

Drumi Dimitrov Bajnov; Pavel S. Simeonov

Интегральные и дифференциальные неравенства для одного класса
кусочно-непрерывных функций

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 36 (1986), No. 3, 417–426

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102102>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1986

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Д. Д. БАЙНОВ, П. С. СИМЕОНОВ, София

(Поступила в редакцию 19/XI 1984 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с приложением в теории управления, радиоэлектроники, биологии и других областях знания, в последних годах, все интенсивнее разрабатывается теория дифференциальных систем с импульсным воздействием вида

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq \tau_i(x); \quad \Delta x|_{t=\tau_i(x)} = B_i(x),$$

где $f: I \times \Omega \rightarrow R^n$; $\tau_i: \Omega \rightarrow R$; $B_i: \Omega \rightarrow R^n$; $I = [0, \infty)$; Ω — область в n -мерном Евклидовом пространстве с нормой $|\cdot|$. Среди первоначально опубликованных по этой тематике работ упомянем работы [1]–[5].

Системами (1) описываются процессы и явления, которые подвергаются кратковременным воздействиям и скачкообразно меняют свое состояние. Считается, что импульсное воздействие происходит в моментах t_i когда изображающая точка (t, x) расширенного фазового пространства попадает на некоторую из гиперповерхностей σ_i с уравнением $t = \tau_i(x)$. Предполагается, что каждое решение $x(t)$ системы (1) непрерывно слева и в моментах t_i встречи с гиперповерхностью σ_i изображающая точка „мгновенно“ перебрасывается с положения $(t_i, x(t_i))$ в положение $(t_i, x(t_i) + B_i(x(t_i)))$, т.е.

$$x(t_i - 0) = x(t_i), \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + \Delta x(t_i) = x(t_i) + B_i(x(t_i)).$$

В моментах $t \neq \tau_i(x)$ решение $x(t)$ определяется системой $dx/dt = f(t, x)$.

При качественном исследовании систем с импульсным воздействием часто используется техника интегральных и дифференциальных неравенств. Функции, которые оцениваются этими неравенствами, имеют разрывы первого рода в моментах $\{t_i\}$ импульсного воздействия, при том, величина разрыва зависит от значения функции в точке t_i . Эта характерная особенность выделяет класс интегральных и дифференциальных неравенств, которые будем называть неравенствами для функций со скачками.

В настоящей работе, для функций со скачками, рассмотрено интегральное

неравенство типа Бихари и обоснован метод сравнения для дифференциальных неравенств.

Отметим, что в [4] впервые использован аналог неравенства Гронуолла-Беллмана для функций со скачками.

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО ТИПА БИХАРИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ СО СКАЧКАМИ

Далее, если $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ — числовые последовательности и $0 \leq s \leq t \leq \infty$, то символами $\sum_{s < t_i < t} p_i$ и $\prod_{s < t_i < t} p_i$ будем обозначать соответственно сумму и произведение чисел p_i , причем сложение (умножение) ведется по тем i , для которых $s < t_i < t$. При $s = t$, по определению, $\sum_{t < t_i < t} p_i = 0$ и $\prod_{t < t_i < t} p_i = 1$.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функция $v: [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — кусочно — непрерывна на $[t_0, \infty)$ и имеет точки разрыва первого рода, у которых нет конечной точки сгущения.

2. Последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ — возрастающая: $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

3. Функция $p(s)$ — непрерывна и неотрицательна при $s \geq t_0$.

4. Функция $\phi(v)$ — непрерывна и неубывающая при $v \geq 0$, положительна при $v > 0$ и $\phi(\lambda u) \geq \mu(\lambda) \phi(u)$, при $\lambda > 0$ и $v > 0$, где $\mu(\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$.

5. Последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $p_i > 0$ и $\beta_i \geq 0$.

6. При $t \geq t_0$ выполнено неравенство

$$(2) \quad v(t) \leq c_0 \prod_{t_0 < t_i < t} p_i + \int_{t_0}^t \prod_{s \leq t_i < t} p_i p(s) \phi(v(s)) ds + \\ + \sum_{t_0 < t_i < t} \prod_{t_i \leq t_j < t} p_j \beta_j v(t_i - 0) \quad (c_0 > 0).$$

Тогда

$$(3) \quad v(t) \leq \psi^{-1} \left(\psi(c_0 \prod_{t_0 < t_i < t} p_i (1 + \beta_i)) + \int_{t_0}^t \prod_{s \leq t_i < t} \frac{p_i (1 + \beta_i)}{\mu(p_i (1 + \beta_i))} p(s) ds \right)$$

при всех $t \geq t_0$, для которых

$$\psi(c_0 \prod_{t_0 < t_i < t} p_i (1 + \beta_i)) + \int_{t_0}^t \prod_{s \leq t_i < t} \frac{p_i (1 + \beta_i)}{\mu(p_i (1 + \beta_i))} p(s) ds \in \text{Dom } \psi^{-1}.$$

Здесь $\psi(v) = \int_a^v \frac{dz}{\phi(z)}$, где $v \geq a > 0$.

Доказательство. 1°. Пусть $t_0 \leq t \leq t_1$. Тогда неравенства (2) и (3) имеют вид

$$(4) \quad v(t) \leq c_0 + \int_{t_0}^t p(s) \phi(v(s)) ds,$$

$$v(t) \leq \psi^{-1} \left(\psi(c_0) + \int_{t_0}^t p(s) ds \right).$$

Положим $u(t) = c_0 + \int_{t_0}^t p(s) \phi(v(s)) ds$. При $t \geq t_0$ функция $u(t)$ непрерывна, неотрицательна и удовлетворяет неравенствам

$$(5) \quad v(t) \leq u(t),$$

$$(6) \quad u(t) \leq c_0 + \int_{t_0}^t p(s) \phi(u(s)) ds \equiv w(t).$$

Тогда, учитывая (5) и (6), получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t p(s) ds &\geq \int_{t_0}^t \frac{p(s) \phi(u(s))}{\phi(w(s))} ds = \int_{t_0}^t \frac{d(w(s))}{\phi(w(s))} = \int_{w(t_0)}^{w(t)} \frac{dz}{\phi(z)} = \\ &= \psi(w(t)) - \psi(c_0) \geq \psi(u(t)) - \psi(c_0) \geq \psi(v(t)) - \psi(c_0). \end{aligned}$$

Следовательно, $\psi(v(t)) \leq \psi(c_0) + \int_{t_0}^t p(s) ds$ откуда следует (4). Кроме того, для постоянной

$$c_1 = \psi^{-1} \left(\psi(c_0) + \int_{t_0}^{t_1} p(s) ds \right)$$

и функции

$$v_1(t) = \psi^{-1} \left(\psi(c_0) + \int_{t_0}^t p(s) ds \right), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v_1(t) \quad \text{при } t \in [t_0, t_1], \\ \int_{t_0}^{t_1} p(s) \phi(v_1(s)) ds &= \int_{t_0}^{t_1} dv_1(s) = v(t_1) - v(t_0) = c_1 - c_0, \\ \psi(c_1) - \psi(c_0) &= \int_{t_0}^{t_1} p(s) ds. \end{aligned}$$

2°. Справедливость теоремы 1 для последующих интервалов $(t_i, t_{i+1}]$ доказываем индукцией по i .

Положим $p_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ и введем следующие постоянные и функции:

$$c_{k+1} = \psi^{-1} \left(\psi(p_k(1 + \beta_k) c_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) ds \right),$$

$$v_{k+1}(t) = \psi^{-1} \left(\psi(p_k(1 + \beta_k) c_k) + \int_{t_k}^t p(s) ds \right), \quad \text{при } t \in (t_k, t_{k+1}]. \quad k = 1, 2, \dots$$

Предположим, что при $k = 0, 1, \dots, i$ и $t \in (t_k, t_{k+1}]$ выполнены следующие соотношения:

$$(7) \quad v(t) \leq v_{k+1}(t),$$

$$(8) \quad \psi(v(t)) - \psi(c_0 \prod_{t_0 < t_j < t} p_j(1 + \beta_j)) \leq \int_{t_0}^t \prod_{s \leq t_j < t} \frac{p_j(1 + \beta_j)}{\mu(p_j(1 + \beta_j))} p(s) ds,$$

$$(9) \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) \phi(v_{k+1}(s)) ds = c_{k+1} - p_k(1 + \beta_k) c_k,$$

$$(10) \quad \psi(c_{k+1}) - \psi(c_0 \prod_{j=0}^k p_j(1 + \beta_j)) = \int_{t_0}^{t_{k+1}} \prod_{s \leq t_j \leq t_{k+1}} \frac{p_j(1 + \beta_j)}{\mu(p_j(1 + \beta_j))} p(s) ds.$$

Пусть $t \in (t_{i+1}, t_{i+2}]$. Тогда неравенство (2) принимает вид

$$(11) \quad v(t) \leq c_0 \prod_{j=0}^{i+1} p_j + \sum_{k=0}^i \left(\prod_{j=k+1}^{i+1} p_j \right) \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) \phi(v(s)) ds + \int_{t_{i+1}}^t p(s) \phi(v(s)) ds + \\ + \sum_{k=1}^i \left(\prod_{j=k}^{i+1} p_j \right) \beta_k v(t_k - 0) + p_{i+1} \beta_{i+1} v(t_{i+1} - 0).$$

Из соотношений (7), (9) и (11) получаем, что при $t \in (t_{i+1}, t_{i+2}]$

$$(12) \quad v(t) \leq c_{i+1} p_{i+1} (1 + \beta_{i+1}) + \int_{t_{i+1}}^t p(s) \phi(v(s)) ds.$$

Рассуждая как в пункте 1° из (12) следует, что

$$(13) \quad \psi(v(t)) \leq \psi(c_{i+1} p_{i+1} (1 + \beta_{i+1})) + \int_{t_{i+1}}^t p(s) ds \quad \text{при } t \in (t_{i+1}, t_{i+2}].$$

Исходя из свойств функции ϕ , находим что при $x > 0$, $y > 0$ и $\lambda > 0$

$$(14) \quad \psi(\lambda x) - \psi(\lambda y) \leq \frac{\lambda}{\mu(\lambda)} (\psi(x) - \psi(y)).$$

Тогда, согласно (13), (14) и (10),

$$\begin{aligned} & \psi(v(t)) - \psi(c_0 \prod_{j=0}^{i+1} p_j(1 + \beta_j)) \leq \\ & \leq \psi(p_{i+1}(1 + \beta_{i+1}) c_{i+1}) - \psi(p_{i+1}(1 + \beta_{i+1}) c_0 \prod_{j=0}^i p_j(1 + \beta_j)) + \int_{t_{i+1}}^t p(s) ds \leq \\ & \leq \frac{p_{i+1}(1 + \beta_{i+1})}{\mu(p_{i+1}(1 + \beta_{i+1}))} [\psi(c_{i+1}) - \psi(c_0 \prod_{j=0}^i p_j(1 + \beta_j))] + \int_{t_{i+1}}^t p(s) ds \leq \\ & \leq \frac{p_{i+1}(1 + \beta_{i+1})}{\mu(p_{i+1}(1 + \beta_{i+1}))} \int_{t_0}^{t_{i+1}} \prod_{s \leq t_j < t_{i+1}} \frac{p_j(1 + \beta_j)}{\mu(p_j(1 + \beta_j))} p(s) ds + \int_{t_{i+1}}^t p(s) ds = \\ & = \int_{t_0}^t \prod_{s \leq t_j < t} \frac{p_j(1 + \beta_j)}{\mu(p_j(1 + \beta_j))} p(s) ds. \end{aligned}$$

Этим доказана справедливость неравенства (8) для $t \in (t_{i+1}, t_{i+2}]$. Из неравенства (13), после несложных преобразований, получаем, что соотношения (7), (9) и (10) имеют место при $k = i + 1$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Пусть $\phi(v) = v^m$, $m > 1$. Тогда из неравенства

$$v(t) \leq \prod_{t_0 < t_i < t} p_i + \int_{t_0}^t \prod_{s \leq t_i < t} p_i p(s) v^m(s) ds + \sum_{t_0 < t_i < t} \left(\prod_{t_i \leq t_j < t} p_j \right) \beta_i v(t_i - 0)$$

следует неравенство

$$v(t) \leq c \prod_{t_0 < t_i < t} p_i (1 + \beta_i) \left[1 - (m - 1) \int_{t_0}^t \left(c \prod_{t_0 < t_i < s} p_i (1 + \beta_i) \right)^{m-1} p(s) ds \right]^{1/(1-m)}$$

при всех $t \geq t_0$, для которых

$$(m - 1) \int_{t_0}^t \left(c \prod_{t_0 < t_i < s} p_i (1 + \beta_i) \right)^{m-1} p(s) ds < 1.$$

Следствие 2. Пусть $\phi(v) = v$. Тогда из неравенства

$$v(t) \leq c \prod_{t_0 < t_i < t} p_i + \int_{t_0}^t \prod_{s \leq t_i < t} p_i p(s) v(s) ds + \sum_{t_0 < t_i < t} \left(\prod_{t_i \leq t_j < t} p_j \right) \beta_i v(t_i - 0)$$

следует неравенство

$$v(t) \leq c \prod_{t_0 < t_i < t} p_i (1 + \beta_i) \exp \left(\int_{t_0}^t p(s) ds \right), \quad \text{при } t \geq t_0.$$

Замечание 1. При $p_i \equiv 1$ и $m > 1$ результат следствия 1 совпадает с результатом леммы 2 [6]. При $p_i \equiv 1$ и $m = 1$ результат следствия 2 совпадает с результатом леммы 2 [4] и представляет собой обобщением леммы Гронуолла-Беллмана.

Отметим, что в Теореме 1, точки разрыва функции могут не совпадать с точками „скачка“ $\{t_i\}$ (как это требуется в [4] и [6]), что особенно важно в случаях, когда моменты импульсного воздействия не фиксированы.

3. ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ СО СКАЧКАМИ

Пусть вектор-функция $u(t)$ удовлетворяет системе с импульсным воздействием в фиксированных моментах времени

$$(15) \quad \frac{du}{dt} = F(t, u) \quad \text{при } t \neq t_i,$$

$$u(t_i + 0) = \psi_i(u(t_i)),$$

где $F: I \times G \rightarrow R^k$; $\psi_i: G \rightarrow R^k$; G — открытое подмножество R^k ; $0 < t_1 < \dots < t_i < \dots$; $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

Прежде чем сформулировать теоремы о дифференциальных неравенствах введем некоторые определения.

Пространство R^k будем считать полуупорядоченным в следующем смысле: будем писать $v \leq u$ ($v < u$), если $v_i \leq u_i$ ($v_i < u_i$) при $i = 1, 2, \dots, k$.

Определение 1. Функцию $\psi: G \rightarrow R^k$ называем *монотонно возрастающей* в G , если при всех $u, v \in G$ из того, что $v \leq u$ следует что $\psi(v) \leq \psi(u)$, а из $v < u$ следует $\psi(v) < \psi(u)$.

Определение 2 [7]. Функцию F называем *квазимоноотонно возрастающей* в G , если для любой пары (t, u) и (t, v) из $I \times G$ при $i = 1, 2, \dots, k$ имеем $F_i(t, v) \leq F_i(t, u)$ всегда, когда $v_i = u_i$ и $v \leq u$.

Определение 3. Решение $u^+: (t_0, \omega) \rightarrow R^k$ системы (15), для которого $u^+(t_0 + 0) = u_0$, называем *максимальным решением системы* (15), если любое другое решение $u: (t_0, \tilde{\omega}) \rightarrow R^k$, для которого $u(t_0 + 0) = u_0$, удовлетворяет неравенству $u(t) \leq u^+(t)$ при $t \in (t_0, \omega) \cap (t_0, \tilde{\omega})$.

Аналогично определяется минимальное решение $u^-(t)$ системы (15).

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функция $F: I \times G \rightarrow R^k$ непрерывна и квазимоноотонно возрастающая в G .
2. Функции $\psi_i: G \rightarrow R^k$, $k = 1, 2, \dots$ — монотонно возрастающие в G .
3. Функция $u^+: (t_0, \omega) \rightarrow R^k$ — максимальное решение системы (15), для которого $u^+(t_0 + 0) = u_0$, $(t_0, u_0) \in I \times G$ и $u(t_i + 0) \in G$ если $t_i \in (t_0, \omega)$.
4. Функция $v: (t_0, \tilde{\omega}) \rightarrow R^k$ ($\tilde{\omega} \leq \omega$) кусочнонепрерывна с точками разрыва $\{t_i\}$, в которых непрерывна слева и такова, что:

$$(16) \quad \begin{aligned} &(t, v(t)) \in I \times G, \quad \text{при } t \in (t_0, \tilde{\omega}) \text{ и } v(t_i + 0) \in G \text{ если } t_i \in (t_0, \tilde{\omega}), \\ &v(t_0 + 0) \leq u_0, \\ &D v(t) \leq F(t, v(t)), \quad \text{при } t \in (t_0, \tilde{\omega}), t \neq t_i, \\ &v(t_i + 0) \leq \psi_i(v(t_i)), \quad \text{при } t_i \in (t_0, \tilde{\omega}), \end{aligned}$$

где $D v(t)$ некоторая производная Дини для $v(t)$.

Тогда $v(t) \leq u^+(t)$ при $t \in (t_0, \tilde{\omega})$.

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $t_0 < t_1$. Пусть $t \in (t_0, t_1] \cap (t_0, \tilde{\omega})$. Тогда согласно условию 4 Теоремы 2 и Лемме сравнения [7], IX, 2.6 (см. также [8]) будем иметь, что $v(t) \leq u^+(t)$. В частности, $v(t_1) \leq u^+(t_1)$ и учитывая неравенство (16) и условие 2 получаем

$$v(t_1 + 0) \leq \psi(v(t_1)) \leq \psi_1(u^+(t_1)) = u^+(t_1 + 0).$$

С аналогичными рассуждениями доказывается, что $v(t) \leq u^+(t)$ при $t \in (t_i, t_{i+1}] \cap (t_0, \tilde{\omega})$, $i = 1, 2, \dots$.

Этим теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1. Выполнены условия 1 и 2 теоремы 2.

2. Функция $u^-: (t_0, \omega) \rightarrow R^k$ – минимальное решение системы (15), для которого $u^-(t_0 + 0) = u_0$, $(t_0, u_0) \in I \times G$, $u(t_i + 0) \in G$ если $t_i \in (t_0, \omega)$.

3. Функция $v: (t_0, \tilde{\omega}) \rightarrow R^k$ ($\tilde{\omega} \leq \omega$) кусочнонепрерывна с точками разрыва $\{t_i\}$, в которых непрерывна слева и такова, что:

$$\begin{aligned} (t, v(t)) \in I \times G, \quad & \text{при } t \in (t_0, \tilde{\omega}) \text{ и } v(t_i + 0) \in G \text{ если } t_i \in (t_0, \tilde{\omega}), \\ v(t_0 + 0) \geq u_0, \\ D v(t) \geq F(t, v(t)), \quad & \text{при } t \in (t_0, \tilde{\omega}), \quad t \neq t_i, \\ v(t_i + 0) \geq \psi_i(v(t_i)), \quad & \text{при } t_i \in (t_0, \tilde{\omega}), \end{aligned}$$

где $D v(t)$ некоторая производная Дини для $v(t)$.

Тогда $v(t) \geq u^-(t)$ при $t \in (t_0, \tilde{\omega})$.

Доказательство Теоремы 3 аналогично доказательству Теоремы 2.

Отметим, что условие квазимонотонности для функции F можно отбросить в важном для приложений случае, когда уравнение сравнения (15) скалярно. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 4. Пусть функция $v(t)$ дифференцируема при $t \neq t_i$, в точках t_i непрерывна слева и удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} \leq f(t, v) \quad & \text{при } 0 \leq t < T \leq \infty, \quad t \neq t_i, \\ v(t_i + 0) \leq \psi_i(v(t_i)), \quad & v(0) \leq u_0, \end{aligned}$$

где функция $f(t, v)$ – непрерывна в области $\{0 \leq t < T, |v| < \infty\}$, а функции $\psi_i: R \rightarrow R$ – неубывающие.

Тогда

$$v(t) \leq u^+(t) \quad \text{при } t \in [0, T) \cap [0, \omega),$$

где $u^+(t)$ – максимальное решение начальной задачи с импульсным воздействием

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} = f(t, u), \quad & \text{при } t \in [0, \omega), \quad t \neq t_i, \\ u(t_i + 0) = \psi_i(u(t_i)), \quad & u(0) = u_0. \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть функции f и ψ_i удовлетворяют условиям Теоремы 4 и

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} \geq f(t, v) \quad & \text{при } t \in [0, T), \quad t \neq t_i, \\ v(t_i + 0) \geq \psi_i(v(t_i)), \quad & v(0) \geq u_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$v(t) \geq u^-(t) \quad \text{при } t \in [0, T) \cap [0, \omega),$$

где $u^-(t)$ – минимальное решение задачи (17).

Теоремы 4 и 5 являются следствиями Теоремы 1.2 и Теоремы 1.3 из [8] и доказываются как Теоремы 2 и 3.

Следующее утверждение является частным случаем Теорем 4 и 5.

Следствие 1. Пусть функции $p(t)$ и $q(t)$ непрерывны при $0 \leq t < T \leq \infty$, а $d_i \geq 0$ и b_i — постоянные. Пусть функция $v(t)$ дифференцируема при $t \neq t_i$, в точках t_i непрерывна слева и удовлетворяет неравенству

$$\frac{dv}{dt} \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} p(t)v + q(t) \quad \text{при } t \in [0, T), \quad t \neq t_i,$$

$$v(t_i + 0) \leq (\geq) d_i v(t_i) + b_i.$$

Тогда при $t \in [0, T)$ имеет место неравенство

$$(18) \quad v(t) \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} v(0) \prod_{0 < t_i < t} d_i \exp\left(\int_0^t p(s) ds\right) + \int_{0^+}^t \prod_{s < t_i < t} d_i \exp\left(\int_s^t p(\tau) d\tau\right) + \\ + \sum_{0 < t_i < t} \prod_{t_i < t_k < t} d_k \exp\left(\int_{t_i}^t p(\tau) d\tau\right) b_i.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно в Теореме 4 (Теореме 5) положить $f(t, u) = p(t)u + q(t)$, $\psi_i(u) = d_i u + b_i$ и заметить, что единственное решение задачи

$$\frac{du}{dt} = p(t)u + q(t), \quad t \in [0, T), \quad t \neq t_i,$$

$$u(t_i + 0) = d_i u(t_i) + b_i, \quad u(0) = v(0)$$

является правой частью неравенства (18).

Отметим еще один случай, когда на функцию F не накладывается условие квазимонотонности.

Теорема 6. Пусть функция $v: [0, T) \rightarrow R^k$ дифференцируема при $t \neq t_i$, в точках t_i непрерывна слева и удовлетворяет неравенству

$$\frac{dv}{dt} \leq Av + q(t), \quad \text{при } t \in [0, T), \quad t \neq t_i,$$

$$v(t_i + 0) \leq \psi_i(v(t_i)), \quad v(0) \leq u_0,$$

где функция $q: [0, T) \rightarrow R^k$ — непрерывна; функции $\psi_i: R^k \rightarrow R^k$ — монотонно возрастающие в R^k и для элементов постоянной матрицы $A = (a_{ij})_1^k$ выполнено

$$(20) \quad a_{ij} \geq 0, \quad \text{при } i \neq j.$$

Тогда

$$(21) \quad v(t) \leq u(t),$$

где $u(t)$ — решение задачи

$$\frac{du}{dt} = Au + q(t), \quad t \in [0, T), \quad t \neq t_i,$$

$$u(t_i + 0) = \psi_i(u(t_i)), \quad u(0) = u_0.$$

Доказательство. При $t \in [0, T) \cap [0, t_1)$ имеем

$$\frac{dv}{dt} = Av + q(t) - f(t),$$

где $f(t) \geq 0$. Из условия (20) следует, что при $t \geq 0$ матрица e^{At} имеет неотрицательные элементы [9]. Тогда

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{At} v(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} q(s) ds - \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds \leq \\ &\leq e^{At} u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} q(s) ds = u(t). \end{aligned}$$

В частности, $v(t_1) \leq u(t_1)$ и $v(t_1 + 0) \leq u(t_1 + 0)$. Далее, справедливость неравенства (21) для последующих интервалов $(t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots$ доказывается индукцией по i .

Замечание 2. Теорема 6 остается в силе, если в (19) и (21) поменяем направление неравенств.

Замечание 3. Отметим, что в [10] получен другой аналог неравенства Бихари для функции со скачками, который является следствием Теоремы 4.

Литература

- [1] Мильман В. Д., Мышкис А. Д.: Об устойчивости движения при наличии толчков. Сибирский мат. ж. 1 (1960), № 2, 233–237.
- [2] Мильман В. Д., Мышкис А. Д.: Случайные толчки в линейных динамических системах. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, Из-во АН УССР, Киев, 1963, 64–81.
- [3] Мышкис А. Д., Самойленко А. М.: Системы с толчками в заданные моменты времени. Математ. сб., т. 74, 1967, № 2.
- [4] Самойленко А. М., Перестюк Н. А.: Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Дифф. уравнения, 1977, № 11, 1981–1992.
- [5] Самойленко А. М., Перестюк Н. А.: Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием. Дифф. уравнения, 1981, № 11, 1995–2001.
- [6] Борисенко С. Д.: Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсным воздействием, УМЖ, т. 35, 1983, № 2, 144–150.
- [7] Руш Н., Абетс П., Лалуа М.: Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости — Москва, „Мир“, 1980, 300 с.

- [8] Мамедов Я. Д., Аширов С., Атаев С.: Теоремы о неравенствах, Ашхабад, „БЫЛЫМ“, 1980, 232 с.
- [9] Беккенбах Э., Беллман Р.: Неравенства, Москва, „Мир“, 1965, 276 с.
- [10] Перестюк Н. А., Черникова О. С.: К вопросу об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, УМЖ, т. 36, 1984, № 2, 190—195.

Адрес авторов: 1504, София, ПК 45, Болгария.