N.Ya. Medvedev

К теории многообразий решеточно упорядоченных групп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 32 (1982), No. 3, 364–372

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101811

Czechoslovak Mathematical Journal, 32 (107) 1982, Praha

К ТЕОРИИ МНОГООБРАЗИЙ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

Н. Я. Медведев, Барнаул[1])

(Поступило в редакцию 29/XII 1980 г.)

Пусть $\mathscr{K}_o$, $\mathscr{K}_l$ – категории линейно упорядоченных и решёточно упорядоченных групп соответственно. Как обычно, понятия общей теории групп, отнесённые к этим категориям, отличаются приставками o-, l-, например: o-группа, l-гомоморфизм, o-аппроксимируемая l-группа, l-многообразие и так далее. Для других целей буквы o, l употребляться не будут.

Хорошо известно, что множество l-многообразий $\mathscr{L}$ является решёткой относительно естественно определённых операций $\vee$ и $\wedge$ [7].

l-многообразие $\mathscr{L}W$, определённое тождеством $|x|^2 \vee |y|^{-1} |x| y = |x|^2$, называется l-многообразием жёстко упорядоченных l-групп [4]. В этой статье построены два o-аппроксимируемых l-многообразия V_1 и V_2, таких, что: 1) $V_i \wedge \mathscr{L}W = \mathscr{L}A$ – l-многообразие абелевых l-групп, 2) V_i не являются конечнобазируемыми, 3) V_i не замкнуты относительно лексикорасширений, 4) V_i являются строго свободными l-многообразиями, $(i = 1, 2)$. Исходя из l-многообразий V_i $(i = 1, 2)$ построены o-аппроксимируемые двуступенно разрешимые l-многообразия W_i $(i = 1, 2)$, обладающие свойствами 1)–3). Выписаны базы тождеств l-многообразий V_i, W_i $(i = 1, 2)$.

Из свойств 1), 4) l-многообразий V_i $(i = 1, 2)$ следует, что l-многообразие жёстко упорядоченных l-групп не является наименьшим строго свободным l-многообразием в решётке $\mathscr{L}$, это дает отрицательный ответ на вопрос 10 работы [7].

Отметим, что существование неконечнобазируемых l-многообразий установлено ранее В. М. Копытовым, Н. Я. Медведевым [5] и Т. Фейлом (препринт).

Основыне факты и определения по линейно и решеточно упорядоченным группам можно найти в [3], [9], по теории групп – в [2] и [6]. Как обычно $|x| = x \vee x^{-1}$. $|a| \gg |b|$ означает, что $|a|$ и $|b|$ архимедово неэквивалентны, то есть $|a| > |b|^n$, при $n = 1, 2, \ldots$. Буквой N будем обозначать множество всех натуральных чисел. (G, P) обозначает группу G, наделённую линейным

---

[1]) Работа выполнена автором при прохождении научной стажировки на кафедре математики Высшей технической школы в Кошице.

порядком P. l-многообразие V называется строго свободным l-многообразием, если любая линейно упорядоченная группа $(G, P) \in V$ есть o-гомоморфный образ линейно упорядоченной группы $(F, Q) \in V$, где F-свободная группа [7]. l-многообразие $\mathscr{L}R$, определяемое тождеством $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$, называется l-многообразием o-аннроксимируемых l-групп и совпадает с классом l-групп, аппроксимируемых линейно упорядоченными группами. Любое l-многообразие $V \subseteqq \mathscr{L}R$ будем называть o-аппроксимируемым l-многообразием.

Отметим, что в [7] l-многообразие жёстко упорядоченных групп $\mathscr{L}W$ называется l-многообразием слабо абелевых l-групп и o-аппроксимируемые l-группы называются представимыми l-группами.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $G = A \operatorname{wr} B$ — сплетение групп A и B [3]. Предположим, что A и B линейно упорядочены. Любой элемент $g \in G$ однозначно представим в виде $g = ba_{b_1} \dots a_{b_k}$, где $A_{b_i} \simeq A$, $a_{b_i} \in A_{b_i}$, $b \in B$ и $b_1 < \dots < b_k$ при линейном порядке B и $a_{b_1}^b = a_{b,b}$. Считаем $g = ba_{b_1} \dots a_{b_k} \in P \setminus e$, если $b > e$ в линейно упорядочен ной группе B, либо $b = e$ и $a_{b_k} > e$ в A_{b_k}. Заметим, что при этом линейном порядке $|a_{b_1}| \gg |a_{b_2}|$, если $b_1 > b_2$ и $a_{b_1}, a_{b_2} \neq e$. Назавём такой порядок на группе G порядком типа (А). Отметим, что существует естественный порядковый гомоморфизм (o-гомоморфизм) φ, отображающий линейно упорядоченную по типу (А) группу G на линейно упорядоченную группу B и $\ker \varphi = \prod_{b \in B} A_b$.

Пусть $\{(G_i, P_i), i \in I\}$ — система линейно упорядоченных групп, множество I линейно упорядочено, причём для любой пары индексов $i, j \in I$, $i \leqq j$, задан o-гоморфизм $\pi_i^j : (G_j, P_j) \to (G_i, P_i)$, отображающий линейно упорядоченную группу (G_j, P_j) на линейно упорядоченную группу (G_i, P_i), причём: 1) π_i^i-тождественное отображение (G_i, P_i) для каждого $i \in I$, 2) для всех $i \leqq j \leqq k$ из I имеет место $\pi_i^j \pi_j^k = \pi_i^k$. Тогда система $\{(G_i, P_i), i \in I; \pi_i^j\}$ называется обратным спектром линейно упорядоченных групп. Обратным пределом или пределом обратного спектра линейно упорядоченных групп называется подгруппа декартова l-произведения $D = \overline{\prod_{i \in I}} (G_i, P_i)$, состоящая из элементов $a = (\dots, a_i, \dots)$, для которых $\pi_i^j a_j = a_i$ $(i \leqq j)$. Обратный предел будем обозначать $\varprojlim_I (G_i, P_i)$. Заметим что порядок на D покоординатный и относительно этого порядка D является l-группой.

Предложение 1. *Пусть $\{(G_i, P_i), i \in I; \pi_i^j\}$ — обратный спектр линейно упорядоченных групп. Тогда $\varprojlim_I (G_i, P_i)$ — линейно упорядоченная группа.*

Доказательство. Покажем, что любой элемент $a \in \varprojlim_I (G_i, P_i)$ сравним с единицей в l-группе D. Пусть $a = (\dots, a_i, \dots) \neq e$.Тогда существует $i \in I$, такой, что $a_i \neq e$ в линейно упорядоченной группе (G_i, P_i). Пусть $a_i > e$. Тогда

$a_k = \pi_k^i a_i \geqq e$ в (G_k, P_k) при $k \leqq i$. Если $k > i$, то $e < a_i = \pi_i^k a_k$, но (G_k, P_k) линейно упорядочена, значит $a_k > e$. Это означает, что $a > e$ относительно (покоординатного) l-порядка D. Значит порядок, индуцированный на $\varprojlim_I (G_i, P_i)$ l-порядком D, линеен.

Замечание. Пусть V – l-многообразие и $(G_i, P_i) \in V (i \in I)$. Тогда $\varprojlim_I (G_i, P_i)$ является l-подгруппой l-группы $D = \prod_{i \in I} (G_i, P_i) \in V$ и, значит $\varprojlim_I (G_i, P_i) \in V$.

l-многообразие V называется замкнутым относительно лексикорасширений, если из того, что (G, P) и (H, Q) – линейно упорядоченные группы l-многообразия V, следует, что лексикографическое произведение $\overleftarrow{G \times H} \in V$.

2. l-МНОГООБРАЗИЯ V_1 И W_1

Рассмотрим следующую бесконечную систему тождеств

$$(A) \begin{cases} \text{а)}\ (|z| \vee |x| \vee |y|)^{-1} |[|x|, |x| \vee |y|]| (|z| \vee |x| \vee |y|) \wedge |[|x|, |x| \vee |y|]|^n = \\ \quad = |[|x|, |x| \vee |y|]|^n \quad (n \in N) \\ \text{б)}\ (x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e \end{cases}$$

Пусть V_1 – l-многообразие, определяемое системой тождеств (А). Очевидно $V_1 \subseteqq \mathscr{L}R$. Покажем, вначале, что $V_1 \neq \mathscr{L}A$. Для этого рассмотрим группу $G_0 = (a_0) \operatorname{wr} (b_0)$, где (a_0) и (b_0) – бесконечные циклические группы. Пусть (a_0) и (b_0) линейно упорядочены. Упорядочим G_0 линейно по типу (А) и обозначим P_0 этот поярдок группы G_0, тогда $(G_0, P_0) \in V_1$. Действительно рассмотрим произвольные элементы $x, y, z \in G_0$, такие, что $e < x < y \leqq z$ в линейном порядке P_0. Тогда, если $[x, y] = e$, то тождества а) выполнены автоматически. Если же $[x, y] \neq e$, то тогда, как следует из определения линейного порядка на типа (А)

$$z^{-1}|[x, y]|\, z \geqq y^{-1}|[x, y]|\, y \gg |[x, y]|\,.$$

Огсюда следует выполнимость тождеств а) для каждого $n \in N$. Так как (G_0, P_0) линейно упорядочена, то тождество б) выполнено очевидным образом. Более того справедлива

Лемма 1. *Пусть A – линейно упорядоченная абелева группа, B – линейно ипорядоченная группа из l-многообразия V_1. Тогда линейно упорядоченное по типу (A) сплетение $G = A \operatorname{wr} B$ принадлежит l-многообразию V_1.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные элементы $e < x < y < z$ из линейно упорядоченной группы (G, P). Если $[x, y] = e$, то все тождества а) из (А) справедливы. Считаем, что $[x, y] \neq e$. Если $\varphi([x, y]) \neq e$ при естественном o-гомоморфизме $G = A \operatorname{wr} B$ на B, то выполнимость тождеств а) следует из выполнимости их на B и из определения порядка типа (А) на G. Если же $e \neq$

$\neq [x, y] \in \ker \varphi = \prod\limits_{b \in B} A_b$, то по определению порядка типа (А) и того, что $z, y \bar{\in} \ker \varphi$ следует, что

$$z^{-1}|[x, y]|\, z \geqq y^{-1}|[x, y]|\, y \gg |[x, y]|\,.$$

Отсюда вытекает справедливость тождеств а) на (G, P). Поскольку (G, P) линейно упорядочена, то тождество б) выполняется на (G, P) очевидным образом.

Напомним, вкратце, вложение Магнуса. Пусть группа $G = gp(g_i, i \in I)$ порождена элементами $\{g_i, i \in I\}$. Пусть $G \cong F_I/R$ – её представление в виде фактор-группы F_I по нормальной подгруппе R, где F_I – свободная группа с множеством свободных порождающих $\{f_i, \ i \in I\}$. Пусть A_I – свободная абелева группа с множеством свободных порождающих $\{a_i, \ i \in I\}$ и $H = A_I \operatorname{wr} G$. Пусть $\alpha_i \in \prod\limits_{g \in G} (A_I)_g$ определяются по формулам:

$$\alpha_i(g) = \begin{cases} a_i & \text{если} \quad g = e \quad (i \in I) \\ e & \text{если} \quad g \neq e \end{cases}$$

Теорема (Магнус). *Отображение группы F_I в группу H, заданное отображением $\mu : f_i \to g_i\alpha_i$ её свободных порождающих, индуцирует мономорфизм $\bar{\mu}$ группы $F_I/[R, R]$ в H.*

Доказательство можно найти в [10].

Обозначим этот мономорфизм $\bar{\mu}$ через $\bar{\mu}_2$ и положим $H = H_2$. Далее применяем теорему Магнуса к группе $F_I/[R, R] = F_I/R^{(1)}$, получаем существование мономорфизма $\bar{\mu}_3$ группы $F_I/R^{(2)}$ в $H_3' = A_I \operatorname{wr} \bar{\mu}_2(F_I/R^{(1)}) \subseteqq H_3 = A_I \operatorname{wr} H_2$. Отметим, что если φ_3-естественный гомоморфизм H_3 на H_2, то $\varphi_3(\bar{\mu}_3(F_I/R^{(2)})) = \bar{\mu}_2(F_I/R^{(1)})$. Теперь опять применяем теорему Магнуса к группе $F_I/R^{(2)}$, получаем существование мономорфизма $\bar{\mu}_4$ группы $F_I/R^{(3)}$ в $H_4' = A_I \operatorname{wr} \bar{\mu}_3(F_I/R^{(2)}) \subseteqq A_I \operatorname{wr} H_3 = H_4$. Опять, если φ_4-естественный гомоморфизм H_4 на H_3, то $\varphi_4(\bar{\mu}_4(F_I/R^{(3)}) = \bar{\mu}_3(F_I/R^{(2)})$. Теперь применаем теорему Магнуса к группе $F_I/R^{(3)}$ и так далее. Получаем последовательность групп H_n, таких, что $H_{k+1} = A_I \operatorname{wr} H_k$. И для каждого n определён мономорфизм μ_n группы $F_I/R^{(n-1)}$ в группу H_n. Причем, если φ_n-естественный гомоморфизм H_n на H_{n-1}, то $\varphi_n(\bar{\mu}_n(F_I/R^{(n-1)})) = \bar{\mu}_{n-1}(F_I/R^{(n-2)}) \subseteqq H_{n-1}$. Положим $H_1 = G$ и $\bar{\mu}_1$-естественный мономорфизм F/R на $G = H_1$. Очевидно, что $\varphi_2(\bar{\mu}_2(F_I/R^{(1)})) = \bar{\mu}_1(F_I/R) = G$. Предположим теперь что $(G, P) = (H_1, P_1)$ – линейно упорядоченная группа из l-многообразия V_1. Тогда упорядочивая линейно группы $H_2, H_3, \ldots, H_n, \ldots$ по типу (А) (что возможно по лемме 1), мы получаем последовательность линейно упорядоченных групп $(H_1, P_1), (H_2, P_2) \ldots, (H_n, P_n), \ldots$ из l-многообразия V_1. При этом естественные гомомофизмы φ_n являются o-гомоморфизмами. Если положить $\pi_i^j = \varphi_{i+1} \ldots \varphi_j$, то π_i^j является o-гомоморфизмом (H_j, P_j) на (H_i, P_i) при $j > i$. Если $i = j$, то π_i^i считаем тождественным отображением (H_i, P_i) на себя. Очевидно, что $\pi_i^j\pi_j^k = \pi_i^k$ $(i \leqq j \leqq k)$. Значит система

$\{(H_i, P_i),\ i \in N;\ \pi_i^j\}$ – обратный спектр линейно упорядоченных групп. Тогда по предложению 1 $(H^*, P^*) = \varprojlim_N (H_i, P_i)$ – линейно упорядоченная группа из l-многообразия V_1. Поскольку $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R^{(n)} = e$ и $\pi_i^j(\bar{\mu}_j(F_I/R^{(j-1)})) = \bar{\mu}_i(F_I/R^{(i-1)})$, то свободная группа F_I изоморфно вложена в $\varprojlim_N (H_i, P_i) = (H^*, P^*)$ и, значит, линейно упорядочена. Пусть Q_I – линейный порядок F_I, индуцированный линейным порядком P^*. Поскольку $(F_I, Q_I) \subseteqq (H^*, P^*) \in V_1$, то $(F_I, Q_I) \in V_1$. Напомним, что (H^*, P^*) есть l-подгруппа l-группы $D = \prod\limits_{i \in N} (H_i, P_i)$. Пусть l-подгруппа $D_1 \subseteqq D$ состоит из элементов D, имеющих единичную первую компоненту. Тогда D_1 – l-идеал D. Пусть ψ – l-гомоморфизм D на $D/D_1 \cong (H_1, P_1) = (G, P)$. Тогда ограничение ψ на l-подгруппу (F_I, Q_I) является o-гомоморфизмом линейно упорядоченной группы (F_I, Q_I) на линейно упорядоченную группу $(H_1, P_1) = (G, P)$. Значит линейно упорядоченная группа $(G, P) \in V_1$ есть o-гомоморфный образ свободной линейно упорядоченной группы $(F_I, Q_I) \in V_1$. Тем самым доказана

Теорема 1. V_1 – *строго свободное l-многообразие.*

Предложение 2. *l-многообразие V_1 не замкнуто относительно лексикорасширений.*

Доказательство. Рассмотрим линейно упорядоченную по типу (A) группу (G_0, P_0). Пусть (c_0) – линейно упорядоченная бесконечная группа, $c_0 > e$. Рассмотрим $(H_0, S_0) = \overleftarrow{G_0 \times (c_0)}$. Тогда $(H_0, S_0) \notin V_1$. Действительно, тождества а) нарушаются на (H_0, S_0) при $x = a_0$, $y = b_0$, $z = c_0$ и $n \geqq 2$, так как в этом случае

$$(|z| \vee |x| \vee |y|)^{-1} \left|[|x|, |x| \vee |y|]\right| (|z| \vee |x| \vee |y|) =$$
$$= c_0^{-1} \left|[a_0, b_0]\right| c_0 = \left|[a_0, b_0]\right|.$$

Отсюда

$$c_0^{-1} \left|[a_0, b_0]\right| c_0 \wedge \left|[a_0, b_0]\right|^n = \left|[a_0, b_0]\right| \wedge \left|[a_0, b_0]\right|^n =$$
$$= \left|[a_0, b_0]\right| \neq [a_0, b_0]|^n$$

при $n \geqq 2$.

Пусть $N_0 = \langle a, b, c \,|\, [a, b] = c, [c, a] = [c, b] = e \rangle$ – свободная 2-ступенно нильпотентная группа. Определяем на N_0 линейный порядок Q_0 следующим образом: $N_0 \ni g = a^m b^k c^p > e$ при линейном порядке Q_0, если $m > 0$, либо $m = 0$ и $k > 0$, либо $m = k = 0$ и $p > 0$.

Лемма 2. *Пусть l-многообразие $V \subseteqq \mathscr{L}W$ и $V \neq \mathscr{L}A$. Тогда V содежит линейно упорядоченную группу (N_0, Q_0).*

Доказательство. Пусть (G, P) произвольная неабелева линейно упорядоченная группа из l-многообразия V. Тогда система выпуклых подгрупп G центральна [4]. Поскольку G неабелева, то существуют такие $g, h \in G$, что $q = [g, h] \neq e$. Можно считать, что, $g > e$, $h > e$. Если $q = [g, h] < e$, то поменяв g и h местами, можно считать, что $g > e$. Элемент q определяет скачок ывпуклых подгрупп $\bar{G}_\alpha \supset G_\alpha$ линейно упорядоченной группы (G, P) и $q \in \bar{G}_\alpha \setminus G_\alpha$. Рассмотрим естественно линейно упорядоченную фактор-группу $(G/G_\alpha, \bar{P})$. Очевидно, что $\bar{q} > e, \bar{g} > e, \bar{h} > e$, где $\bar{q}, \bar{g}, \bar{h}$ — образы элементов q, g, h соответственно. Заменяя $\bar{g}, \bar{h}$ на $\bar{g}\bar{h}, \bar{h}$ можно считать, что $\bar{g} > \bar{h} > e$, $\bar{q} > e$. Подгруппа $gp(\bar{g}, \bar{h}, \bar{q}) = H$, порождённая элементами $\bar{g}, \bar{h}, \bar{q}$ — 2-ступенно нильпотентная группа изоморфная группе N_0 и линейно упорядоченная. Пусть $\bar{P}'$-линейный порядок H. Известно [1], что подгруппа $(\bar{q})$ всегда выпукла, поэтому $\bar{h} \gg \bar{q}$. Рассмотрим счётную декартову l-степень группы (H, P') и в ней элементы $a = (e, \bar{g}, \bar{g}^2, \ldots)$, $b = (\bar{h}, \bar{h}, \bar{h}, \ldots)$. Пусть $\bar{a}, \bar{b}$ — образы этих элементов в фактор-группе по прямой l-степени $(H, \bar{P}')$. Очевидно, что $\bar{a} \gg \bar{b} \gg \bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$, поэтому линейно упорядоченная группа $\bar{H} = gp(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ o-изоморфна (N_0, Q_0).

Теорема 2. $V_1 \wedge \mathscr{L}W = \mathscr{L}A$.

Доказательство. Пусть $V_1 \wedge \mathscr{L}W = V \neq \mathscr{L}A$. Тогда $V \subseteqq \mathscr{L}W$, V_1, и по лемме 2 линейно упорядоченная группа $(N_0, Q_0) \in V$. Покажем, что $(N_0, Q_0) \bar{\in} V_1$. Действительно, тождества а) на (N_0, Q_0) невыполними при $x = b$, $y = z = a$ и $n \geqq 2$, так как

$$a^{-1}|[b, a]|\, a \wedge |[b, a]|^n = |[b, a]| \wedge |[b, a]|^n = |[b, a]| \neq |[b, a]|^n$$

при $n \geqq 2$.

Значит $(N_0, Q_0) \bar{\in} V_1 \supseteqq V$. Следовательно $V_1 \wedge \mathscr{L}W = \mathscr{L}A$.

Теорема 3. *l-многообразие V_1 не является конечнобазируемым.*

Доказателство. Рассмотрим l-многообразия U_n, определяемые следующими системами тождеств

$$(\mathrm{A})_n \begin{cases} \text{а)}\ (|z| \vee |x| \vee |y|)^{-1}\, |[|x|, |x| \vee |y|]|\, (|z| \vee |x| \vee |y|) \wedge \\ \qquad \wedge |[|x|, |x| \vee |y|]|^k = |[|x|, |x| \vee |y|]|^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \\ \text{б)}\ (x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e \end{cases}$$

Очевидно, что $U_1 \supseteqq U_2 \supseteqq \ldots \supseteqq U_n \supseteqq \ldots$. Покажем, что $U_n \neq U_{n+1}$. Рассмотрим группу B_n, являющуюся полупрямым произведением естественно упорядоченной аддитивной группе действительных чисел R с помощью бесконечной циклической группы (g_n) и автоморфизм сопряжения задаётся формулой:

$$g_n^{-1}\, r\, g_n = r^{g_n} = n \cdot r \quad (r \in R)$$

Считаем $B_n \ni g = g_n^k r \geqq e$, если $k > 0$, либо $k = 0$ и $r \geqq 0$ в линейно упорядоченной группе R. Обозначим этот порядок L_n. Тогда (B_n, L_n) — линейно упорядоченная группа. Непосредственная проверка показывает, что тождества а) и б) из (A_n) на (B_n, L_n) выполнены, то есть $(B_n, L_n) \in U_n$. Покажем, что $(B_n, L_n) \mathrel{\bar\in} U_{n+1}$. Действительно, тождество

$$(|z| \vee |x| \vee |y|)^{-1} \, |[|x|, |x| \vee |y|]| \, (|z| \vee |x| \vee |y|) \wedge |[|x|, |x| \vee |y|]|^{n+1} = \\ = |[|x|, |x| \vee |y|]|^{n+1}$$

на (B_n, L_n) нарушается при $x = r \neq 0$, $y = z = g_n$. Действительно, положим $|[r, g_n]| = r_1(\neq 0)$ и тогда $g_n^{-1} r_1 g_n = nr_1$. Отсюда $g_n^{-1} r_1 g_n \wedge (n+1) r_1 = nr_1 \wedge (n+1) r_1 = nr_1 \neq (n+1) r_1$. Следовательно, l-многообразие V_1 являясь пересечением строго убывающей последовательности l-многообразий U_n, не может допускать конечной базы тождеств.

Если к тождествам (A), определяющим l-многообразие V_1 добавить тождество

$$(*) \qquad [|y| \wedge |[u, v]|, |z| \wedge |[w, p]|] = e$$

то мы получим двуступенно разрешимое l-многообразие W_1. Заметим, что $W_1 \neq \mathscr{L}A$. Действительно, рассмотрим линейно упорядоченную по типу (A) группу (G_0, P_0). Непосредственная проверка показывает, что на (G_0, P_0) тождество $(*)$ выполнено, то есть $(G_0, P_0) \in W_1$ и, следовательно, $W_1 \neq \mathscr{L}A$.

Следствие. *Двуступенно разрешимое l-многообразие W_1 обладает следующими свойствами*:

1) *W_1 не является конечнобазируемым,*
2) *$W_1 \wedge \mathscr{L}W = \mathscr{L}A$ – l-многообразие абелевых l-групп,*
3) *W_1 не замкнуто относительно лексикорасширений.*

Доказательство. 1) Заметим, что на o-группах (B_n, L_n), определённых в доказательстве теоремы 3, тождество $(*)$ справедливо. Далее рассуждения дословно повторяют доказателдство теоремы 3.

2) Очевидно, что $W_1 \subseteqq V_1$. По теореме 2 $V_1 \wedge \mathscr{L}W = \mathscr{L}A$, значит и $W_1 \wedge \mathscr{L}W = \mathscr{L}A$.

3) Следует из предложения 2 и того, что на линейно упорядоченной группе (H_0, S_0) тождество $(*)$ выполнено.

3. l-МНОГООБРАЗИЯ V_2 И W_2

Перейдём к определению l-многообразий V_2 и W_2. Рассмотрим следующую бесконечную систему тождеств

$$(\text{Б}) \begin{cases} \text{а) } (|z| \vee |x| \vee |y|)^{-1} \, |[|x|, |x| \vee |y|]|^n (|z| \vee |x| \vee |y|) \wedge \\ \quad \wedge |[x|, |x| \vee |y|]) = (|z| \vee |x| \vee |y|)^{-1} \, |[|x|, |x| \vee \\ \quad \vee |y|]|^n (|z| \vee |x| \vee |y|) \quad (n \in N) \\ \text{б) } (x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e \end{cases}$$

Пусть V_2 — l-многообразие, определяемое системой тождеств (Б). $G = A \operatorname{wr} B$ — сплетение групп A и B. Предположим, что группы A и B линейно упорядочены. Любой элемент $g \in G$ однозначно представим в виде $g = ba_{b_1} \ldots a_{b_k}$, где $a_{b_i} \in A_{b_i}$, $b \in B$ и $b_1 < \ldots < b_k$ при линейном порядке B. Считаем $g = ba_{b_1} \ldots a_{b_k} \in P \setminus e$ если $b > e$ в линейно упорядоченной группе B, либо $b = e$ и $a_{b_1} > e$. Заметим, что при этом порядке $|a_{b_2}| \ll |a_{b_1}|$, если $b_2 > b_1$. Назовём такой линейный порядок G — линейным порядком типа (Б). Отметим сразу, что $V_2 \neq \mathscr{L}A$, так как V_2 содержит группу $G_0 = (a_0) \operatorname{wr} (b_0)$ — сплетение бесконечных циклических групп, упорядоченную по типу (Б). Доказательство аналогично уже проделанному в §2 для упорядочения по типу (А).

Теорема 4. *l-многообразие V_2, определяемое системой тождеств* (В), *обладает следующими свойствами*:

1) *V_2 является строго свободным l-многообргием,*
2) $V_2 \wedge \mathscr{L}W = \mathscr{L}A$,
3) *V_2 не допускает конечной базы тождеств,*
4) *V_2 не замкнуто относительно лексикорасширений.*

Доказательство тоеремы 4 аналогично рассуждениям, проведённым ранее, с той лишь разницей, что везде упорядочение по типу (А) надо заменить на уплрядочение по типу (Б) и вместо групп B_n рассмотреть группы B'_n, являющиеся полупрямым произведением аддитивной группы действительных чисел R с помощью бесконечной циклической группы (h_n), где автоморфизм сопряжения определяется формулой:

$$h_n^{-1}\, r\, h_n = r^{h_n} = \frac{1}{n}\, r\,.$$

Порядок L'_n определяется аналогично L_n. Далее, если к тождествам (Б) добавить тождество $(*)$, то мы получим двуступенно разрешимое l-многообразие W_2. Так как $G_0 = (a_0) \operatorname{wr} (b_0)$, линейно упорядоченная по типу (Б), содержится в W_2, то $W_2 \neq \mathscr{L}A$. Аналогично предыдущему получаем

Следствие. *Двуступенно разрешимое l-многообразие W_2 обладает следующими свойствами*:

1) *W_2 не является конечнобазируемым,*
2) $W_2 \wedge \mathscr{L}W = \mathscr{L}A$,
3) *W_2 не замкнуто относительно лексикорасширений.*

Литература

[1] *А. А. Виноградов:* Метабелевы частично упорядоченные группы, Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, *34* (1963), 20—26.

[2] *М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков:* Основы теории групп, Москва, 1972.

[3] *А. И. Кокорин, В. М. Копытов:* Линейно упорядоченные группы, Москва, 1972.

[4] *В. М. Копытов, Н. Я. Медведев:* О линейно упорядоченных группах, система выпуклых подгрупп которых центральна, Мат. заметки *19*, 1 (1976), 85—90.
[5] *В. М. Копытов, Н. Я. Медведев:* О многообразиях решёточно упорядоченных групп, Алгебра и Логика, *16* (1977), 417—423.
[6] *А. Г. Курош:* Теория групп, Москва, 1967.
[7] *J. Martinez:* Varieties of lattice ordered groups, Math. Z., *137* (1974), 265—284.
[8] *Н. Я. Медведев:* О решётках многообразий решёточно упорядоченных групп и алгебр Ли, Алгебра и Логика, *16* (1977), 40—45.
[9] *Л. Фукс:* Частично упорядоченные алгебраические системы, Москва, 1965.
[10] *R. H. Fox:* Free differential calculus, I. Derivation in free group ring, Ann. of Math., (2) *57* (1953), 547—560.

Адрес автора: СССР, 656 099, Барнаул-99, пр. Социалистический 68, Алтайский Государственный университет, кафедра алгебры и математической логики.