

B. V. Godun

О связи между слабой и сильной сходимостью в пространстве Банаха,  
содержащем  $\ell_1$

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 34 (1984), No. 2, 252–256

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101948>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1984

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О СВЯЗИ МЕЖДУ СЛАБОЙ И СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТЬЮ  
В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА, СОДЕРЖАЩЕМ  $l_1$

Б. В. ГОДУН, Харьков

(Поступило в редакцию 17/XI 1982 г.)

Фундаментальная альтернатива Х. Розенталя, характеризующая сепарабельные банаховы пространства, содержащие  $l_1$ , имеет многочисленные следствия линейно – топологического характера (см. [1]). В этой заметке мы покажем, что наличие в банаховом пространстве подпространства, изоморфного  $l_1$ , может сказаться и на геометрических свойствах пространства.

Банахово пространство  $X$  обладает  $H$ -свойством относительно подпространства  $\Gamma \subset X^*$  (что обозначают так  $X \in H_\Gamma$ ), если на его единичной сфере  $\Gamma$ -сходимость последовательностей (т.е. сходимость на функционалах из  $\Gamma$ ) совпадает с сильной сходимостью [2]. Подпространство  $\Gamma$  называется тотальным, если условие  $f(x) = 0$  для всех  $f \in \Gamma$  влечет  $x \equiv 0$  ( $x \in X$ ), и нормирующим, если его характеристика Диксмье

$$r(\Gamma) = \inf_{x \in X} \sup_{f \in \Gamma} \frac{|f(x)|}{\|f\| \cdot \|x\|},$$

строго больше нуля. Тотальность подпространства  $\Gamma$  эквивалентна следующему условию  $\Gamma^\perp \cap X = 0$ , где  $\Gamma^\perp$ -аннулятор  $\Gamma$  в пространстве  $X^{**}$ . (Каждое банахово пространство мы считаем канонически вложенным в свое второе сопряженное.) Приведем несколько эквивалентных определений характеристики Диксмье подпространства  $\Gamma$ .  $r(\Gamma)$  есть верхняя грань чисел  $r > 0$  таких, что норма

$$\|x\|_r = \sup \{|f(x)| : f \in \Gamma, \|f\| = 1\}$$

эквивалентна исходной и  $r\|x\| \leq \|x\|_r \leq \|x\|$ ;  $r(\Gamma)$  есть нижняя грань чисел  $\lambda$  таких, что замыкание единичного шара  $V$  пространства  $X$  в топологии  $\sigma(X, \Gamma)$  содержится в шаре  $\lambda V$  (см. [3]). В частности, если  $r(\Gamma) = 1$ , то шар  $V \sigma(X, \Gamma)$  – замкнут. Ясно, что каждое нормирующее подпространство является тотальным. Обратное не верно и, более того, тотальное подпространство характеристики нуль существует в сопряженном к любому неквазирефлексивному банахову пространству [4], [9].

Известная теорема М. И. Кадеца утверждает [2], что для любого сепарабельного банахова пространства  $X$  и любого нормирующего подпространства

$\Gamma \subset X^*$  на  $X$  существует эквивалентная норма, в которой  $X \in H_\Gamma$ . (Это символически будем обозначать так:  $X \in h_\Gamma$ ). Долгое время оставался открытым вопрос М. И. Кадеца о том, влечет ли принадлежность сепарабельного банахова пространства  $X$  классу  $h_\Gamma$  нормируемость подпространства  $\Gamma$ . (Несложные рассуждения показывают, что условие  $X \in h_\Gamma$  влечет тотальность  $\Gamma$ ). Для сепарабельного  $\Gamma$  ответ на этот вопрос положителен ([5], теорема 4.9), однако в общем случае ответ отрицателен:

Пример (Д. ван Дульст, [6]). Если  $X = l_1$ , то в  $X^*$  существует такое тотальное подпространство  $D$  характеристики нуль, что  $X \in H_D$ .

Окончательное решение этого вопроса М. И. Кадеца дает следующая

**Теорема.** Для сепарабельного банахова пространства  $X$  условие  $X \in h_\Gamma$  тогда и только тогда влечет  $r(\Gamma) > 0$  для всякого  $\Gamma$ , когда  $X$  не содержит подпространств, изоморфных  $l_1$ .

Доказательство. Пусть  $X$  не содержит подпространств, изоморфных  $l_1$  и  $\Gamma$  — такое тотальное подпространство  $X^*$ , что  $X \in H_\Gamma$ . Покажем, что в этом случае  $r(\Gamma) = 1$ . Характеристика подпространства  $\Gamma$  может быть вычислена так [3]:

$$r(\Gamma) = \inf \left\{ \frac{\|x^{**} + x\|}{\|x\|} : x \in X, \quad x^{**} \in \Gamma^\perp \right\}.$$

Поскольку  $X$  не содержит подпространств, изоморфных  $l_1$ , то для произвольных элементов  $x^{**} \in \Gamma^\perp$  и  $x \in X$  найдется такая последовательность  $\{x_n\} \subset X$ , что  $w^* - \lim x_n = x^{**} + x$  и  $\|x_n\| = \|x^{**} + x\|$  для всех  $n = 1, 2, \dots$  (см. [7]). Поскольку  $x^{**} \in \Gamma^\perp$ , то

$$(1) \quad \Gamma - \lim x_n = x.$$

Как было замечено М. И. Кадецком (см. [8], с. 176), условие  $X \in H_\Gamma$  в соединении с соотношением (1) влечет  $\lim \|x_n\| \geq \|x\|$ . Следовательно,  $\|x^{**} + x\| = \lim \|x_n\| \geq \|x\|$ , а это и означает, что  $r(\Gamma) = 1$ .

Пусть теперь  $X$  содержит подпространство  $Y$ , изоморфное  $l_1$ . Для удобства будем считать, что норма на  $X$  такова, что  $Y$  изометрично  $l_1$ . Обозначим через  $i$  тождественное вложение  $Y$  в  $X$ ,  $E = X/Y$  и  $F : X \rightarrow E$  — фактор-отображение. Пространство  $E^*$  будем отождествлять с  $Y^\perp \subset X^*$ , так как  $Y^\perp$  — это образ  $E^*$  при линейной изометрии  $F^* : E^* \rightarrow X^*$ . Пусть  $D \subset Y^*$ -подпространство, фигурирующее в примере Д. ван Дульста,  $Z = c_0 \subset Y^* = l_\infty$ , где пространство  $c_0$  предполагается естественным образом вложенным в  $l_\infty = Y^*$  (так что  $Z^* = c_0^* = Y = l_1$ ) и пусть  $R = [D + Z]$ . Пусть далее

$$\Gamma = (i^*)^{-1}(D) \text{ и } G = (i^*)^{-1}(R).$$

Ясно, что  $\Gamma$  — тотальное (на  $X$ ) подпространство  $X^*$  характеристики нуль. Покажем, что  $X \in h_\Gamma$ . Докажем несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 1.** Для ограниченной последовательности  $\{y_n\} \subset Y$  условия  $D - \lim y_n = 0$  влечет  $R - \lim y_n = 0$ .

Доказательство. Построение пространства ван Дульста  $D \subset l_1^*$  основано на следующем замечании [6]: для любого  $k = 1, 2, \dots$  в пространстве  $l_1^*$  существует такое подпространство  $D_k$ , что  $0 < r(D_k) \leq 1/k$  и  $D_k$  квазидополнительно к  $c_0 \subset l_1^* = l_\infty$  (т.е.  $D_k \cap c_0 = \{0\}$  и  $D_k + c_0$  плотно в  $l_\infty$ ). Заметим, что каждое из пространств  $D_k$  обладает следующим свойством: если  $\{y_n\} \subset Y$  — ограниченная последовательность и  $D_k - \lim y_n = 0$ , то  $\|y_n\| \rightarrow 0$ . Действительно, пусть  $\{y_{n_j}\}$  — произвольная подпоследовательность последовательности  $\{y_n\}$ . Поскольку  $Y = l_1 = c_0^* = Z^*$ , то из нее можно выделить  $Z$ -фундаментальную подпоследовательность. Будем считать, что сама последовательность  $\{y_{n_j}\}$   $Z$ -фундаментальна. Так как  $D_k - \lim y_n = 0$ , то эта последовательность будет фундаментальной на плотном в  $Y^*$  множестве  $D_k + Z$ . Так как наша последовательность ограничена, то она слабо\* сходится к некоторому  $y \in Y^{**}$ . Поскольку пространство  $Y = l_1$  слабо секвенциально полно, то  $\{y_{n_j}\}$  слабо сходится к  $y \in Y$ . Так как в  $l_1$  слабая сходимость совпадает с сильной, то  $\|y_{n_j} - y\| \rightarrow 0$ . Но при этом  $D_k - \lim y_{n_j} = 0$  и поскольку  $D_k$  тотально на  $Y$ , то  $y \equiv 0$ . Таким образом, каждая подпоследовательность  $\{y_n\}$  содержит подпоследовательность, сильно сходящуюся к нулю. Это и означает, что  $\|y_n\| \rightarrow 0$ .

Далее пространство  $D$  строится так [6]: пространство  $Y = l_1$  представим в виде  $Y = (\sum_k Y_k)_{l_1}$ , где  $Y_k = Y = l_1$  и пусть  $P_k$  — естественный проектор из  $Y$  на  $Y_k$ . В каждом пространстве  $Y_k^*$  построим подпространство  $D_k$  и тогда

$$D = (\sum_k D_k)_{l_\infty} \subset (\sum_k Y_k^*)_{l_\infty} = Y^*.$$

Пусть теперь  $\{y_n\} \subset Y$  такая ограниченная последовательность, что  $D - \lim y_n = 0$ . Тогда для любого  $k = 1, 2, \dots$  последовательность  $\{P_k(y_n)\}$  ограничена и  $D_k - \lim P_k(y_n) = 0$ . Как было замечено выше, отсюда следует, что для любого  $k = 1, 2, \dots$   $\|P_k(y_n)\| \rightarrow 0$ . А это означает, что для пространства  $Z = c_0 = (\sum c_0)_{c_0} \subset Y^*$  выполняется соотношение  $Z - \lim y_n = 0$ . Так как  $R = [D + Z]$ , то  $R - \lim y_n = 0$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  — такая ограниченная последовательность в  $X$ , что  $\Gamma - \lim x_n = x_0$ . Тогда найдется последовательность  $v_n = \sum_{i \geq n} C_i^{(n)} x_i$ ,  $C_i^{(n)} \geq 0$ ,  $\sum_{i \geq n} C_i^{(n)} = 1$  такая, что  $G - \lim v_n = x_0$ .

Доказательство. Обозначим  $u_n = x_0 - x_n$  и  $e_n = F(u_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Так как, очевидно,  $Y^\perp \subset \Gamma$  и  $\Gamma - \lim u_n = 0$ , то последовательность  $\{e_n\}$  сходящая к нулю слабо (т.к.  $E^* = Y^\perp$ ). Согласно теореме Мазура о слабой сходимости найдутся выпуклые комбинации последовательности  $\{e_n\}$  вида

$$w_n = \sum_{i \geq n} C_i^{(n)} e_i, \quad C_i^{(n)} \geq 0, \quad \sum_{i \geq n} C_i^{(n)} = 1,$$

сходящиеся к нулю по норме пространства  $E$ . Это означает, что для последо-

вательности  $v_n = \sum_{i \geq n} C_i^{(n)} u_i$  (так как  $F(v_n) = w_n$ ) выполняется соотношение  $\lim \text{dist}(v_n, Y) = 0$ . Выберем последовательность  $\{y_n\} \subset Y$  так, чтобы

$$(2) \quad \begin{aligned} \lim \|v_n - y_n\| &= \lim \left\| \sum_{i \geq n} C_i^{(n)} u_i - y_n \right\| = \\ &= \lim \left\| x_0 - \sum_{i \geq n} C_i^{(n)} x_i - y_n \right\| = 0. \end{aligned}$$

Ясно, что последовательность  $\{y_n\}$  ограничена  $\overline{\lim} \|y_n\| \leq \sup \|x_n\| + \|x_0\|$ . Кроме того, поскольку  $\Gamma - \lim u_n = 0$ , то  $\Gamma - \lim v_n = 0$  и, значит,  $\Gamma - \lim y_n = 0$ , откуда следует, что  $D - \lim y_n = 0$ . В силу леммы 1  $R - \lim y_n = 0$  и, значит,  $G - \lim y_n = 0$ . Согласно условию (2)  $G - \lim \sum_{i \geq n} C_i^{(n)} x_i = x_0$ .

**Лемма 3.** На пространстве  $X$  существует такая эквивалентная норма  $\|\cdot\|$ , в которой для любой ограниченной последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \subset X$  условие  $\Gamma - \lim x_n = x_0$  влечет  $\underline{\lim} \|x_n\| \geq \|x_0\|$ .

Доказательство. Прежде всего заметим, что в исходной норме  $|\cdot|$  на  $X$   $r(G) > 0$ . Действительно, характеристика каждого подпространства  $R \subset Y^*$  и характеристика его полного прообраза  $(i^*)^{(-1)}(R)$  в  $X^*$  связаны неравенством  $r((i^*)^{-1}(R)) \geq 1/4 \cdot r(R)$  [9]. Поскольку для нашего подпространства  $R = [D + c_0]$ , очевидно,  $r(R) = 1$ , то  $r(G) \geq 1/4$ . Значит норма

$$\|x\| = \|x\|_G = \sup \{|f(x)| : f \in G, \|f\| = 1\}$$

эквивалентна исходной и ясно, что в этой норме  $r(G) = 1$ . Пусть теперь найдется такая последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty \subset X$ , что  $\Gamma - \lim x_n = x_0$ ,  $\|x_0\| = 1$ ,  $\|x_n\| \leq 1 - \delta$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\delta > 0$ . Тогда в силу леммы 2 найдется набор коэффициентов  $\{C_i^{(n)}\}$  такой, что  $C_i^{(n)} \geq 0$ ,  $\sum_{i \geq n} C_i^{(n)} = 1$  и  $G - \lim \sum_{i \geq n} C_i^{(n)} x_i = x_0$ . Поскольку  $r(G) = 1$ , то отсюда следует (см. [3]), что

$$\underline{\lim} \left\| \sum_{i \geq n} C_i^{(n)} x_i \right\| \geq \|x_0\|.$$

Значит

$$1 = \|x_0\| \leq \underline{\lim} \left\| \sum_{i \geq n} C_i^{(n)} x_i \right\| \leq \sup_n \|x_n\| \leq 1 - \delta,$$

это противоречие завершает доказательство леммы.

**Замечание.** В норме, построенной в лемме 3, единичный шар пространства  $X$   $\sigma(X, \Gamma)$  — секвенциально замкнут и при этом его  $\sigma(X, \Gamma)$  — замыкание не ограничено (поскольку  $r(\Gamma) = 0$ ).

Вернемся к доказательству теоремы. Для построения эквивалентной нормы, в которой  $X \in H_\Gamma$ , применим прием Дэвиса-Джонсона [10]. Пусть норма  $\|\cdot\|$  на  $X$  введена, как в лемме 3. Пусть  $\{X_n\}$  — последовательность вложенных  $(X_n \subset X_{n+1})$  конечномерных подпространств  $X$ , объединение которых плотно

в  $X$ . Введем на  $X$  эквивалентную норму  $\|\cdot\|$ , полагая для каждого  $x \in X$

$$\|x\| = \|x\| + \sum 2^{-k} \text{dist}(x, X_k),$$

и покажем, что эта норма обладает требуемым свойством. Пусть последовательность  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$  такова, что

$$(3) \quad \Gamma - \lim (x_n + x_0) = x_0, \quad \|x_n + x_0\| \rightarrow \|x_0\|$$

Тогда в силу леммы 3 имеем  $\underline{\lim} \|x_0 + x_n\| \geq \|x_0\|$ , откуда, как легко видеть, следует, что  $\underline{\lim} \text{dist}(x_0 + x_n, X_k) \geq \text{dist}(x_0, X_n)$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ . Из этих соотношений и условия (3) получаем

$$(4) \quad \|x_n + x_0\| \rightarrow \|x_0\|, \quad \text{dist}(x_n + x_0, X_k) \rightarrow \text{dist}(x_0, X_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как  $\text{dist}(x_0, X_k) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) и единичный шар каждого из пространств  $X_k$  компактен, то соотношение (4) влечет (см. [10])  $\|x_n\| \rightarrow 0$ . Поскольку нормы  $\|\cdot\|$  и  $\|\cdot\|$  эквивалентны, то  $\|x_n\| \rightarrow 0$ , то есть в норме  $\|\cdot\|$   $X \in H_{\Gamma}$ .

#### Литература

- [1] *H. P. Rosenthal*: Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84 (1978), 803—831.
- [2] *М. И. Кадеу*: О связи между слабой и сильной сходимостью, *ДАН СССР*, 9 (1957), 949—952.
- [3] *Ю. И. Петушин, А. Н. Пличко*: Теория характеристик подпространств и ее проложения, Киев, ВШ, 1980.
- [4] *W. J. Davis, J. Lindenstrauss*: On total non-norming subspaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 31 (1972), 109—III.
- [5] *В. Д. Мильман*: Геометрическая теория пространств Банаха, Часть II, УМН, 26, (1971), 79—149.
- [6] *D. van Dulst*: On certain subspace of characterictic zero of  $l_1$ , *Compos. Math.*, 28, (1974), 195—201.
- [7] *E. Odell, H. P. Rosenthal*: A double dual characterization of separable Banach spaces containing  $l_1$ , *Israel J. Math.*, 20 (1975), 375—384.
- [8] *C. Bessaga, A. Pelczynski*: Selected topics in infinite-dimensional topology, Warszawa, PWN, 1975.
- [9] *W. J. Davis, W. B. Johnson*: Basic sequences and norming subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces, *Israel J. Math.*, 14 (1973), 353—357.
- [10] *W. J. Davis, W. B. Johnson*: A renorming of non-reflexive Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 37 (1973), 486—488.

*Адрес автора*: Харьков-24, ул. Чайковского, 24, кв. 21, СССР.