrho)\,(y, z)|^p\,\mathrm{d}y\,.$$

Для ограниченной области $D \subset R^{n-1}$ положим

$$\gamma_{p,l}(D) = \inf\{\|\nabla_l v\|^p_{p,R^{n-1}}: v \in W^l_p(R^{n-1}), \quad v = 1 \text{ п.в. на } D\} \tag{2.10}$$

и заметим, что внутренний интеграл в правой части (2.9) не меньше, чем $\gamma_{p,l}(\varphi(z)\,\omega) = \varphi(z)^{n-1-lp}\gamma_{p,l}(\omega)$. В силу неравенства С. Л. Соболева $\|v\|_{q,R^{n-1}} \leqq c\|\nabla_l v\|_{p,R^{n-1}}$ при $lp < n-1$ и $q = (n-1)\,p/(n-1-lp)$ получаем, что в этом случае $\gamma_{p,l}(\omega) \geqq c(\mathrm{mes}_{n-1}\,\omega)^{p/q} > 0$. Если $l = n-1$, $p = 1$, то справедливо неравенство $\|v\|_{\infty,R^{n-1}} \leqq c\|\nabla_l v\|_{p,R^{n-1}}$ и в этом случае также $\gamma_{p,l}(\omega) \geqq c > 0$. Таким образом, внутренний интеграл в правой части (2.9) не меньше, чем $c\,\varphi(z)^{n-1-lp}$, и мы имеем

$$c_1\varrho^{1-lp}\varphi(3\varrho)^{n-1} \geqq \|u_\varrho\|^p_{p,l,\Omega} \geqq c_2\,\sigma(\varrho)^p\,\varrho\,\varphi(\varrho)^{n-1-lp}\,.$$

Принимая во внимание, что $\varphi(3\varrho) \sim \varphi(\varrho)$, приходим к оценке $\sigma(\varrho) \leqq c(\varphi(\varrho)/\varrho)^l$. Доказательство теоремы закончено.

3. ОПЕРАТОР ПРОДОЛЖЕНИЯ: $W^l_p(\Omega) \to W^l_{p,\sigma}(R^n)$, СЛУЧАЙ $lp = n-1$

Установим сначала одно вспомогательное утверждение.

Пусть $\{z_k\}_{k\geqq 0}$ — последовательность, построенная при доказательстве п. (i) предыдущей теоремы и ε — фиксированное положительное число. Положим $\varphi_k = \varphi(z_k)$

$$\zeta_k(y) = \frac{\log(|y|/\varphi_k)}{\varepsilon\log(\varphi_k/z_k)} + 1\,, \quad y \in R^{n-1}\setminus\{0\}\,, \quad k \geqq 0\,. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Пусть функция φ, описывающая заострение пика, удовлетворяет условию $\varphi(z + O(\varphi(z))) = \varphi(z) + o(\varphi(z))$ при $z \to +0$ и пусть λ — функция класса $C^\infty(R^1)$ с ограниченными производными всех порядков. Тогда при всех $k \geqq 0$ справедливы оценки*

$$|\nabla_s(\lambda\circ\zeta_k)(y)| \leqq c|\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{-1}\,|y|^{-s}\,, \tag{3.2}$$

где $s \geqq 1$, $y \in R^{n-1}\setminus\{0\}$, и

$$\begin{aligned} &|\nabla_s((\lambda\circ\zeta_k)(y) - (\lambda\circ\zeta_{k+1})(y))| \leqq \\ &\leqq c|y|^{-s}((\varphi_k - \varphi_{k+1})\,\varphi_k^{-1} + \varphi_k z_k^{-1})\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $s \geqq 0$, $\varphi_k < |y| < \varphi_k^{1-\varepsilon}z_k^\varepsilon$. В обеих оценках $c = c(z_0, s, \varepsilon, \lambda, \varphi)$.

Доказательство. Пусть α — любой мультииндекс размерности $n-1$ и e_i — координатный орт оси ox_i в R^{n-1}. Тогда

$$\begin{aligned} D^{\alpha+e_i}(\lambda\circ\zeta_k)(y) &= D^\alpha_y(\lambda'(\zeta_k(y))\,\partial\zeta_k/\partial y_i) = \\ &= \mu_k\sum_{\beta\leqq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(D^\beta_y\lambda'(\zeta_k(y)))\,D^{\alpha-\beta+e_i}_y\log|y|\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\mu_k = (\varepsilon \log(\varphi_k z_k^{-1}))^{-1}$. Полагая в (3.4) $|\alpha| = j$, получаем оценку

$$|\nabla_{j+1}(\lambda \circ \zeta_k)(y)| \leqq c|\mu_k| \sum_{i=0}^{j} |\nabla_i(\lambda' \circ \zeta_k)(y)| \cdot |y|^{i-j-1}, \quad |y| \neq 0,$$

из которой по индукции легко выводим (3.2).

Обратимся к доказательству неравенства (3.3). Пусть сначала $s = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}|(\lambda \circ \zeta_k)(y) - (\lambda \circ \zeta_{k+1})(y)| &\leqq c|\zeta_k(y) - \zeta_{k+1}(y)| = \\ &= c|\mu_k \log(|y|\, \varphi_k^{-1}) - \mu_{k+1} \log(|y|\, \varphi_{k+1}^{-1})| \leqq \\ &\leqq c(|(\mu_k - \mu_{k+1}) \log(|y|\, \varphi_k^{-1})| + |\mu_{k+1} \log(\varphi_{k+1}\varphi_k^{-1})|).\end{aligned}$$

Так как $z_k z_{k+1}^{-1} \to 1$, $\varphi_k \varphi_{k+1}^{-1} \to 1$, $\varphi_k z_k^{-1} \to 0$, то

$$\begin{aligned}|(\mu_k - \mu_{k+1}) \log(|y|\, \varphi_k^{-1})| &\leqq |\mu_k - \mu_{k+1}| \log(z_k \varphi_k^{-1}) \leqq \\ &\leqq c|\log(\varphi_{k+1}\varphi_k^{-1} z_k z_{k+1}^{-1})| \leqq c|\varphi_{k+1}\varphi_k^{-1} z_k z_{k+1}^{-1} - 1| \leqq \\ &\leqq c((\varphi_k - \varphi_{k+1})\, \varphi_k^{-1} + \varphi_k z_k^{-1}),\end{aligned}$$

если $\varphi_k < |y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^{\varepsilon}$. Кроме того,

$$|\mu_{k+1} \log(\varphi_{k+1}\varphi_k^{-1})| \leqq c(\varphi_k - \varphi_{k+1})\, \varphi_k^{-1}.$$

Таким образом, получено неравенство (3.3) при $s = 0$.

Пусть теперь $s \geqq 1$ и для любой функции $\lambda \in C^\infty(R^1)$ с ограниченными производными всех порядков верна оценка

$$\begin{aligned}(3.5) \qquad &|\nabla_j(\lambda(\zeta_k(y)) - \lambda(\zeta_{k+1}(y)))| \leqq \\ &\leqq c|y|^{-j}((\varphi_k - \varphi_{k+1})\, \varphi_k^{-1} + \varphi_k z_k^{-1}), \quad j = 0, \dots, s-1,\end{aligned}$$

если $\varphi_k < |y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^{\varepsilon}$. Обозначим через γ любой $(n-1)$-мерный мультииндекс длины s. Тогда $\gamma = \alpha + e_i$ для некоторого $i = 1, \dots, n-1$ и мультииндекса α длины $s-1$. Из формулы (3.4) следует, что

$$\begin{aligned}(3.6) \qquad |D_y^\gamma[(\lambda \circ \zeta_k)(y) - (\lambda \circ \zeta_{k+1})(y)]| &\leqq \sum_{\beta \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D_y^{\alpha-\beta+e_i} \log|y|\,| \times \\ &\times |D_y^\beta[\mu_k(\lambda' \circ \zeta_k)(y) - \mu_{k+1}(\lambda' \circ \zeta_{k+1})(y)]| \leqq \\ &\leqq c \sum_{\beta \leqq \alpha} |y|^{|\beta|-s} |(\mu_k - \mu_{k+1})\, D_y^\beta(\lambda' \circ \zeta_k)(y)| + \\ &+ c|\mu_{k+1}| \sum_{\beta \leqq \alpha} |y|^{|\beta|-s} |D_y^\beta((\lambda' \circ \zeta_k)(y) - (\lambda' \circ \zeta_{k+1})(y))|.\end{aligned}$$

В силу (3.2) (с заменой λ на λ') получаем, что при $\beta \leqq \alpha$

$$\begin{aligned}|(\mu_k - \mu_{k+1})\, D_y^\beta \lambda'(\zeta_k(y))| &\leqq c|y|^{-|\beta|}\, |\mu_k - \mu_{k+1}| \leqq \\ &\leqq c|y|^{-|\beta|}((\varphi_k - \varphi_{k+1})\, \varphi_k^{-1} + \varphi_k z_k^{-1}),\end{aligned}$$

и первая сумма в правой части (3.6) оценивается правой частью неравенства (3.3). Для оценки $|D_y^\beta(\lambda' \circ \zeta_k - \lambda' \circ \zeta_{k+1})(y)|$ при $\beta \leqq \alpha$ применим индукционное предположение (3.5) (с заменой λ на λ' и j на $|\beta|$). В результате вторая сумма в правой части (3.6) также оценится сверху правой частью (3.3). Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть Ω — область в R^n с вершиной пика, направленного во внешность Ω, и пусть $lp = n - 1$, $p \in (1, \infty)$.*

(i) *Предположим, что выполнено условие*

$$\varphi(t + O(\varphi(t))) = \varphi(t)\,(1 + O(\varphi(t))/t)^{\delta}) \tag{3.7}$$

при $t \to +0$ и некотором $\delta > 0$. Положим

$$\sigma(x) = (\varphi(|x|)/|x|)^l \,|\log(\varphi(|x|)/|x|)|^{1-1/p},$$

если $x \in B_1 \setminus \bar{\Omega}$, и $\sigma(x) = 1$ при $x \notin B_1 \setminus \bar{\Omega}$. Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$.

(ii) *Пусть функция φ удовлетворяет условию (2.1), а весовая функция σ при $x \in R^n \setminus \bar{\Omega}$ и малых $|x|$ зависит только от $|x|$ и возрастает. Если существует ограниченный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$, то верна оценка*

$$\sigma(x) \leqq c(\varphi(|x|)\,|x|^{-1})^l \,|\log(\varphi(|x|)\,|x|^{-1})|^{1-1/p},$$

где x — точка из $R^n \setminus \bar{\Omega}$, достаточно близкая к вершине пика.

Доказательство. (i) Пусть λ — функция класса $C^\infty(R^1)$ такая, что $\lambda(t) = 0$ при $t \leqq 1/3$, $\lambda(t) = 1$ при $t \geqq 2/3$. Как и в теореме 2.1 построим последовательность $\{z_k\}_{k \geqq 0}$ по правилу: $z_0 \in (0, 1/3)$, $z_{k+1} + \varphi(z_{k+1}) = z_k$, $k \geqq 0$. Эта последовательность обладает следующими свойствами: $z_k \searrow 0$, $z_k z_{k+1}^{-1} \to 1$, $\varphi_k \varphi_{k+1}^{-1} \to 1$, $\varphi_k z_k^{-1} \to 0$, где $\varphi_k = \varphi(z_k)$. Положим $\chi_k = \lambda \circ \zeta_k$, где функции ζ_k ппределены равенством (3.1), а $0 < \varepsilon < \min\{1/2, \delta/l, 1/l\}$. Ясно, что $\chi_k \in C_0^\infty(R^{n-1})$, $k \geqq 0$. Мы имеем: $\zeta_k(y) < 0$, если $|y| > \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^{\varepsilon}$ и $\zeta_k(y) > 1 + \log(\varphi_{k-1}/\varphi_k)/(\varepsilon \log(\varphi_k/z_k))$, если $|y| < \varphi_{k-1}$. Так как $\varphi_{k-1}\varphi_k^{-1} \to 1$, $\varphi_k z_k^{-1} \to 0$, то для достаточно больших k верно неравенство $\zeta_k(y) > 2/3$ при $|y| < \varphi_{k-1}$. Выбирая число $z_0 \in (0, 1/3)$ достаточно малым, можно добиться для всех $k \geqq 1$ выполнения условий $\chi_k(y) = 1$ при $|y| < \varphi_{k-1}$, $\chi_k(y) = 0$ при $|y| > \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^{\varepsilon}$. Будем, кроме того, считать, что $2\varphi_{k-1} < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^{\varepsilon}$, $z_0/2 < z_2$ и $B_{3z_0} \subset U$, где U — окрестность вершины пика из определения 1.1.

Пусть $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$, $k \geqq 1$ — последовательности функций, введенные при доказательстве п. (i) теоремы 2.1. Определим область Ω_k формулой (2.2) и обозначим через $\mathscr{E}_k$ линейный оператор продолжения из Ω_k на R^n, удовлетворяющий условию (2.3).

Продолжим функцию $u \in W_p^l(\Omega)$ с носителем в $\{x \in U: z \leqq z_0/2\}$ из Ω на R^n. Положим

$$\bar{u}_k = (\operatorname{mes}_n \Omega_k)^{-1} \int_{\Omega_k} u(x)\,dx\,, \quad k \geqq 1\,,$$

и определим оператор $\mathscr{E}^{(0)}$ равенством

$$\mathscr{E}^{(0)} u = v + w\,, \tag{3.8}$$

где

$$(3.9)\qquad v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k\, \eta_k(z)\, \chi_k(y)\,, \quad x = (y, z)\,,$$

$$(3.10)\qquad w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(z)\, \xi_k(y)\, (\mathscr{E}_k(u - \bar{u}_k))\,(x)\,.$$

Из сформулированных выше требований вытекает, что $\operatorname{supp}(\eta_k\chi_k) \subset U$, $\operatorname{supp}(\eta_k\xi_k) \subset U$, $k \geqq 1$. Кроме того, $v(y, z) = w(y, z) = 0$ при $z > z_1$, поскольку $u|_{\Omega_1} = 0$. Если $x = (y, z) \in \Omega \cap U$ и $z \leqq z_1$, то

$$v(x) + w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k\, \eta_k(z) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(z)\,(u(x) - \bar{u}_k) = u(x)\,.$$

Таким образом, $\mathscr{E}^{(0)}u|_\Omega = u$.

Для любого $r > 0$ и $x \in R^n \setminus B_r$ в суммах (3.9) и (3.10) имеется лишь конечное число ненулевых слагаемых, и значит, существуют производные $D^\alpha(\mathscr{E}^{(0)}u) \in L_p^{\mathrm{loc}}(R^n \setminus \{0\})$, $|\alpha| \leqq l$. Получим оценки

$$(3.11)\qquad \|\sigma\nabla_j v\|_{p,R^n} \leqq c\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}\,, \quad 0 \leqq j \leqq l\,,$$

$$(3.12)\qquad \|\sigma\nabla_j W\|_{p,R^n} \leqq c\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}\,, \quad 0 \leqq j \leqq l\,,$$

где $\sigma(x) = (\varphi(|x|)\,|x|^{-1})^l\,|\log(\varphi(|x|)\,|x|^{-1})|^{1-1/p}$ при $|x| < 1$. Положим

$$G_k = \{x = (y, z)\colon z \in (z_{k+1}, z_k),\ y \in R^{n-1},\ |y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon\}\,, \quad k \geqq 0\,.$$

Отметим, что при $x \in G_k$ справедливы соотношения

$$|\,|x| - z_k| = |\,|y|^2 + z^2 - z_k^2|\,(|x| + z_k)^{-1} < \\ < \varphi_k(\varphi_k z_k^{-1})^{1-2\varepsilon} + \varphi_k < 2\varphi_k\,,$$

поэтому $\varphi(|x|) = \varphi_k + o(\varphi_k)$, и

$$(3.13)\qquad \sigma(x) \sim \sigma_k = (\varphi_k z_k^{-1})^l\,|\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{1-1/p}\,, \quad x \in G_k\,.$$

Имеем:

$$(3.14)\qquad v(y, z)|_{G_k} = \sum_{i=k}^{k+1} \eta_i(z)\,\chi_i(y)\,\bar{u}_i = \bar{u}_{k+1}\,\chi_{k+1}(y) + \\ + \eta_k(z)\,((\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1})\,\chi_k(y) + \bar{u}_{k+1}(\chi_k(y) - \chi_{k+1}(y)))\,.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ любой n – мерный мультииндекс длины $|\alpha| = j$. Будем различать следующие случаи: (1) $\alpha_n = 0$ и (2) $\alpha_n > 0$.

(1) Предположим сначала, что $j = 0$. В силу (3.13) и (3.14)

$$(3.15)\qquad \|v\sigma\|_{p,G_k}^p \leqq c\sigma_k^p(|\bar{u}_k|^p + |\bar{u}_{k+1}|^p)\,\mathrm{mes}_n\, G_k \leqq \\ \leqq c(\varphi_k z_k^{-1})^{(n-1)(1-\varepsilon)}\,|\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{p-1} \times \\ \times (|\bar{u}_k|^p + |\bar{u}_{k+1}|^p)\,\varphi_k^n \leqq c\|u\|_{p,\Omega'_k}^p\,.$$

Здесь $\Omega'_k = \Omega_k \cup \Omega_{k+1}$, $k \geqq 1$, и на последнем шаге была использована оценка

$$(3.16) \qquad |\bar{u}_k|\, \varphi_k^n \leqq c\|u\|_{p,\Omega_k}^p .$$

Пусть теперь $0 < j \leqq l$. Тогда

$$(3.17) \qquad \|\sigma D^\alpha v\|_{p,G_k}^p \leqq c\sigma_k^p \sum_{i=k}^{k+1} |\bar{u}_i|^p \, \|\nabla_j \chi_i\|_{p,G_k}^p .$$

Так как $\chi_k(y) = \chi_{k+1}(y) = 1$ при $|y| < \varphi_k$, и для производных функции χ_i справедлива оценка (3.2), то

$$\|\nabla_j \chi_i\|_{p,G_k}^p \leqq c\varphi_k |\log(\varphi_i z_i^{-1})|^{-p} \int_{\varphi_k < |y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon} |y|^{-jp}\, \mathrm{d}y \leqq$$

$$\leqq c\varphi_k |\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{-p} \times \begin{Bmatrix} (\varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon)^{n-1-jp}, & j < l, \\ |\log(\varphi_k z_k^{-1})|, & j = l \end{Bmatrix} \leqq$$

$$\leqq c\varphi_k |\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{1-p} .$$

Поэтому правая часть (3.17) оценивается сверху выражением $c\varphi_k^n z_k^{1-n}(|\bar{u}_k|^p + |\bar{u}_{k+1}|^p)$. Используя (3.16), приходим к неравенству

$$(3.18) \qquad \|\sigma D^\alpha v\|_{p,G_k} \leqq c\|z^{-l} u\|_{p,\Omega_k'}^p , \quad k \geqq 1 ,$$

в котором $D^\alpha v$ — любая производная порядка j, не содержащая дифференцирования по z. Из (3.15) вытекает, что оценка (3.18) верна также и при $\alpha = 0$.

(2) Пусть $D_x^\alpha = D_y^\beta\, \partial^{j-s}/\partial z^{j-s}$, где $|\beta| = s < j \leqq l$. Тогда из (3.14) следует, что на G_k при $k \geqq 1$ справедливо неравенство

$$(3.19) \qquad |D^\alpha v| \leqq c\varphi_k^{s-j}(|\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}|\, |D^\beta \chi_k| + |\bar{u}_{k+1}|\, |D^\beta(\chi_k - \chi_{k+1})|) .$$

Применяя оценку (3.2) для производной $D^\beta \chi_k$, получаем:

$$(3.20) \qquad \varphi_k^{sp-jp} |\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}|^p \, \|\sigma D^\beta \chi_k\|_{p,G_k}^p \leqq$$

$$\leqq c\varphi_k^{sp-n+2} \sigma_k^p \int_{|y| < \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon} |y|^{-sp}\, \mathrm{d}y |\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}|^p \leqq c(\varphi_k z_k^{1-})^{p-\varepsilon(n-1-sp)} |\log(\varphi_k z_k^{-1})|^{p-1} \times$$

$$\times z_k^{-p(l-1)} \varphi_k^{n-p} |\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}|^p \leqq c\|z^{1-l}\, \nabla u\|_{p,\Omega_k'}^p .$$

Здесь на последнем шаге использовано соотношение $p > \varepsilon(n - 1 - sp)$ и оценка

$$\varphi_k^{n-p} |\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}|^p \leqq c\|\nabla u\|_{p,\Omega_k'}^p ,$$

вытекающая из неравенства

$$(3.21) \qquad \|u - \bar{u}_k\|_{p,\Omega_k} \leqq c\varphi_k \|\nabla u\|_{p,\Omega_k} , \quad k \geqq 1 .$$

Найдем мажоранту для величины $\varphi_k^{s-j} |\bar{u}_{k+1}|\, \|D^\beta(\chi_k - \chi_{k+1})\, \sigma\|_{p,k}$. Замечая, что $\chi_k(y) = \chi_{k+1}(y) = 1$ при $|y| < \varphi_k$ и ссылаясь на лемму 3.1 при $\varphi_k < |y| <$

$< \varphi_k^{1-\varepsilon} z_k^\varepsilon$, получаем

$$\varphi_k^{sp-jp}|\bar{u}_{k+1}|^p \, \|D^\beta(\chi_k - \chi_{k+1})\,\sigma\|_{p,G_k}^p \leqq$$
$$\leqq c\varphi_k^{sp-n+1}|\bar{u}_{k+1}|^p\,\sigma_k^p(|(\varphi_{k+1}-\varphi_k)\,\varphi_k^{-1}|^p + \psi_k^p)\,\varphi_k \times$$
$$\times \int\limits_{|y|<\varphi_k^{1-\varepsilon}z_k^\varepsilon} |y|^{-sp}\,\mathrm{d}y \leqq c|\log\psi_k|^{p-1}(\psi_k^{p\delta}+\psi_k^p)\,\psi_k^{-\varepsilon(n-1-sp)}\varphi_k^n|\bar{u}_{k+1}|^p\,z_k^{-lp},$$

где $\psi_k = \varphi_k z_k^{-1}$. Для оценки правой части последнего неравенства примем во внимание, что $\min\{p, \delta p\} > \varepsilon(n-1-sp)$ и применим (3.16). Найдем тогда, что

$$\varphi_k^{sp-jp}|\bar{u}_{k+1}|^p\,\|D^\beta(\chi_k-\chi_{k+1})\|_{p,G_k}^p \leqq \tag{3.22}$$
$$\leqq c\varphi_k^n|\bar{u}_{k+1}|^p\,z_k^{-lp} \leqq c\|z^{-l}u\|_{p,\Omega_{k+1}}^p.$$

Оценки (3.19), (3.20) и (3.22) в случае (2) приводят к неравенству

$$\|\sigma D^\alpha v\|_{p,G_k}^p \leqq c\|z^{-l}u\|_{p,\Omega_k'}^p + c\|z^{1-l}\,\nabla u\|_{p,\Omega_k'}^p, \tag{3.23}$$

в котором $D_x^\alpha v = D_y^\beta D_z^{j-|\beta|}v$, $|\beta| < j$.

Из (3.18) и (3.23) следует, что

$$\|\sigma\nabla_j v\|_{p,G_k}^p \leqq c(\|z^{-l}u\|_{p,\Omega_k'}^p + \|z^{1-l}\nabla u\|_{p,\Omega_k'}^p), \tag{3.24}$$

где $\Omega_k' = \Omega_k \cup \Omega_{k+1}$, $k \geqq 1$. Суммируя (3.24) по k и используя конечность кратности покрытия $\{\Omega_k'\}$, придем к оценке

$$\|\sigma\nabla_j v\|_{p,G} \leqq c(\|z^{-l}u\|_{p,U\cap\Omega} + \|z^{1-l}\nabla u\|_{p,U\cap\Omega}),$$

в которой $G = \bigcup_{k=1}^\infty G_k$. Теперь для того, чтобы получить (3.11), достаточно применить неравенство Харди (1.1) и заметить, что $\operatorname{supp} v \subset \bar{G}$.

Обратимся к оценке (3.12). На области G_k выполнены неравенства

$$|\nabla_j w| \leqq c\sum_{s=0}^{j}\sum_{i=k}^{k+1}|\nabla_{j-s}(\eta_i\xi_i)|\,|\nabla_s\mathscr{E}_i(u-\bar{u}_i)| \leqq$$
$$\leqq c\sum_{s=0}^{j}\sum_{i=k}^{k+1}\varphi_i^{s-j}|\nabla_s\mathscr{E}_i(u-\bar{u}_i)|, \quad k \geqq 1,$$

откуда

$$\|\sigma\nabla_j w\|_{p,G_k} \leqq c\sigma_k\sum_{s=0}^{l}\sum_{i=k}^{k+1}\varphi_i^{s-l}\|\nabla_s\mathscr{E}_i(u-\bar{u}_i)\|_{p,R^n}.$$

При помощи (2.3) получим, что

$$\|\sigma\nabla_j w\|_{p,G_k} \leqq c\sigma_k\sum_{s=0}^{l}\sum_{i=k}^{k+1}(\varphi_i^{-l}\|u-\bar{u}_i\|_{p,\Omega_i} + \varphi_i^{s-l}\|\nabla_s(u-\bar{u}_i)\|_{p,\Omega_i}).$$

Оценим величину $\|\nabla_s(u-\bar{u}_i)\|_{p,\Omega_i}$ с помлщью (2.7) (заменив u на $u-\bar{u}_i$), а затем применим (3.21). В результате найдем:

$$\|\sigma\nabla_j w\|_{p,G_k}^p \leqq c\sigma_k^p\sum_{i=k}^{k+1}(\varphi_i^{p-lp}\|\nabla u\|_{p,\Omega_i}^p + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega_i}^p) \leqq \tag{3.25}$$
$$\leqq c(\|z^{1-l}\nabla u\|_{p,\Omega_k'}^p + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega_k'}^p).$$

Суммируя (3.25) по k, придем к неравенству

$$\|\sigma\nabla_j w\|_{p,G} \leqq c(\|z^{1-l}\nabla u\|_{p,\Omega\cap U} + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega}),$$

в котором $0 \leqq j \leqq l$, $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Воспользуемся теперь леммой 1.1 (см. неравенство (1.1)) и заметим, что $\operatorname{supp} w \subset \bar{G}$. В итоге убедимся в справедливости оценки (3.12).

Итак, построен оператор продолжения $\mathscr{E}^{(0)}$, $\mathscr{E}^{(0)}u = v + w$, где v и w определены формулами (3.9), (3.10), а функция $u \in W_p^l(\Omega)$ имеет носитель в U и удовлетворяет условию $u(y, z) = 0$ при $z > z_0/2$. Общий случай $u \in W_p^l(\Omega)$ рассматривается точно так же, как в п. (i) теоремы 2.1. Доказательство п. (i) теоремы 3.1 закончено.

(ii) Пусть $\{u_\varrho\}$ – семейство функций, построенное в доказательстве п. (ii) теоремы 2.1. Напомним, что при малых $\varrho > 0$ справедливы следующие соотношения: $u_\varrho \in C^\infty(\Omega)$, $u_\varrho|_{\Omega\setminus U} = 0$, $u_\varrho(y, z) = 1$, если $z \in (\varrho, 2\varrho)$, $(y, z) \in \Omega \cap U$, и, кроме того, $\|u_\varrho\|_{p,l,\Omega} \leqq c\varrho^{1/p-l}\varphi(3\varrho)^l$. Обозначим через ζ гладкую положительно однородную функцию нулевой степени в $R^n \setminus \{0\}$, такую, что $\zeta(x) = 1$ в конусе $2|y| < z$ и $\zeta(x) = 0$ во внешности конуса $z > |y|$. Пусть $\mathscr{E}$: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$ – ограниченный оператор продолжения в пространство $W_{p,\sigma}^l(R^n)$ с монотонным в окрестности точки 0 весом $\sigma(x)$, зависящим только от $|x|$. Положим $v_\varrho = \zeta\mathscr{E}u_\varrho$. Принимая во внимание лемму 1.2 и монотонность σ, при достаточно малых $\varrho > 0$ получаем

$$\begin{aligned}(3.26)\qquad c_1\varrho^{1-lp}\varphi(3\varrho)^{n-1} &\geqq \|u\varrho\|_{p,l,\Omega}^p \geqq c_2\|\mathscr{E}u_\varrho\|_{W^l{}_{p,\sigma}(R^n)}^p \geqq \\ &\geqq c_3\|v_\varrho\|_{W^l{}_{p,\sigma}(R^n)}^p \geqq c_3\,\sigma(\varrho)^p\int_\varrho^{2\varrho}\mathrm{d}z\int_{R^{n-1}}|(\nabla_l v_\varrho)(y, z)|^p\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Пусть e – компакт, расположенный в открытом множестве $D \subset R^{n-1}$. Введем емкость

$$(3.27)\qquad \operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(D)) = \inf\{\|\nabla_l v\|_{p,D}^p\colon v \in \mathring{L}_p^l(D),\ v = 1 \quad \text{в окресности } e\}$$

где $\mathring{L}_p^l(D)$ – пополнение пространства $C_0^\infty(D)$ по норме $\|\nabla_l v\|_{p,D}$ (см. [9]). Имеем $v_\varrho(y, z) = 0$ при $|y| > z$ и $v_\varrho(y, z) = 1$, если $z \in (\varrho, 2\varrho)$, $y / \varphi(z) \in \omega$, ($\omega$ – $(n-1)$-мерная область из определения 1.1 вершины внешнего пика). Таким образом, из (3.26) выводим, что

$$\varrho^{1-lp}\varphi(3\varrho)^{n-1} \geqq c\,\sigma(\varrho)^p\int_\varrho^{2\varrho}\operatorname{Cap}(\varphi(z)\,\bar{B}, \mathring{L}_p^l(B_z))\,\mathrm{d}z$$

где $\bar{B}$ – замкнутый шар в ω. Используя оценку

$$(3.28)\qquad \operatorname{Cap}(\varphi(z)\,\bar{B}, \mathring{L}_p^l(B_z)) \geqq c|\log(\varphi(z)\,z^{-1})|^{1-p}, \quad lp = n-1,$$

(см. [9], § 9.1), получаем

$$\varrho^{1-lp}\,\varphi(3\varrho)^{n-1} \geqq c\,\sigma(\varrho)^p\,\varrho|\log(\varphi(\varrho)\,\varrho^{-1})|^{1-p}.$$

Так как $\varphi(3\varrho) \sim \varphi(\varrho)$, то отсюда следует, что

$$\sigma(\varrho) \leqq c(\varphi(\varrho)\,\varrho^{-1})^l\,|\log(\varphi(\varrho)\,\varrho^{-1})|^{1-1/p}.$$

Доказательство теоремы 3.1 закончено.

4. ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ ТИПА УСРЕДНЕНИЯ

Пусть $\Delta = (a, b) \subset R^1$, $a \geqq -\infty$, $b \leqq +\infty$, и $r \in (0, 1]$. Положим $\Delta_1 = (a, b + r)$,

$$G = \{(y, z) \in R^n\colon y \in B_r \subset R^{n-1}, \quad z \in \Delta\},$$

$$G_1 = \{(y, z) \in R^n\colon y \in B_r \subset R^{n-1}, \quad z \in \Delta_1\}.$$

Обозначим через K функцию класса $C_0^\infty(0, 1)$ и определим оператор T формулой

$$(4.1)\qquad (Tv)(y, z) = \int_0^1 K(t)\,v(y, z + |y|\,t)\,\mathrm{d}t, \quad (y, z) \in G.$$

В этом параграфе через c обозначаем положительные постоянные, зависящие от l, p, n, K. Начнем изучение свойств оператора T со следующего утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть $l \geqq 1$ и*

$$(4.2)\qquad \int_0^1 K(t)\,t^\alpha\,\mathrm{d}t = 0$$

при $\alpha = 0, 1, \ldots, l - 1$. Тогда для всех $v \in C^\infty(G_1)$ верна оценка

$$(4.3)\qquad \|(D_y^\gamma Tv)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq c|y|^{l-|\gamma|}\,\|(\nabla_l v)(y, \cdot)\|_{p,\Delta_1},$$

где $y \in B_r \setminus \{0\}$, $|\gamma| \leqq l$.

Кроме того, при $n = 2$ справедливы равенства

$$(4.4)\qquad \lim_{y\to+0} \partial^k(Tv)(y, z)/\partial y^k = 0, \quad k = 0, \ldots, l - 1, \quad z \in \Delta.$$

Доказательство. Установим сначала оценку (4.3) при $\gamma = 0$. Используя разложения Тейлора с остатком в интегральной форме и принимая во внимание, что ядро K имеет нулевые моменты порядков $0, \ldots, l - 1$, получаем:

$$(Tv)(y, z) = \frac{|y|^l}{(l-1)!}\int_0^1 K(t)\,t^l\,\mathrm{d}t \int_0^1 \frac{\partial^l v}{\partial z^l}(y, z + \tau|y|\,t)\,(1 - \tau)^{l-1}\,\mathrm{d}\tau.$$

Применяя неравенство Минковского, приходим к оценке

$$\|(Tv)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq c|y|^l\,\|(\nabla_l v)(y, \cdot)\|_{p,\Delta_1}.$$

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по l. Пусть $l = 1$. Легко проверяется, что $\lim_{y\to 0}(Tv)(y, z) = (Tv)(0, z) = 0$, $z \in \Delta$, $n = 2$. Далее,

$$(4.5)\qquad \partial(Tv)/\partial y_i = y_i|y|^{-1}\int_0^1 t\,K(t)\,v_z(y, z + |y|\,t)\,\mathrm{d}t +$$

$$+\int_0^1 K(t)\, v_{y_i}(y, z + |y|\, t)\, \mathrm{d}t = y_i|y|^{-1}\, T_1 v_z + T v_{y_i}\,,$$

где T_1 — оператор вида (4.1) с ядром $K_1(t) = t\, K(t)$. Используя неравенство Минковского, получаем, что $\|(Tv)_{y_i}(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq c\|(\nabla v)(y, \cdot)\|_{p,\Delta_1}$. Случай $l = 1$ разобран полностью.

Пусть $l \geqq 2$ и пусть утверждение леммы верно для порядков, не превосходящих $l - 1$. Установим (4.3) при $|\gamma| \leqq l$, $|\gamma| > 0$. Производную D_y^γ запишем в виде $D_y^\gamma = D_y^\alpha\, \partial/\partial y_i$, где α — $(n - 1)$-мерный мультиндекс длины $|\alpha| \leqq l - 1$ и $1 \leqq i \leqq n - 1$. Применяя (4.5), получаем, что

$$D_y^\gamma(Tv) = D_y^\alpha(Tv_{y_i}) + D_y^\alpha(y_i|y|^{-1}\, T_1 v_z)\,. \tag{4.6}$$

Для второго слагаемого в правой части (4.6) верна оценка

$$\|D_y^\alpha(y_i|y|^{-1}\, T_1 v_z)\|_{p,\Delta} \leqq c \sum_{\varkappa \leqq \alpha} \|D_y^\varkappa T_1 v_z\|_{p,\Delta}\, |y|^{|\varkappa| - |\alpha|}\,, \tag{4.7}$$

и поскольку ядро K_1 имеет нулевые моменты порядков $0, \ldots, l - 2$, то по индукционному предположению (примененному к оператору T_1 и функции v_z) имеем:

$$\|(D_y^\varkappa T_1 v_z)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq c|y|^{l-1-|\varkappa|}\, \|(\nabla_{l-1} v_z)(y, \cdot)\|_{p,\Delta_1}\,, \quad \varkappa \leqq \alpha\,.$$

К первому слагаемому в правой части (4.6) также применимо индукционное предположение:

$$\|(D_y^\alpha T v_{y_i})(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq c|y|^{l-1-|\alpha|}\, \|(\nabla_{l-1} v_{y_i})(y, \cdot)\|_{p,\Delta_1}\,.$$

Из двух последних оценок и (4.6)–(4.7) следует (4.3).

Установим (4.4) при $k = l - 1$, $n = 2$. Пусть $y > 0$. Используя (4.6), получаем равенство $D_y^{l-1} Tv = D_y^{l-2} Tv_y + D_y^{l-2} T_1 v_z$. Если $y < 0$, то в правой части знак „+“ заменяется на „−“. Из индукционного предположения относительно (4.4) (примененного к производным v_y и v_z) выводим, что $\lim_{y\to 0} (D_y^{l-1} Tv)(y, z) = 0$ при $z \in \Delta$. Лемма доказана.

Замечание 4.1. Можно считать, что в оценке (4.3) константа c не зависит от p. При $\gamma = 0$ или $l = 1$ это следует из неравенства Минковского, а в общем случае выводится по индукции при помощи (4.5)–(4.7).

Лемма 4.2. *Пусть выполнено условие* (4.2) *при* $\alpha = 1, \ldots, l - 1$. *Тогда для любой функции* $v \in W_p^l(G_1)$ *функция* Tv *принадлежит* $W_p^l(G)$, *причем*

$$\|\nabla_l Tv\|_{p,G} \leqq c\|\nabla_l v\|_{p,G_1}\,, \quad l \geqq 0\,. \tag{4.8}$$

Доказательство. Если $l = 0$, то (4.8) легко следует из неравенства Минковского. При $l \geqq 1$ и $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$ установим (4.8) индукцией по l.

Пусть $l = 1$. Мы имеем $(Tv)_z = T(v_z)$ и $(Tv)_{y_i} = T(v_{y_i}) + y_i|y|^{-1}\, T_1(v_z)$, $i = 1, \ldots, n - 1$ (см. формулу (4.5)). Таким образом, если $n \geqq 3$, то $Tv \in W_p^1(G)$, и (4.8) при $l = 1$ вытекает из неравенства Минковского. Если $n = 2$, то нужно еще проверить абсолютную непрерывность функции $(Tv)(\cdot, z)$ на промежутке $(-r, r)$ при $z \in \Delta$. Последнее требование выполняется, так как $\lim\limits_{y\to+0}(Tv)(y, z) = \lim\limits_{y\to-0}(Tv)(y, z) = v(0, z)$, $z \in \Delta$, а функция $(Tv)(\cdot, z)$ является гладкой на каждом из промежутков $(-r, 0)$ и $(0, r)$.

Пусть $l \geqq 2$ и пусть включение $Tv \in W_p^k(G)$ и неравенство (4.8) с заменой l на k справедливы для всех порядков $k \leqq l-1$ при условии $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^k(G_1)$. Получим (4.8). Если $0 \leqq \beta \leqq l$, $|\gamma| = l - |\beta|$, то

$$D_y^\gamma D_z^\beta Tv = D_y^\gamma(TD_z^\beta v)\,, \tag{4.9}$$

где $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$, $y \neq 0$. При $\beta = l$, $\gamma = 0$ имеем $\|D_z^\beta Tv\|_{p,G} = \|TD_z^\beta v\|_{p,G} \leqq c\|\nabla_l v\|_{p,G_1}$. Пусть теперь $0 < |\gamma| < l$. Тогда в силу (4.9) и индукционного предположения, примененного к функции $D_z^\beta v$, находим:

$$\|D_y^\gamma D_z^\beta Tv\|_{p,G} \leqq c\|\nabla_{|\gamma|}(D_z^\beta v)\|_{p,G_1} \leqq c\|\nabla_l v\|_{p,G_1}\,.$$

Если $|\gamma| = l$, $\beta = 0$, то $D_y^\gamma = D_y^\alpha\,\partial/\partial y_i$ при некотором α, $|\alpha| = l-1$ и $i = 1, \ldots, n-1$. Применяя формулы (4.5)–(4.7), получаем, что

$$\|(D_y^\gamma Tv)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq \|(D_y^\alpha Tv_{y_i})(y, \cdot)\|_{p,\Delta} + \\ + c\sum_{\varkappa \leqq \alpha} |y|^{|\varkappa|-|\alpha|}\,\|(D_y^\varkappa T_1 v_z)(y, \cdot)\|_{p,\Delta}\,.$$

Применяя далее лемму 4.1 к оператору T_1 и функции v_z, оценим последнюю сумму выражением $c\|(\nabla_{l-1}v_z)(y, \cdot)\|_{p,\Delta_1}$. Интегрируя по переменной y, находим:

$$\|D_y^\gamma Tv\|_{p,G} \leqq \|D_y^\alpha Tv_{y_i}\|_{p,G} + c\|\nabla_l v\|_{p,G_1}\,.$$

По индукционному предположению первое слагаемое в правой части последнего неравенства не превосходит $c\|\nabla_{l-1}v_{y_i}\|_{p,G_1}$. Отсюда следует (4.8).

В случае $n = 2$ нужно проверить, что

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial^{l-1}}{\partial y^{l-1}}(Tv)(y, z) = \lim_{y\to-0}\frac{\partial^{l-1}}{\partial y^{l-1}}(Tv)(y, z)\,, \quad z \in \Delta\,. \tag{4.10}$$

В самом деле, пусть $y > 0$. Тогда в силу (4.5), (4.6)

$$\frac{\partial^{l-1}}{\partial y^{l-1}}Tv = \frac{\partial^{l-2}}{\partial y^{l-2}}Tv_y + \frac{\partial^{l-2}}{\partial y^{l-2}}T_1 v_z\,. \tag{4.11}$$

Если $y < 0$, то в правой части (4.11) знак „+“ заменяется на „−“. По лемме 4.1 (примененной к оператору T_1 и функции v_z) имеем $\partial^{l-2}(T_1 v_z)/\partial y^{l-2} \to_{y\to0} 0$. Таким образом, левая часть в (4.10) равна $\lim\limits_{y\to+0}\partial^{l-2}(Tv_y)/\partial y^{l-2}$, в то время, как правая часть равна $\lim\limits_{y\to-0}\partial^{l-2}(Tv_y)/\partial y^{l-2}$. Два последних предела совпадают по индукционному предположению, примененному к v_y. Итак, для $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$ имеем включение $Tv \in W_p^l(G)$ и оценку (4.8). В общем случае $v \in$

$\in W_p^l(G_1)$, $p \in [1, \infty)$, заметим, что множество $C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$ плотно в $W_p^l(G_1)$ и оператор $T\colon L_p(G_1) \to L_p(G)$ ограничен. Отсюда выводится включение $Tv \in W_p^l(G)$ и оценка (4.8). Отметим еще, что константу c в (4.8) можно выбрать не зависящей от p. Это следует из замечания 4.1 и приведенного выше доказательства неравенства (4.8) для гладкой функции v.

Рассмотрим случай $p = \infty$. Пусть $v \in W_\infty^l(G_1)$. Если Δ — конечный промежуток на числовой оси, то $v \in W_p^l(G_1)$ и $Tv \in W_p^l(G)$, где $p \in [1, \infty)$, и при всех $p \in [1, \infty)$ верна оценка (4.8) с константой $c = c(l, n, K)$. Переходя в этой оценке к пределу при $p \to \infty$, получаем (4.8) с $p = \infty$. Если Δ — бесконечный промежуток, то существует последовательность конечных открытыц промежутков $\{\Delta_j\}_{j \geqq 1}$ такая, что $\Delta = \bigcup_{j=1}^\infty \Delta j$. По только что доказанному для каждого $j \geqq 1$ верна оценка

$$\|\nabla_l Tv\|_{\infty, G^{(j)}} \leqq c(l, n, K)\, \|\nabla_l v\|_{\infty, G_1},$$

где $G^{(j)} = \{(y, z) \in R^n\colon y \in B_r \subset R^{n-1},\ z \in \Delta_j\}$. Из последнего неравенства вытекает (4.8) при $p = \infty$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть* $\int_0^1 K(t)\, \mathrm{d}t = 1$ *и выполнено условие* (4.2) *при* $\alpha = 1, \ldots, l-1$. *Тогда для любой функции* $v \in W_p^l(G_1)$ *верна оценка*

$$\|\nabla_s(Tv - v)\|_{p,G} \leqq cr^{l-s}\|\nabla_l v\|_{p,G_1}, \quad 0 \leqq s \leqq l. \tag{4.12}$$

Доказательство. Пусть $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$. Докажем сначала оценку (4.12) при $s = 0$. Имеем

$$(Tv)(y, z) - v(y, z) = \int_0^1 K(t)\,(v(y, z + |y|\, t) - v(y, z))\, \mathrm{d}t.$$

Пользуясь разложением Тейлора с остатком в интегральной форме и замечая, что ядро K имеет нулевые моменты порядков $1, \ldots, l-1$, оценим сверху модуль последнего интеграла выражением

$$|y|^l \int_0^1 t^l |K(t)|\, \mathrm{d}t \int_0^1 |D_z^l v(y, z + |y|\, \tau t)|\, \mathrm{d}\tau.$$

С помощью неравенства Минковского выводим отсюда, что

$$\|Tv - v\|_{p,G} \leqq \|K\|_{1,R^1}\, r^l \|\nabla_l v\|_{p,G_1}. \tag{4.13}$$

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по l. Пусть $l = 1$. При $s = 0$ оценка (4.12) уже доказана, а при $s = 1$ она следует из предыдущей леммы. Этим случай $l = 1$ исчерпывается.

Пусть $l \geqq 2$ и пусть утверждение леммы справедливо для всех порядков, не превосходящих $l - 1$. Докажем неравенство (4.12). Если $0 < \beta \leqq l$, $|\gamma| + \beta = s \leqq l$, то $D_y^\gamma D_z^\beta(Tv - v) = D_y^\gamma(TD_z^\beta v - D_z^\beta v)$ и по индукционному предположению, примененному к производной $D_z^\beta v$ и оператору T имеем

$$\|D_y^\gamma D_z^\beta(Tv - v)\|_{p,G} \leqq cr^{l-\beta-|\gamma|}\|\nabla_{|\gamma|}(D_z^\beta v)\|_{p,G} \leqq cr^{l-s}\|\nabla_l v\|_{p,G}.$$

Рассмотрим теперь случай $\beta = 0$, $|\gamma| = s > 0$. Положим $D_y^\gamma = D_y^\alpha \partial/\partial y_i$, где α — $(n-1)$-мерный мультииндекс длины $s-1$ и $1 \leqq i \leqq n-1$. Используя формулу (4.6), получим, что

$$(4.14)\qquad \left\|D_y^\gamma(Tv - v)\right\|_{p,G} \leqq$$
$$\leqq \left\|D_y^\alpha(Tv_{y_i} - v_{y_i})\right\|_{p,G} + \left\|D_y^\alpha(y_i|y|^{-1}\, T_1 v_z)\right\|_{p,G},$$

где T_1 оператор вида (4.1) с ядром $K_1(t) = t\,K(t)$. Применим неравенство (4.7), а затем лемму 4.1 к оператору T_1 и функции v_z. В результате оценим сверху второе слагаемое в правой части (4.14) выражением $c(l, n, K)\, r^{l-s}\|\nabla_l v\|_{p,G_1}$. Для оценки первого слагаемого в правой части (4.14) воспользуемся индукционным предположением относительно оператора T и функции v_{y_i}. Получим тогда, что

$$\left\|D_y^\alpha(Tv_{y_i} - v_{y_i})\right\|_{p,G} \leqq c r^{l-1-|\alpha|}\|\nabla_{l-1}(v_{y_i})\|_{p,G}\,.$$

Итак оценка (4.12) доказана в предположении, что $v \in C^\infty(G_1) \cap W_p^l(G_1)$. Отметим, что константу c в (4.12) можно считать не зависящей от p. При $s = 0$ и $s = l$ это следует из неравенства (4.13) и леммы 4.2 соответственно, а при $0 < s < l$ — из замечания 4.1 и приведенного выше доказательства оценки (4.12). Справедливость неравенства (4.12) для любой функции $v \in W_p^l(G_1)$ при $1 \leqq p < \infty$ вытекает из плотности в $W_p^l(G_1)$ множества гладких функций и ограниченности оператора T: $W_p^l(G_1) \to W_p^l(G)$.

Пусть $v \in W_\infty^l(G_1)$ и G — ограниченная область. Тогда верна оценка (4.12) при любом $p < \infty$ с константной $c = c(l, n, K)$. Переходя в этой оценке к пределу при $p \to \infty$, получим (4.12) с $p = \infty$. Если область G не ограничена, то можно применить представление $G = \bigcup_j G^{(j)}$, где $G^{(j)} = \{(y, z)\colon y \in B_r \subset R^{n-1}, z \in \Delta_j\}$ и Δ_j — конечный промежуток на числовой оси, а затем воспользоваться уже доказанной оценкой

$$\left\|\nabla_s(Tv - v)\right\|_{\infty,G} \leqq c(l, n, K)\|\nabla_l v\|_{\infty,G_1}\,.$$

Отсюда вытекает (4.12) при $p = \infty$. Доказательство леммы закончено.

В следующих двух леммах рассматривается случай, когда функция v не зависит от y. Можно считать ее заданной на промежутке $\Delta_1 \subset R^1$. По-прежнему предполагаем, что $y \in B_r \subset R^{n-1}$, $r \leqq 1$.

Лемма 4.4. *Пусть $v \in L_p(\Delta_1)$. Тогда верна оценка*

$$(4.15)\qquad \|(D_y^\gamma Tv)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq c|y|^{-|\gamma|}\,\|v\|_{p,\Delta_1}, \quad y \neq 0\,,$$

где γ — любой мультииндекс размерности $n-1$ и $c = c(l, p, n, K, \gamma)$.

Доказательство. Если $\gamma = 0$, то (4.15) следует из неравенства Минковского. Пусть $|\gamma| = 1$. Имеем

$$(4.16)\qquad \frac{\partial}{\partial y_i} Tv = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(|y|^{-1}\int_0^1 K((t-z)/|y|)\, v(t)\,\mathrm{d}t\right) =$$
$$= y_i|y|^{-2}\,(Tv + T'v)\,,\quad 1 \leqq i \leqq n-1\,,$$

где T' — оператор вида (4.1) с ядром $t\,K'(t)$. Из (4.16) при помощи неравенства Минковского выводим (4.15) в случае $|\gamma| = 1$.

Пусть $k \geqq 2$ и пусть оценка (4.15) верна для всех производных D_y^γ порядка $|\gamma| \leqq k-1$. Проверим (4.15) для $|\gamma| = k$. Так как $D_y^\gamma = D_y^\alpha\, \partial/\partial y_i$ при некотором α, $|\alpha| = k-1$ и $i = 1, \ldots, n-1$, то

$$\|(D_y^\gamma Tv)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq$$
$$\leqq c \sum_{\varkappa \leqq \alpha} |y|^{|\varkappa|-|\alpha|-1} \left[\|(D_y^\varkappa Tv)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} + \|(D_y^\varkappa T'v)(y, \cdot)\|_{p,\Delta}\right].$$

Применяя индукционное предположение к каждому слагаемому в квадратных скобках, получаем (4.15). Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть* $v \in W_p^l(\Delta_1)$, $l \geqq 0$, *и выполнено условие* (4.2) *при* $\alpha = 1, \ldots, l-1$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|(D_y^\gamma Tv)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq c|y|^{l-|\gamma|}\, \|v^{(l)}\|_{p,\Delta_1}, \tag{4.17}$$

где $y \in B_r \setminus \{0\}$, γ — *любой мультииндекс размерности* $n-1$, *удовлетворяющий условию* $|\gamma| \geqq l$ *и* $c = c(l, p, n, K, \gamma)$.

Доказательство. Установим (4.17) при $|\gamma| \geqq l$ индукцией по l. Если $l = 0$, то (4.17) следует из леммы 4.4. Пусть $l \geqq 1$ и верно неравенство

$$\|(D_y^\alpha Tv)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq c|y|^{l-1-|\alpha|}\, \|v^{(l-1)}\|_{p,\Delta_1},$$

где $|\alpha| \geqq l-1$, $v \in W_p^{l-1}(\Delta_1)$, а ядро оператора T имеет нулевые моменты порядков $1, \ldots, l-2$. Пусть $|\gamma| \geqq l$. Тогда $D_y^\gamma = D_y^\alpha\, \partial/\partial y_i$ при некотором α, $|\alpha| \geqq l-1$ и $i = 1, \ldots, n-1$. Имеем

$$|D_y^\gamma Tv| = |D_y^\alpha(y_i |y|^{-1}\, T_1 v')| \leqq c \sum_{\varkappa \leqq \alpha} |y|^{|\varkappa|-|\alpha|}\, |D_y^\varkappa T_1 v'|,$$

где T_1 — оператор вида (4.1) с ядром $K_1(t) = t\,K(t)$. Отсюда получаем

$$\|(D_y^\gamma Tv)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq c(S_1 + S_2), \tag{4.18}$$

где

$$S_1 = \sum_{\varkappa \leqq \alpha, |\varkappa| \leqq l-1} |y|^{|\varkappa|-|\alpha|}\, \|D_y^\varkappa T_1 v'\|_{p,\Delta},$$

а S_2 — сумма таких же слагаемых при $\varkappa \leqq \alpha$, $|\varkappa| \geqq l$. Так как ядро K имеет нулевые моменты порядков $0, \ldots, l-2$, то для каждого слагаемого в первой сумме имеем

$$\|(D_y^\varkappa T_1 v')(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq c|y|^{l-1-|\varkappa|}\, \|\nabla_{l-1} v'\|_{p,\Delta_1}. \tag{4.19}$$

Эта оценка выводится так же, как оценка (4.3) в лемме 4.1. Заметим, что неравенство (4.19) справедливо и для каждого слагаемого второй суммы в силу индукционного предположения. Из (4.18) и (4.19) следует (4.17) при $|\gamma| \geqq l$. Лемма доказана.

5. ПРОДОЛЖЕНИЕ ИЗ ТОНКОГО ЦИЛИНДРА В БОЛЕЕ ШИРОКИЙ

В дальнейшем нам понадобиться следующий известный результат (см. например, [9], § 1.1).

Лемма 5.1. (Обобщенное неравенство Пуанкаре). *Пусть Ω — область в R^n с компактным замыканием и границей класса $C^{0,1}$ и пусть ψ — функция из $C_0^\infty(\Omega)$, удовлетворяющая условию $\int_\Omega \psi \, \mathrm{d}x = 1$. Положим $\Omega_\varepsilon = \{x \in R^n : x/\varepsilon \in \Omega\}$, $\varepsilon > 0$. Тогда для любой функции $u \in W_p^l(\Omega_\varepsilon)$ и полинома P_ε степени $l - 1$ в R^n, заданного формулой*

$$P_\varepsilon(x) = \sum_{|\alpha| \leqq l-1} \varepsilon^{-n} (\alpha!)^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} D^\alpha u(\xi) (x - \xi)^\alpha \psi(\xi/\varepsilon) \, \mathrm{d}\xi , \tag{5.1}$$

верна оценка

$$\|\nabla_k(u - P_\varepsilon)\|_{p,\Omega_\varepsilon} \leqq c\varepsilon^{l-k} \|\nabla_l u\|_{p,\Omega_\varepsilon} ,$$

где $0 \leqq k \leqq l$ и $c = c(l, p, n, \psi, \Omega)$.

Перейдем к построению оператора продолжения из тонкого цилиндра. Пусть $\Delta = (a, b) \subset R^1$, $0 < \varepsilon \leqq \varrho \leqq 1$, $\Delta_1 = (a, b + \varrho)$. Положим

$$G = \{(y, z) \in R^n : \ y \in B_\varrho \subset R^{n-1}, \ z \in \Delta\} ,$$

$$g = \{(y, z) \in R^n : y \in B_\varepsilon \subset R^{n-1}, \ z \in \Delta_1\} .$$

Если $u \in W_p^l(g)$, $l \geqq 1$, то при почти всех $z \in \Delta_1$ справедливо включение $u(\cdot, z) \in W_p^l(B_\varepsilon)$, $B_\varepsilon \subset R^{n-1}$. Пусть $\psi \in C_0^\infty(B_1)$, $B_1 \subset R^{n-1}$, $\int_{B_1} \psi(y) \, \mathrm{d}y = 1$. Для каждой функции $u \in W_p^l(g)$ в соответствии с (5.1) положим

$$P_\varepsilon(y, z) = \sum_{|\alpha| \leqq l-1} \varepsilon^{1-n} (\alpha!)^{-1} \int_{B_\varepsilon} D_\eta^\alpha u(\eta, z) (y - \eta)^\alpha \psi(\eta/\varepsilon) \, \mathrm{d}\eta . \tag{5.2}$$

При почти всех $z \in \Delta_1$ функция $P_\varepsilon(\cdot, z)$ является полиномом степени $l - 1$ в R^{n-1}, коэффициенты которого являются линейными функционалами от $u(\cdot, z)$. По лемме 5.1 функция $u(\cdot, z)$ и полином $P_\varepsilon(\cdot, z)$ удовлетвояют обобшенному неравенству Пуанкаре в шаре $B_\varepsilon \subset R^{n-1}$.

Пусть $K \in C_0^\infty(0, 1)$ и выполнены условия

$$\int_0^1 K(t) \, \mathrm{d}t = 1 , \quad \int_0^1 K(t) \, t^\beta \, \mathrm{d}t = 0 , \quad \beta = 1, \ldots, l - 1 . \tag{5.3}$$

Обозначим через T оператор вида (4.1) с ядром K. Рассмотрим еще оператор продолжения E_ε из $(n - 1)$-мерного шара B_ε на R^{n-1}, построенный в лемме 2.1.

Лемма 5.2. *Оператор $\mathscr{E}$, заданный формулой*

$$(\mathscr{E}u)(y, z) = (TP_\varepsilon)(y, z) + (E_\varepsilon(u(\cdot, z) - (TP_\varepsilon)(\cdot, z)))(y)$$

является непрерывным линейным оператором из $W_p^l(g)$ в $W_p^l(G)$, $1 \leqq p \leqq \infty$.

Справедливы оценки

$$\|TP_\varepsilon\|_{p,l,G} \leqq c(\varrho\varepsilon^{-1})^{(n-1)/p}\,\|u\|_{p,l,g}\,, \tag{5.4}$$

$$\|\nabla_k E_\varepsilon(u - TP_\varepsilon)\|_{p,G} \leqq c\varepsilon^{l-k}\|u\|_{p,l,g}\,, \quad 0 \leqq k \leqq l\,, \tag{5.5}$$

в которых $c = c(l, p, n)$.

Доказательство. Положим $G^* = \{(y, z) \in R^n,\ y \in B_\varepsilon \subset R^{n-1},\ z \in \Delta\}$ и рассмотрим оператор $W_p^l(G^*) \ni v \to \mathscr{E}_\varepsilon v$, где $(\mathscr{E}_\varepsilon v)(y, z) = (E_\varepsilon v(\cdot, z))(y)$. Покажем, что $\mathscr{E}_\varepsilon v \in W_p^l(G)$ и установим соотношение

$$\frac{\partial^l}{\partial z^l}\,\mathscr{E}_\varepsilon v = \mathscr{E}_\varepsilon\left(\frac{\partial^l v}{\partial z^l}\right), \quad v \in W_p^l(G^*)\,. \tag{5.6}$$

Докажем предварительно следующее утверждение: если $z_1, z_2 \in \Delta$, $z_1 < z_2$, то для $v \in L_1(B_\varepsilon \times (z_1, z_2))$ почти всюду на R^{n-1} имеет место равенство

$$\int_{z_1}^{z_2} (\mathscr{E}_\varepsilon v)(y, z)\,\mathrm{d}z = E_\varepsilon \int_{z_1}^{z_2} v(y, z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{5.7}$$

Если v является конечной линейной комбинацией функций вида $f(y)\,h(z)$, где $f \in L_1(B_\varepsilon)$, $h \in L_1(z_1, z_2)$, то равенство (5.7) очевидно. Множество указанных функций плотно в $L_1(B_\varepsilon \times (z_1, z_2))$ и в общем случае (5.7) устанавливается предельным переходом с учетом непрерывности операторов

$$L_1(B_\varepsilon \times (z_1, z_2)) \ni v \to \int_{z_1}^{z_2} v(\cdot, z)\,\mathrm{d}z \in L_1(B_\varepsilon)\,,$$

$$L_1(R^{n-1} \times (z_1, z_2)) \ni v \to \int_{z_1}^{z_2} v(\cdot, z)\,\mathrm{d}z \in L_1(R^{n-1})\,,$$

$$E_\varepsilon\colon L_1(B_\varepsilon) \to L_1(R^{n-1})\,, \quad \mathscr{E}_\varepsilon\colon L_1(B_\varepsilon \times (z_1, z_2)) \to L_1(R^{n-1} \times (z_1, z_2))\,.$$

Перейдем к доказательству соотношения (5.6). Пусть $v \in W_p^1(G^*)$. Положим $w = \mathscr{E}_\varepsilon v$. В силу (5.7) получаем, что $w(y, z_2) - w(y, z_1) = \int_{z_1}^{z_2} (\mathscr{E}_\varepsilon v_z)(y, z)\,\mathrm{d}z$ при $z_1, z_2 \in \Delta$ п.в. $y \in R^{n-1}$. Таким образом, функция w абсолютно непрерывна на почти всех прямых области $R^{n-1} \times \Delta$, параллельных координатным осям (абсолютная непрерывность по переменным $y_1, \ldots, y_{n-1}$ следует из включения $w(\cdot, z) \in W_p^1(R^{n-1})$ п.в. $z \in \Delta$). Кроме того,

$$w_z = \mathscr{E}_\varepsilon v_z\,, \quad w_z, w_{y_i} \in L_p(R^{n-1} \times \Delta)\,, \quad i = 1, \ldots, n-1\,.$$

Отсюда вытекают включение $w \in W_p^1(R^{n-1} \times \Delta)$ (см., например, [9], § 1.1) и равенство (5.6) при $l = 1$. Принадлежность функции $\mathscr{E}_\varepsilon v$ пространству $W_p^l(R^{n-1} \times \Delta)$ и равенство (5.6) при $l \geqq 2$ легко доказываются по индукции.

Получим оценку для производной $D_y^\gamma D_z^\beta \mathscr{E}_\varepsilon v$ в случае $v \in W_p^l(G^*)$ и $|\gamma| + \beta \leqq l$. Имеем

$$\|D_y^\gamma D_z^\beta(\mathscr{E}_\varepsilon v)\|_{p,G} = \|D_y^\gamma(\mathscr{E}_\varepsilon D_z^\beta v)\|_{p,G} \leqq$$
$$\leqq \big\|\,\|D^\gamma(E_\varepsilon(D_z^\beta v)(\cdot, z)\|_{p,R^{n-1}}\big\|_{p,\Delta}\,.$$

По лемме 2.1 внутренняя норма в правой части последнего неравенства не превосходит

$$c\varepsilon^{-|\gamma|}\|(D_z^\beta v)(\cdot, z)\|_{p,B_\varepsilon} + c\sum_{|\alpha|=|\gamma|}\|(D_y^\alpha D_z^\beta v)(\cdot, z)\|_{p,B_\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что

$$\|D_y^\gamma D_z^\beta \mathscr{E}_\varepsilon v\|_{p,G} \leqq c\varepsilon^{-|\gamma|}\|D_z^\beta v\|_{p,G^*} + c\sum_{|\alpha|=|\gamma|}\|D_y^\alpha D_z^\beta v\|_{p,G^*}. \tag{5.8}$$

Обратимся к доказательству оценки (5.5). Пусть $0 \leqq \beta \leqq l$, γ — мультииндекс размерности $n-1$, $|\gamma| + \beta = k \leqq l$. Ясно, что

$$\begin{aligned}\|D_y^\gamma D_z^\beta \mathscr{E}_\varepsilon(u - TP_\varepsilon)\|_{p,G} &\leqq \\ \leqq \|D_y^\gamma \mathscr{E}_\varepsilon(D_z^\beta(u - Tu))\|_{p,G} &+ \|D_y^\gamma \mathscr{E}_\varepsilon D_z^\beta T(u - P_\varepsilon)\|_{p,G}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Принимая во внимание (5.8) и лемму 4.3 (при $r = \varepsilon$), получим:

$$\begin{aligned}&\|D_y^\gamma \mathscr{E}_\varepsilon(D_z^\beta(u - Tu))\|_{p,G} \leqq \\ &\leqq c\varepsilon^{-|\gamma|}\|D_z^\beta(u - Tu)\|_{p,G^*} + c\|\nabla_k(u - Tu)\|_{p,G^*} \leqq c\varepsilon^{l-k}\|\nabla_l u\|_{p,g}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Для второго слагаемого в правой части (5.9) с помощью (5.8) находим:

$$\begin{aligned}&\|D_y^\gamma \mathscr{E}_\varepsilon D_z^\beta T(u - P_\varepsilon)\|_{p,G} \leqq \\ &\leqq c\varepsilon^{-|\gamma|}\|D_z^\beta T(u - P_\varepsilon)\|_{p,G^*} + c\|\nabla_k T(u - P_\varepsilon)\|_{p,G^*}.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Рассмотрим случай $k < l$. По лемме 4.2 имеем $\|\nabla_k T(u - P_\varepsilon)\|_{p,G^*} \leqq \leqq c\|\nabla_k(u - P_\varepsilon)\|_{p,g}$. Докажем оценку

$$\|D_y^\nu D_z^s(u - P_\varepsilon)\|_{p,g} \leqq c\varepsilon^{l-s-|\nu|}\|\nabla_l u\|_{p,g}, \quad s + |\nu| < l, \tag{5.12}$$

с помощью которой правую часть в (5.11) мажорируем выражением $c\varepsilon^{l-k}\|\nabla_l u\|_{p,g}$. Сумму в правой части (5.2) разобьем на две: в первую сумму включим слагаемые удовлетворяющие условию $|\alpha| \leqq l - 1 - s$ и обозначим ее через Q_ε, а сумму оставшихся слагаемых обозначим S_ε. Заметим, что по лемме 5.1 при почти всех $z \in \Delta_1$ верна оценка

$$\begin{aligned}&\|D^\nu((D_z^s u)(\cdot, z) - (D_z^s Q_\varepsilon)(\cdot, z))\|_{p,B_\varepsilon} \leqq \\ &\leqq c\varepsilon^{l-s-|\nu|}\sum_{|\varkappa|=l-s}\|D^\varkappa(D_z^s u)(\cdot, z)\|_{p,B_\varepsilon},\end{aligned}$$

интегрируя которую по переменной z, придем к неравенству

$$\|D_y^\nu D_z^s(u - Q_\varepsilon)\|_{p,g} \leqq c\varepsilon^{l-s-|\nu|}\|\nabla_l u\|_{p,g}. \tag{5.13}$$

Для доказательства (5.12) осталось проверить, что

$$\|D_y^\nu D_z^s S_\varepsilon\|_{p,g} \leqq c\varepsilon^{l-s-|\nu|}\|\nabla_l u\|_{p,g}. \tag{5.14}$$

Если $s = 0$, то $S_\varepsilon = 0$, и оценка (5.14) верна. Пусть $0 < s < l$. Имеем

$$S_\varepsilon(y, z) = \sum_{l-s\leqq|\alpha|\leqq l-1}\varepsilon^{1-n}(\alpha!)^{-1}\int_{B_\varepsilon} D_\eta^\alpha u(\eta, z)(y - \eta)^\alpha \psi(\eta/\varepsilon)\,d\eta.$$

Зафиксируем $(n-1)$-мерный мультииндекс α, $l-s \leqq |\alpha| \leqq l-1$ и заметим, что $(y-\eta)^\alpha = \sum_{\delta \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\delta} y^\delta (-\eta)^{\alpha-\delta}$. Пусть δ_1 – такой мультииндекс размерности $n-1$, что $\delta_1 \leqq \alpha$, $|\delta_1| = l-s$. Тогда

$$\varepsilon^{1-n} \int_{B_\varepsilon} D^\alpha_\eta u(\eta, z)\, \eta^{\alpha-\delta} \psi(\eta/\varepsilon)\, \mathrm{d}\eta =$$

$$= (-1)^{|\alpha-\delta_1|}\, \varepsilon^{|\delta_1|-|\delta|-n+1} \int_{B_\varepsilon} D^{\delta_1}_\eta u(\eta, z)\, f(\eta/\varepsilon)\, \mathrm{d}\eta\,,$$

где $f(\eta) = D^{\alpha-\delta_1}(\eta^{\alpha-\delta}\, \psi(\eta))$. Введем обозначение

$$Fv = \varepsilon^{1-n} \int_{B_\varepsilon} v(\eta)\, f(\eta/\varepsilon)\, \mathrm{d}\eta\,.$$

Имеем:

$$S_\varepsilon(y, z) = \sum_{l-s \leqq |\alpha| \leqq l-1} \sum_{\delta \leqq \alpha} (\alpha!)^{-1} \binom{\alpha}{\delta} (-\varepsilon)^{l-s-|\delta|}\, y^\delta F(D^{\delta_1} u)(\cdot, z)\,.$$

Таким образом,

$$\|D^\nu_y D^s_z S_\varepsilon\|_{p,g} \leqq$$

$$\leqq c\varepsilon^{l-s} \sum_{l-s \leqq |\alpha| \leqq l-1} \sum_{\nu \leqq \delta \leqq \alpha} \|D^\nu_y (y/\varepsilon)^\delta\, D^s_z(F(D^{\delta_1}u)(\cdot, z))\|_{p,g}\,.$$

Так как $|D^\nu_y (y/\varepsilon)^\delta| \leqq c\varepsilon^{-|\nu|}$ при $y \in B_\varepsilon$ и $D^s_z F(D^{\delta_1}u)(\cdot, z) = F(D^{\delta_1} D^s_z u)(\cdot, z)$, то каждое слагаемое в последней сумме не превосходит $c\varepsilon^{-|\nu|+(n-1)/p} \times$ $\times \|F(D^{\delta_1} D^s_z u)(\cdot, z)\|_{p,\Delta_1}$. Замечая, что $|Fv| \leqq c\varepsilon^{(1-n)/p} \|v\|_{p,B_\varepsilon}$, приходим к оценке (5.14). Из (5.14) и (5.13) вытекает (5.12).

Итак доказано, что

$$\|D^\gamma_y \mathscr{E}_\varepsilon D^\beta_z T(u - P_\varepsilon)\|_{p,G} \leqq c\varepsilon^{l-k} \|u\|_{p,l,g}\,, \tag{5.15}$$

если $|\gamma| + \beta = k < l$. Осталось разобрать случай $k = l$. Оценим оба слагаемых в правой части (5.11) при $k = l$. Если $0 \leqq \beta < l$, то первое слагаемое с помощью (5.12) мажорируется выражением $c\|\nabla_l u\|_{p,g}$. Таким образом, для доказательства (5.15) при $k = l$ достаточно проверить, что $\|\nabla_l T(u - P_\varepsilon)\|_{p,G^*} \leqq c\|u\|_{p,l,g}$. Но по лемме 4.2 верна оценка $\|\nabla_l Tu\|_{p,G^*} \leqq c\|\nabla_l u\|_{p,g}$, так что дело сводится к проверке неравенства $\|\nabla_l TP_\varepsilon\|_{p,G^*} \leqq c\|u\|_{p,l,g}$. Заметим, что последняя оценка является частным случаем (5.4) при $\varrho = \varepsilon$. Отметим еще, что оценка (5.5) следует из (5.9), (5.10) и (5.15). Итак для доказательства леммы осталось установить неравенство (5.4).

Из формулы (5.2) получаем:

$$P_\varepsilon(y, z) = \sum_{|\alpha| \leqq l-1} \varepsilon^{1-n} (\alpha!)^{-1} \sum_{\delta \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\delta} (-1)^{|\alpha-\delta|}\, y^\delta \int_{B_\varepsilon} D^\alpha_\eta u(\eta, z)\, \eta^{\alpha-\delta} \psi\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}\eta\,.$$

Здесь α, δ – мультииндексы размерности $n-1$. Заметим, что при $\delta \leqq \alpha$

$$(-1)^{|\alpha-\delta|}\, \varepsilon^{1-n} \int_{B_\varepsilon} D^\alpha_\eta u(\eta, z)\, \eta^{\alpha-\delta} \psi(\eta/\varepsilon)\, \mathrm{d}\eta = \varepsilon^{1-n} \int_{B_\varepsilon} D^\alpha_\eta u(\eta, z)\, \varphi(\eta/\varepsilon)\, \mathrm{d}\eta\,,$$

где $\varphi(\eta) = D^{\alpha-\delta}(\psi(\eta)\,\eta^{\alpha-\delta})$, $\eta \in B_1 \subset R^{n-1}$. Введем обозначение $\Phi v = \varepsilon^{1-n} \int_{B_\varepsilon} v(\eta)\,\varphi(\eta/\varepsilon)\,\mathrm{d}\eta$. Тогда

$$(5.16)\qquad \|D_y^\gamma D_z^\beta T P_\varepsilon\|_{p,G} \leqq$$
$$\leqq c \sum_{|\alpha| \leqq l-1} \sum_{\delta \leqq \alpha} \|D_y^\gamma y^\delta D_z^\beta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z))\|_{p,G}$$

где $|\gamma| + \beta = k \leqq l$. Оценим в последней сумме каждое слагаемое. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $\beta + |\delta| \leqq k$. Тогда $D_z^\beta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z)) = T\Phi(D^\delta D_z^\beta u(\cdot, z))$. Полагая $w(z) = \Phi(D^\delta D_z^\beta u(\cdot, z))$, получаем

$$\|D_y^\gamma(y^\delta(Tw)(y, \cdot))\|_{p,\Delta} \leqq$$
$$\leqq c \sum_{\varkappa \leqq \gamma, \varkappa \leqq \delta} |y|^{|\delta| - |\varkappa|} \|D_y^{\gamma-\varkappa}(Tw)(y, \cdot)\|_{p,\Delta},$$

где $y \in B_\varrho \subset R^{n-1}$, $y \neq 0$. Замечая, что $w \in W_p^{k-|\delta|-\beta}(\Delta_1)$ и пользуясь леммой 4.5, находим:

$$(5.17)\qquad \|D_y^\gamma(y^\delta(Tw)(y, \cdot))\|_{p,\Delta} \leqq c \sum_{\varkappa \leqq \gamma, \varkappa \leqq \delta} \|\nabla_{k-\beta-|\delta|} w\|_{p,\Delta_1} \leqq$$
$$c \sum_{|\nu| = k} \|\Phi(D^\nu u)\|_{p,\Delta_1} \leqq c\varepsilon^{(1-n)/p} \|\nabla_k u\|_{p,g}.$$

Здесь в последней сумме ν означает n-мерный мультииндекс длины k; кроме того, мы применили неравенство $|\Phi v| \leqq c\varepsilon^{(1-n)/p}\|v\|_{p,B_\varepsilon}$ для $v \in L_p(B_\varepsilon)$, $B_\varepsilon \subset R^{n-1}$. Интегрируя (5.17) по шару $B_\varrho \subset R^{n-1}$, приходим к оценке

$$(5.18)\qquad \|D_y^\gamma y^\delta D_z^\beta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z))\|_{p,G} \leqq c(\varrho/\varepsilon)^{(n-1)/p} \|\nabla_k u\|_{p,g}.$$

2) Пусть $|\delta| > k$. Полагая здесь $w(z) = \Phi(D^\delta u(\cdot, z))$, находим, что $D_z^\beta(Tw) = (-|y|)^{-\beta}\, T'w$, где T' – оператор вида (4.1) с ядром $D^\beta K$. Имеем

$$\|D_y^\gamma(y^\delta(D_z^\beta Tw)(y, \cdot))\|_{p,\Delta} \leqq$$
$$\leqq c \sum_{\varkappa \leqq y} |D_y^\varkappa(y^\delta |y|^{-\beta})|\, \|(D_y^{\gamma-\varkappa} T'w)(y, \cdot)\|_{p,\Delta} \leqq$$
$$\leqq c \sum_{\varkappa \leqq \gamma} |y|^{|\delta| - \beta - |\varkappa|}\, \|(D_y^{\gamma-\varkappa} T'w)(y, \cdot)\|_{\varrho,\Delta}, \quad 0 < |y| \leqq \varrho.$$

По лемме 4.4 каждое слагаемое в последней сумме не больше $c|y|^{|\delta|-k}\,\|w\|_{p,\Delta_1}$, что не превосходит $c\|w\|_{p,\Delta_1}$. Используя теперь оценку $\|w\|_{p,\Delta_1} \leqq c\varepsilon^{(1-n)/p}\|D^\delta u\|_{p,g}$ и интегрируя по переменной y, приходим к неравенству

$$\|D_y^\gamma D_z^\beta y^\delta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z))\|_{p,G} \leqq c(\varrho\varepsilon^{-1})^{(n-1)/p} \|\nabla_{|\delta|} u\|_{p,g}.$$

3) Пусть $\beta + |\delta| > k$, $|\delta| \geqq k$. Полагая $\beta' = k - |\delta|$, $w(z) = \Phi(D_z^{\beta'} D^\delta u(\cdot, z))$, находим, что

$$D_z^\beta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z)) = D_z^{\beta-\beta'} Tw = (-|y|)^{\beta'-\beta} T'w$$

где $y \in B_\varrho \subset R^{n-1}$, $y \neq 0$, а T' – оператор вида (4.1) с ядром $K^{(\beta-\beta')}$. Таким образом,

$$\left\| D_y^\gamma(y^\delta D_z^\beta T\Phi(D^\delta u(\cdot, z)))\right\|_{p,\Delta} =$$
$$= \left\| D_y^\gamma(y^\delta |y|^{|\gamma|-|\delta|}(T'w)(y, \cdot))\right\|_{p,\Delta} \leqq$$
$$\leqq c \sum_{\varkappa \leqq \gamma} \left| D_y^\varkappa(y^\delta |y|^{|\gamma|-|\delta|})\right| \left\| (D_y^{\gamma-\varkappa} T'w)(y, \cdot)\right\|_{p,\Delta} \leqq$$
$$\leqq c \sum_{\varkappa \leqq \gamma} |y|^{|\gamma|-|\varkappa|} \left\| (D_y^{\gamma-\varkappa} T'w)(y, \cdot)\right\|_{p,\Delta}.$$

Применяя лемму 4.4, оценим сверху каждое слагаемое в последней сумме выражением $c\|w\|_{p,\Delta_1}$, которое, в свою очередь, не превосходит $c\varepsilon^{(1-n)/p}\|D_z^{\beta'} D_y^\delta u\|_{p,\Delta_1}$. Интегрируя по переменной $y \in B_\varrho$, приходим к (5.18). Из (5.18), (5.19) и (5.16) следует (5.4). Лемма доказана.

Литература

[1] *Бабич В. М.:* К вопросу о распространении функций. — Успехи мат. наук, 1953, т. *8*, № 2, с. 111—113.

[2] *Никольский С. М.:* Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях. — Мат. сб., 1953, т. *33*, № 2, с. 261—326.

[3] *Calderon A. P.:* Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. Proc. Sympos. Pure Math., 1961, v. *4*, p. 33—49.

[4] *Стейн И.:* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973, 342 с.

[5] *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Латфулин Т. Г.:* Критерий продолжения функций класса L_2^1 из неограниченных плоских областей. — Сиб. мат. журн., 1979, т. *20*. № 2, с. 416—419.

[6] *Gol'dstein V. M., Vodopianov S. K.:* Prolongement des fonctions de classe L_p^1 et applications quasi conformes. — C.R. Acad. Sci. Paris, 1980, v. *290*, p. 453—456.

[7] *Jones P. W.:* Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. — Acta Math., 1981, v. *147*, p. 71—88.

[8] *Гольдштейн В. М.:* Продолжение функций с первыми обобщенными производными из плоских областей. — Докл. АН СССР, 1981, т. *257*, № 2, с. 268—271.

[9] *Мазья В. Г.:* Пространства С. Л. Соболева — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985, 416 с.

[10] *Альфорс Л.:* Лекции по квазиконформным отображениям. М., 1969, 132 с.

[11] *Буренков В. И.:* Об одном способе продолжения дифференцируемых функций. — Труды Мат. ин-та АН СССР им В. А. Стеклова, 1976, т. *140*, с. 27—67.

[12] *Гольдштейн В. М., Ситников В. Н.:* О продолжении функций класса W_p^1 через гельдеровы границы. — В кн.: Теоремы вложения и их приложения (Труды семинара С. Л. Соболева). Новосибирск, 1982, № 1, с. 31—43.

[13] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.:* О продолжении функций из простанств С. Л. Соболева во внешность области с вершиной пика на границе. — Докл АН СССР, 1984, т. *275*, № 5, с. 1066—1069.

[14] *Muckenhoupt B.:* Hardy's inequality with weights. — Studia Math., 1972, v. *44*, p. 31—38.

Адресс авторов: Ленинградский государственный униврезитет, Ленинград, СССР.