Czechoslovak Mathematical Journal

František Machala

# Über projektive Erweiterung affiner Klingenbergscher Ebenen

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 29 (1979), No. 1, 116–129

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101584

Czechoslovak Mathematical Journal, 29 (104) 1979, Praha

# ÜBER PROJEKTIVE ERWEITERUNG AFFINER KLINGENBERGSCHER EBENEN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingengangen am 7. Juni 1977)

Der Satz über die Erweiterung jeder affinen Ebene zur projektiven Ebene gehört zu den klassischen Ergebnissen. Die Lösung des Erweiterungsproblems für affine und projektive Hjelmslev-Ebenen ist sehr schwierig, da sie eine Untersuchung komplizierter kombinatorischer Beziehungen erfordert. In diesem Bereich wurden jedoch einige bedeutende Teilergebnisse erzielt ([1]–[5]).

W. KLINGENBERG bewies schon in seiner Grundarbeit [5], daß jede desarguessche affine Hjelmslev-Ebene zur projektiven Hjemslev-Ebene erweitert werden kann. D. A. DRAKE bewies in [3], daß jede endliche uniforme Hjelmslev-Ebene projektiv erweiterbar ist. Dieses Ergebnis verallgemeinerte er in [4] auf stark $n$-uniforme affine Hjemslev-Ebenen mit gleichmäßigem Parallelismus. Hierselbst wurde auch das bedeutsame Beispiel einer affinen Hjemslev-Ebene, die man projektiv nicht erweitern kann, angeführt.

In der vorliegenden Arbeit werden notwendige und hinreichende Bedingungen zur projektiven Erweiterung affiner Klingenbergscher Ebenen, welche eine Verallgemeinerung der Hjemslev-Ebenen darstellen, gefunden. Diese Bedingungen beschreiben die Problematik projektiver Erweiterung affiner Klingenbergscher Ebenen in ihrer ganzen Breite und bestätigen die Schwierigkeit einer globalen Lösung dieses Erweiterungsproblems. Im dritten Teil der Arbeit wird die Verwendung gefundener Bedingungen auf einem speziellen Fall der desarguesschen Klingenbergschen Ebenen vorgeführt.

## I

**Definition 1.** Eine projektive Klingenbergsche Ebene (kurz PK-Ebene) ist definiert als ein Tripel $(\pi, \pi', \varkappa)$, wo $\pi = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ eine Inzidenzstruktur, $\pi' = (\mathscr{P}', \mathscr{L}', \mathrm{I}')$ eine projektive Ebene und $\varkappa : \pi \to \pi'$ ein Epimorphismus sind ([8], Def. 1, 2, 3), wobei

(1) $$x, y \in \mathscr{P}, \quad x\varkappa \neq y\varkappa \Rightarrow \exists!\ P \in \mathscr{L}; \quad x, y \mathrm{I} P,$$

(2) $$X, Y \in \mathscr{L}, \quad X\varkappa \neq Y\varkappa \Rightarrow \exists!\ p \in \mathscr{P}; \quad p \mathrm{I} X, Y.$$

Unter einer PK-Ebene werden wir oft direkt die Inzidenzstruktur $\pi$ verstehen. Die durch die Punkte $x, y$ nach (1) eindeutig bestimmte Gerade $P$ bezeichnen wir mit $P = xy$ und mit $p = X \sqcap Y$ den nach (2) durch die Geraden $X$, $Y$ eindeutig bestimmten Punkt $p$.

Es sei $\pi = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ eine PK-Ebene und seien $o, e, u, v$ solche Punkte aus $\mathscr{P}$, daß keine drei von $o\varkappa, e\varkappa, u\varkappa, v\varkappa$ auf einer Geraden aus $\pi'$ liegen. Wir bezeichen $E = oe$, $X = ou$, $Y = ov$, $U = uv$, $e_X = ve \sqcap X$ und setzen $\mathscr{Q} = \{x \in \mathscr{P} \mid x \mathrm{I} X\}$, $\mathscr{R}' = \{x \in \mathscr{Q} \mid x\varkappa = u\varkappa\}$, $\mathscr{R}_0 = \{x \in \mathscr{Q} \mid x\varkappa = o\varkappa\}$, $\mathscr{R} = \mathscr{Q} \setminus \mathscr{R}'$, $\mathscr{Q}_1 = \{(a, b) \in \mathscr{Q} \times \mathscr{Q} \mid b \in \mathscr{R}' \Rightarrow a \in \mathscr{R}'\}$, $\mathscr{Q}_2 = \{(a, b) \in \mathscr{Q} \times \mathscr{Q} \mid a \in \mathscr{R}' \Rightarrow b \in \mathscr{R}'\}$.

Wir definieren eine Abbildung $\varrho : \mathscr{Q}_1 \to \mathscr{P}$ durch folgende Vorschriften (P1)–(P3):

(P1) Für jedes Paar $(x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ setzen wir $w = vy \sqcap E$, $s = vx \sqcap uw$ und $s = (x, y)^\varrho$.

(P2) Für jedes Paar $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$ setzen wir $n = yv \sqcap E$, $n_1 = nu \sqcap ev$, $s = on_1 \sqcap xv = (x, y)^\varrho$.

(P3) Für jedes Paar $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ setzen wir $h = xv \sqcap E$, $w = yv \sqcap E$, $w_1 = uw \sqcap ev$, $s = ow_1 \sqcap uh = (x, y)^\varrho$.

$\varrho$ ist eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{Q}_1$ auf die Menge $\mathscr{P}$ [8]. Gilt $s = (x, y)^\varrho$, so folgt nach (P1)–(P3) $s\varkappa$ non $\mathrm{I}'$ $U\varkappa \Leftrightarrow (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$; $s\varkappa \mathrm{I}' U\varkappa, s\varkappa \neq v\varkappa \Leftrightarrow (x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$; $s\varkappa = v\varkappa \Leftrightarrow (x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$.

Ferner definieren wir eine Abbildung $\sigma : \mathscr{Q}_2 \to \mathscr{L}$ durch (L1)–(L3):

(L1) Für jedes Paar $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ setzen wir $n = mv \sqcap E$, $n_1 = nu \sqcap ve$, $p = on_1 \sqcap U$, $z = vk \sqcap E$, $q = uz \sqcap Y$ und $P = pq = (m, k)^\sigma$.

(L2) Für jedes Paar $(m, k) \in \mathscr{R} \in \mathscr{R}'$ setzen wir $h = kv \sqcap E$, $w = hu \sqcap ev$, $q = ow \sqcap U$ und $P = mq = (m, k)^\sigma$.

(L3) Für jedes Paar $(m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ sezten wir $h = kv \sqcap E$, $q = uh \sqcap Y$ und $P = mq = (m, k)^\sigma$.

$\sigma$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathscr{Q}_2$ auf $\mathscr{L}$ [8]. Ist $P = (m, k)^\sigma$, so $P\varkappa \neq U\varkappa$, $v\varkappa$ non $\mathrm{I}'$ $P\varkappa \Leftrightarrow (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$; $P\varkappa \neq U\varkappa$, $v\varkappa \mathrm{I}' P\varkappa \Leftrightarrow (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$; $P\varkappa = U\varkappa \Leftrightarrow (m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$.

Im folgenden setzen wir $(x, y)^\varrho = [x, y]\ \forall (x, y) \in \mathscr{Q}_1$, $(m, k)^\sigma = \langle m, k \rangle\ \forall (m, k) \in \mathscr{Q}_2$. Nach (L3) und (L2) ergibt sich $U = \langle u, u \rangle$, $Y = \langle o, u \rangle$ und nach (P2), (P3), (L3) dann $[x, y] \mathrm{I} U \Leftrightarrow x = u$.

**Lemma 1.** *Setzt man $[k^\eta, e_X] \mathrm{I} \langle o, k \rangle$ für jedes Element $k$ aus $\mathscr{R}'$, so ist $\eta$ eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{R}'$ auf die Menge $\mathscr{R}_0$ mit $u^\eta = o$.*

Beweis. a) $\eta$ ist eine Abbildung von $\mathscr{R}'$ in $\mathscr{R}_0$: Nach (L2) gilt $\langle o, k \rangle \varkappa = Y\varkappa$ und wegen $(eu)\varkappa \neq Y\varkappa$ schneiden sich die Geraden $\langle o, k \rangle$, $eu$ in einem einzigen Punkt $s$ mit $s\varkappa \mathrm{I}' Y\varkappa$, $s\varkappa \neq v\varkappa$. Nach (P1) gilt $s = [x, e_X]$ mit $x \in \mathscr{R}_0$ und unserer Vorschrift nach ist $x = k^\eta$.

b) $\eta$ ist eine Abbildung von $\mathscr{R}'$ auf $\mathscr{R}_0$: Es sei $k'$ ein beliebiges Element aus $\mathscr{R}_0$. Wird $s = [k', e_X]$ gesetzt, so ist nach (P1) $s\varkappa \mathrm{I}' Y\varkappa$. Wegen $s \mathrm{I} eu$ folgt $o\varkappa \neq s\varkappa$ und mithin gibt es genau eine Gerade $r = os$. Wegen $r\varkappa = Y\varkappa$ erhält man nach (L2) $r = \langle o, k \rangle$ mit $k \in \mathscr{R}'$. Unserer Vorschrift nach folgt daraus $k' = k^\eta$.

c) $\eta$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathscr{R}'$ auf $\mathscr{R}_0$: Sind $k_1, k_2$ aus $\mathscr{R}'$ mit $k_1 \neq k_2$, so $\langle o, k_1 \rangle \neq \langle o, k_2 \rangle$ und $\langle o, k_1 \rangle \sqcap eu \neq \langle o, k_2 \rangle \sqcap eu$. Daraus folgt aber $[k_1^\eta, e_X] \neq [k_2^\eta, e_X]$, also $k_1^\eta \neq k_2^\eta$.

d) Ist $k = u$, so $Y = \langle o, k \rangle$ und nach (P1) gilt $k^\eta = o$.

**Lemma 2.** *Es sei $(x, k)$ aus $\mathscr{R}' \times \mathscr{R}$. Durch die Vorschrift $[x, m^{\omega(x,k)}] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ $\forall m \in \mathscr{R}$ ist eine bijektive Abbildung $\omega(x, k)$ der Menge $\mathscr{R}$ auf sich definiert, wobei gilt*

(A1) $m\varkappa = (m^{\omega(x,k)})\,\varkappa$.

Beweis. a) $\omega(x, k)$ ist eine die Bedingung (A1) erfüllende Abbildung von $\mathscr{R}$ in $\mathscr{R}$: Ist $m$ ein beliebiges Element aus $\mathscr{R}$, so gilt nach (L1) $\langle m, k \rangle \varkappa \neq U\varkappa$, $v\varkappa$ non I' non I' $\langle m, k \rangle \varkappa$. Wegen $x \in \mathscr{R}'$ gilt $(xv)\,\varkappa = U\varkappa$ und die Geraden $xv$, $\langle m, k \rangle$ schneiden sich in einem einzigen Punkt $s$ mit $s\varkappa \mathrm{I}' U\varkappa$, $s\varkappa \neq v\varkappa$. Nach (P2) ergibt sich $s = [x, m']$ mit $m' \in \mathscr{R}$ und wegen $[x, m'] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ ist $m' = m^{\omega(x,k)}$. Wird $\langle m, k \rangle \sqcap U = p$ gesetzt, so ist $s\varkappa = p\varkappa$ und durch Vergleich von (P2) und (L1) erhält man $m\varkappa = (m^{\omega(x,k)})\,\varkappa$.

b) $\omega(x, k)$ ist eine Abbildung von $\mathscr{R}$ auf $\mathscr{R}$: Es sei $m'$ ein Element aus $\mathscr{R}$. Setzt man $s = [x, m']$, so gilt nach (P2) $s\varkappa\, I'\, U\varkappa$, $s\varkappa \neq v\varkappa$. Bestimmen wir nach (L1) zum gegebenen Punkt $k$ den Punkt $q$ auf der Geraden $Y$, so ist $q\varkappa \neq v\varkappa$. Wegen $q\varkappa \neq s\varkappa$ gibt es genau eine Gerade $r = sq$, wo $r\varkappa \neq U\varkappa$, $v\varkappa$ non I' $r\varkappa$. Nach (L1) ist also $r = \langle m, k \rangle$ mit $m \in \mathscr{R}$. Aus $s \mathrm{I} r$ folgt dann $m' = m^{\omega(x,k)}$.

c) $\omega(x, k)$ ist eine bijektive Abbildung: Sind $m_1, m_2 \in \mathscr{R}$ mit $m_1 \neq m_2$, dann $\langle m_1, k \rangle \neq \langle m_2, k \rangle$ und $xv \sqcap \langle m_1, k \rangle \neq xv \sqcap \langle m_2, k \rangle$. Nach a) erhält man daraus $m_1^{\omega(x,k)} \neq m_2^{\omega(x,k)}$.

Durch (P1)–(P3) und (L1)–(L3) lassen sich die folgenden Lemmas ähnlich wie die Lemmas 1 und 2 beweisen.

**Lemma 3.** *Es sei $(y, k)$ aus $\mathscr{R} \times \mathscr{R}'$. Durch die Vorschrift $[m^{\psi(y,k)}, y] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ $\forall m \in \mathscr{R}'$ ist eine bijektive Abbildung $\psi(y, k)$ der Menge $\mathscr{R}'$ auf sich definiert, wobei gilt*

(A2) $u = u^{\psi(y,u)}$ $\forall y \in \mathscr{R}$.

**Lemma 4.** *Es sei $(x, m) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$. Durch die Vorschrift $[x, k^{\varphi(x,m)}] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ $\forall k \in \mathscr{R}'$ ist eine bijektive Abbildung $\varphi(x, m)$ der Menge $\mathscr{R}'$ auf sich definiert.*

**Lemma 5.** *Es sei $(y, m) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$. Durch die Vorschrift $[k^{\xi(y,m)}, y] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ $\forall k \in \mathscr{R}'$ ist eine bijektive Abbildung $\xi(y, m)$ der Menge $\mathscr{R}'$ auf sich definiert, wobei gilt*

(A3) $u = u^{\xi(y,u)}$ $\forall y \in \mathscr{R}'$.

Für die in Lemmas 1–5 definierten Abbildungen $\eta$, $\omega(x, k)$, $\psi(y, k)$, $\varphi(x, m)$, $\xi(y, m)$ beweisen wir nun folgende Behauptungen (B1)–(B7) und (B).

**(B)** *Für beliebige* $x_1, y_1 \in \mathscr{R}$ *und* $x_2, y_2 \in \mathscr{R}'$ *gibt es genau ein Paar* $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$ *mit* $[x_1, y_1] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$, $y_2 = k^{\varphi(x_2, m)}$.

Beweis. Setzt man $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$, so $s_1\varkappa$ non $\mathrm{I}'\, U\varkappa$, $s_2\varkappa = v\varkappa$ und daher gibt es genau eine Gerade $P = \langle m, k \rangle$ mit $s_1, s_2 \mathrm{I}\, P$. Wegen $P\varkappa \neq U\varkappa$, $v\varkappa \mathrm{I}'\, P\varkappa$ gilt $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$. Aus $[x_2, y_2] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ folgt nach Lemma 4 $y_2 = k^{\varphi(x_2, m)}$.

**(B1)** *Für beliebige* $x_1, y_1, y_2 \in \mathscr{R}$ *und* $x_2 \in \mathscr{R}'$ *gibt es genau ein Paar* $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ *mit* $[x_1, y_1] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$, $y_2 = m^{\omega(x_2, k)}$.

**(B2)** *Für beliebige* $y_1 \in \mathscr{R}$ *und* $x_1, x_2, y_2 \in \mathscr{R}'$ *gibt es genau ein Paar* $(m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ *mit* $x_1 = m^{\psi(y_1, k)}$, $x_2 = k^{\xi(y_2, m)}$.

**(B3)** *Für beliebige* $x_1, x_2 \in \mathscr{R}'$, $y_1, y_2 \in \mathscr{R}$ *mit* $y_1\varkappa \neq y_2\varkappa$ *gibt es genau ein Paar* $(m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ *mit* $x_1 = m^{\psi(y_1, k)}$, $x_2 = m^{\psi(y_2, k)}$.

Zum Beweis der Behauptungen (B1)–(B3): Wir setzen $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$ und ähnlich wie im Beweis der Behauptung (B) beweisen wir, daß durch die Punkte $s_1, s_2$ genau eine Gerade $\langle m, k \rangle$ geht. Mit den Definitionen von $\omega(x, k)$, $\psi(y, k)$, $\varphi(x, m)$ und $\xi(y, m)$ beweisen wir dann (B1)–(B3).

**(B4)** *Für beliebige* $m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathscr{R}$ *mit* $m_1\varkappa = m_2\varkappa$, $k_1\varkappa \neq k_2\varkappa$ *gibt es genau ein* $x \in \mathscr{R}'$ *mit* $m_1^{\omega(x, k_1)} = m_2^{\omega(x, k_2)}$, *wobei* $x = u$ *genau dann, wenn* $m_1 = m_2$.

Beweis. Setzt man $P_1 = \langle m_1, k_1 \rangle$, $P_2 = \langle m_2, k_2 \rangle$, so $v\varkappa$ non $\mathrm{I}'\, P_1\varkappa$, $P_2\varkappa$; $P_1\varkappa \neq P_2\varkappa$ und die Geraden $P_1, P_2$ schneiden sich in genau einem Punkt $s = [x, y]$. Wegen $m_1\varkappa = m_2\varkappa$ gilt $s\varkappa \mathrm{I}'\, U\varkappa$ und wegen $s\varkappa \neq v\varkappa$ ergibt sich daher $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$. Aus $[x, y] \mathrm{I} \langle m_1, k_1 \rangle$, $[x, y] \mathrm{I} \langle m_2, k_2 \rangle$ folgt nach Lemma 2 $y = m_1^{\omega(x, k_1)} = m_2^{\omega(x, k_2)}$. Aus $m_1 = m_2$ folgt $s \mathrm{I}\, U$ und gemäß (P2) ergibt sich $x = u$. Ist umgekehrt $x = u$, dann wegen $y \in \mathscr{R}$ gilt $s \mathrm{I}\, U$ und daraus ist nach (L1) $m_1 = m_2$.

**(B5)** *Für beliebige* $m_1, k_1 \in \mathscr{R}$ *und* $m_2, k_2 \in \mathscr{R}'$ *gibt es genau ein Paar* $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$ *mit* $y = m_1^{\omega(x, k_1)}$, $x = m_2^{\psi(y, k_2)}$.

**(B6)** *Für beliebige* $m_1 \in \mathscr{R}$ *und* $m_2, k_1, k_2 \in \mathscr{R}'$ *gibt es genau ein Paar* $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ *mit* $y = k_1^{\varphi(x, m_1)}$, $x = k_2^{\xi(y, m_2)}$.

**(B7)** *Für beliebige* $m_1, m_2 \in \mathscr{R}$ *und* $k_1, k_2 \in \mathscr{R}'$ *mit* $m_1\varkappa \neq m_2\varkappa$ *gibt es genau ein* $x \in \mathscr{R}'$ *mit* $k_1^{\varphi(x, m_1)} = k_2^{\varphi(x, m_2)}$, *wobei* $x = u$ *genau dann, wenn* $k_1 = k_2$ *ist.*

Zum Beweis der Behauptungen (B5)–(B7): Wir setzen $P_1 = \langle m_1, k_1 \rangle$, $P_2 = \langle m_2, k_2 \rangle$ und ähnlich wie im Bewies der Behauptung (B4) beweisen wir, daß sich die Geraden $P_1, P_2$ in genau einem Punkt $[x, y]$ schneiden. Mit den Definitionen von $\omega(x, k)$, $\psi(y, k)$, $\xi(y, m)$, $\varphi(x, m)$ beweisen wir dann unsere Behauptungen (B5)–(B7).

## II

**Definition 2.** Unter einer affinen Klingenbergschen Ebene (kurz AK-Ebene) versteht man ein Tripel $(\alpha, \alpha', \varkappa)$, wo $\alpha = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ eine Inzidenzstruktur, $\alpha' = (\mathscr{P}', \mathscr{L}', \mathrm{I}')$ eine affine Ebene, $\varkappa : \alpha \to \alpha'$ ein Epimorphismus sind, wobei

(1) $x, y \in \mathscr{P}$, $x\varkappa \neq y\varkappa \Rightarrow \exists!\ P \in \mathscr{L}$; $x, y \mathrm{I} P$.

(2) $P, Q \in \mathscr{L}$, $P\varkappa \nparallel Q\varkappa \Rightarrow \exists!\ x \in \mathscr{P}$; $x \mathrm{I} P, Q$.

(3) Auf der Menge $\mathscr{L}$ ist eine Äquivalenzrelation $R$ erklärt, so daß durch jeden Punkt aus $\mathscr{P}$ genau eine Gerade aus jeder Äquivalenzklasse von $R$ geht.

Unter einer AK-Ebene werden wir oft die Inzidenzstruktur $\alpha$ verstehen. Zwei Geraden aus $\mathscr{L}$ sind parallel genau dann, wenn sie derselben Äquivalenzklasse von $R$ angehören. Den Parallelismus in $\alpha$ und auch in $\alpha'$ werden wir mit dem Symbol $\parallel$ bezeichnen. Aus $P \parallel Q$ folgt nach Definition 2 $P\varkappa \parallel Q\varkappa$. Die Parallele zu $P$ durch $p$ bezeichnen wir mit $L(p, P)$.

Es sei $\alpha = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ eine AK-Ebene. Das Tripel $(X, Y, e)$, wo $X, Y \in \mathscr{L}$, $e \in \mathscr{P}$, heißt ein Koordinatensystem von $\alpha$, wenn $X\varkappa \nparallel Y\varkappa$ und $e\varkappa$ non $\mathrm{I}'$ $X\varkappa, Y\varkappa$. Im folgenden nehmen wir an, daß $(X, Y, e)$ ein festgewähltes Koordinatensystem von $\alpha$ ist. Wir setzen $o = X \sqcap Y$, $E = oe$, $E' = L(e, Y)$, $E'' = L(e, X)$ und $\mathscr{R} = \{x \in \mathscr{P} \mid x \mathrm{I} X\}$, $\mathscr{R}_0 = \{x \in \mathscr{R} \mid x\varkappa = o\varkappa\}$, $\overline{\mathscr{R}} = \{x\varkappa \mid x \in \mathscr{R}\}$. Wir definieren eine Abbildung $\beta : \mathscr{R} \times \mathscr{R} \to \mathscr{P}$ durch

(P'1) Für ein beliebiges Paar $(x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ setzen wir $w = L(y, Y) \sqcap E$, $s = L(w, X) \sqcap L(x, Y) = (x, y)^{\beta}$.

$\beta$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$ auf $\mathscr{P}$ [9]. Wir definieren eine Abbildung $\gamma_1 : \mathscr{R} \times \mathscr{R} \to \mathscr{L}$ durch

(L'1) Für ein beliebiges Paar $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ setzen wir $p' = L(m, Y) \sqcap E$, $p = L(p', X) \sqcap E'$, $q' = L(k, Y) \sqcap E$, $q = L(q', X) \sqcap Y$, $P = L(q, op) = (m, k)^{\gamma_1}$.

Da $p \mathrm{I} E'$, gilt $(op)\varkappa \neq Y\varkappa$ und $P\varkappa \nparallel Y\varkappa$. $\gamma_1$ ist eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$ auf die Menge aller Geraden $P$ aus $\mathscr{L}$ mit $P\varkappa \nparallel Y\varkappa$ [9]. Offenbar $(m_1, k_1)^{\gamma_1} \parallel (m_2, k_2)^{\gamma_1} \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Schließlich definieren wir eine Abbildung $\gamma_2 : \mathscr{R}_0 \times \mathscr{R} \to \mathscr{L}$ durch

(L'2) Für ein beliebiges Paar $(m, k) \in \mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}$ setzen wir $w = L(m, Y) \sqcap E''$, $P = L(k, ow) = (m, k)^{\gamma_2}$.

Wegen $m \in \mathscr{R}_0$ gilt $(ow)\varkappa = Y\varkappa$ und mithin $P\varkappa \parallel Y\varkappa$. $\gamma_2$ ist eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}$ auf die Menge aller Geraden $P$ aus $\mathscr{L}$ mit $P\varkappa \parallel Y\varkappa$ [9]. Aus $(x, y)^\beta \, \mathrm{I} \, (m, k)^{\gamma_2}$ folgt nach (P'1) und (L'2) $x\varkappa = k\varkappa$. Offenbar $(m_1, k_1)^{\gamma_2} \parallel \parallel (m_2, k_2)^{\gamma_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Setzt man $(x\varkappa, y\varkappa)^{\beta'} = (x, y)^\beta \varkappa \; \forall (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, so ist $\beta'$ eine bijektive Abbildung der Menge $\bar{\mathscr{R}} \times \bar{\mathscr{R}}$ auf die Menge $\mathscr{P}'$; setzt man $(m\varkappa, k\varkappa)^{\gamma'_1} = (m, k)^{\gamma_1} \varkappa$ $\forall (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, so ist $\gamma'_1$ eine bijektive Abbildung der Menge $\bar{\mathscr{R}} \times \bar{\mathscr{R}}$ auf die Menge aller Geraden aus $\mathscr{L}'$, die nicht parallel zu $Y\varkappa$ sind. Setzt man schließlich $(m\varkappa, k\varkappa)^{\gamma'_2} = (m, k)^{\gamma_2} \varkappa \; \forall (m, k) \in \mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}$, so ist $\gamma'_2$ eine bijektive Abbildung der Menge $\{o\varkappa\} \times \bar{\mathscr{R}}$ auf die Menge aller Geraden aus $\mathscr{L}'$, die zu $Y\varkappa$ parallel sind.

Es sei $(\pi, \pi', \varkappa)$ eine PK-Ebene mit $\pi = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ und $\pi' = (\mathscr{P}', \mathscr{L}', \mathrm{I}')$. Für eine Gerade $U$ aus $\mathscr{L}$ setzen wir $\mathscr{P}^U = \{x \in \mathscr{P} \mid x\varkappa \text{ non } \mathrm{I}' \, U\varkappa\}$, $\mathscr{L}^U = \{P \in \mathscr{L} \mid P\varkappa \nparallel U\varkappa\}$. Ist $\mathrm{I}^U$ eine Inzidenzrelation mit $\mathrm{I}^U = \mathrm{I} \cap (\mathscr{P}^U \times \mathscr{L}^U)$, so bildet $\alpha^U = (\mathscr{P}^U, \mathscr{L}^U, \mathrm{I}^U)$ eine Inzidenzstruktur. Bezeichnen wir mit $\alpha'^U$ die durch die Gerade $U\varkappa$ aus $\mathscr{L}'$ bestimmte affine Ebene in $\pi'$, dann induziert $\varkappa$ einen Homomorphismus $\varkappa'$ der Inzidenzstruktur $\alpha^U$ auf $\alpha'^U$. Zwei Geraden von $\mathscr{L}^U$ nennt man parallel, wenn sie einen Punkt auf $U$ gemeinsam haben. Dann bildet $(\alpha^U, \alpha'^U, \varkappa')$ eine AK-Ebene. Wir sagen, daß $\pi$ eine projektive Erweiterung von $\alpha^U$ ist. Eine AK-Ebene $(\alpha, \alpha', \varkappa)$ läßt sich zu einer PK-Ebene $\pi$ erweitern, wenn es eine Gerade $U$ in $\pi$ derart gibt, daß $(\alpha, \alpha', \varkappa) = (\alpha^U, \alpha'^U, \varkappa')$ in der vorstehenden Art gilt und die Geraden aus $\alpha$ genau dann parallel sind, wenn sie in $\pi$ einen Punkt auf der Geraden $U$ gemeinsam haben.

Es seien $o, e, u, v$ Punkte einer PK-Ebene $(\pi, \pi', \varkappa)$, wo keine drei von $o\varkappa, e\varkappa, u\varkappa, v\varkappa$ auf einer Geraden aus $\pi'$ liegen. Wir setzen $X = ou$, $Y = ov$, $U = uv$. Es sei $\alpha^U = (\mathscr{P}^U, \mathscr{L}^U, \varkappa')$ die zu der Geraden $U$ aus $\pi$ gehörige AK-Ebene. Nach (P1)–(P3) und (L1)–(L3) gilt $\mathscr{P}^U = \{[x, y] \mid (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}\}$, $\mathscr{L}^U = \{\langle m, k\rangle \mid (m, k) \in \mathscr{R} \times \times \mathscr{R}\} \cup \{\langle m, k\rangle \mid (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'\}$. Das Tripel $(X, Y, e)$ ist ein Koordinatensystem von $\alpha^U$. Durch Vergleich der Konstruktionen (P1) und (P'1) erhalten wir $(x, y)^\beta = = [x, y] \; \forall (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ und durch (L1) und (L'1) dann $(m, k)^{\gamma_1} = \langle m, k\rangle$ $\forall (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$. Es sei $\langle m, k\rangle$ eine Gerade aus $\pi$ mit $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$. Bestimmen wir nach Lemma 1 das Element $k^\eta$, dann ist nach (L2) und (L'2) $(k^\eta, m)^{\gamma_2} = \langle m, k\rangle$.

**Satz.** *Es sei $(\alpha, \alpha', \varkappa)$ eine AK-Ebene mit $\alpha = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$, $\alpha' = (\mathscr{P}', \mathscr{L}', \mathrm{I}')$ und $(X, Y, e)$ sei ein Koordinatensystem von $\alpha$. Wir setzen $\mathscr{R} = \{x \in \mathscr{P} \mid x \, \mathrm{I} \, X\}$, $\mathscr{R}_0 = = \{x \in \mathscr{R} \mid x\varkappa = o\varkappa\}$. $\mathscr{R}'$ sei eine Menge mit $\mathscr{R}' \cap \mathscr{R} = \emptyset$.*

*$\alpha$ läßt sich zu einer PK-Ebene erweitern, falls es bijektive Abbildungen*

$$\begin{aligned}
&\eta : \mathscr{R}' \leftrightarrow \mathscr{R}_0 \quad \text{mit} \quad o^{\eta^{-1}} = u\,, \\
&\omega(x, k) : \mathscr{R} \leftrightarrow \mathscr{R} \quad \forall x \in \mathscr{R}' \;\; \forall k \in \mathscr{R}\,, \\
&\psi(y, k) : \mathscr{R}' \leftrightarrow \mathscr{R}' \quad \forall y \in \mathscr{R} \;\; \forall k \in \mathscr{R}'\,, \\
&\varphi(x, m) : \mathscr{R}' \leftrightarrow \mathscr{R}' \quad \forall x \in \mathscr{R}' \;\; \forall m \in \mathscr{R}\,, \\
&\xi(y, m) : \mathscr{R}' \leftrightarrow \mathscr{R}' \quad \forall y \in \mathscr{R}' \;\; \forall m \in \mathscr{R}'
\end{aligned}$$

*gibt, welche die Bedingungen* (A1)–(A3), (B1)–(B7) *und folgende* (B8) *befriedigen.*
(B8) *Für beliebige* $x_1, y_1 \in \mathscr{R}$; $x_2, y_2 \in \mathscr{R}'$ *gibt es genau ein Paar* $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$ *mit* $(x_1, y_1)^\beta \,\mathrm{I}\, (k^n, m)^{\gamma_2}$, $y_2 = k^{\varphi(x_2, m)}$.

Beweis. Wir setzen $(x, y)^\beta = [x, y]\ \forall (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $(m, k)^{\gamma_1} = \langle m, k\rangle\ \forall (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $(m, k)^{\gamma_2} = \langle\!\langle m, k\rangle\!\rangle\ \forall (m, k) \in \mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}$, $\overline{\mathscr{R}} = \{x\varkappa \mid x \in \mathscr{R}\}$, $(x\varkappa, y\varkappa)^{\beta'} = [x\varkappa, y\varkappa]\ \forall (x\varkappa, y\varkappa) \in \overline{\mathscr{R}} \times \overline{\mathscr{R}}$, $(m\varkappa, k\varkappa)^{\gamma'_1} = \langle m\varkappa, k\varkappa\rangle\ \forall (m\varkappa, k\varkappa) \in \overline{\mathscr{R}} \times \overline{\mathscr{R}}$. Ferner setzen wir $\mathscr{Q} = \mathscr{R} \cup \mathscr{R}'$, $\mathscr{Q}_1 = \{(a, b) \in \mathscr{Q} \times \mathscr{Q} \mid b \in \mathscr{R}' \Rightarrow a \in \mathscr{R}'\}$, $\mathscr{Q}_2 = \{(a, b) \in \mathscr{Q} \times \mathscr{Q} \mid a \in \mathscr{R}' \Rightarrow b \in \mathscr{R}'\}$, $\mathscr{P}_1 = \{[x, y] \mid (x, y) \in \mathscr{Q}_1\}$, $\mathscr{L}_1 = \{\langle m, k\rangle \mid (m, k) \in \mathscr{Q}_2\}$ und definieren eine Inzidenzrelation $\mathrm{I}_1 \subset \mathscr{P}_1 \times \mathscr{L}_1$ durch

$$
\begin{array}{lll}
[x, y]\,\mathrm{I}_1\,\langle m, k\rangle \Leftrightarrow [x, y]\,\mathrm{I}\,\langle m, k\rangle & \text{für} & (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R},\ (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}\,, \\
{[x, y]}\,\mathrm{I}_1\,\langle m, k\rangle \Leftrightarrow [x, y]\,\mathrm{I}\,\langle\!\langle k^n, m\rangle\!\rangle & \text{für} & (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R},\ (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'\,, \\
{[x, y]}\,\mathrm{I}_1\,\langle m, k\rangle \Leftrightarrow y = m^{\omega(x, k)} & \text{für} & (x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R},\ (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}\,, \\
{[x, y]}\,\mathrm{I}_1\,\langle m, k\rangle \Leftrightarrow x = m^{\psi(y, k)} & \text{für} & (x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R},\ (m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'\,, \\
{[x, y]}\,\mathrm{I}_1\,\langle m, k\rangle \Leftrightarrow y = k^{\varphi(x, m)} & \text{für} & (x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}',\ (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'\,, \\
{[x, y]}\,\mathrm{I}_1\,\langle m, k\rangle \Leftrightarrow x = k^{\xi(y, m)} & \text{für} & (x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}',\ (m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'\,.
\end{array}
$$

Das Tripel $\pi = (\mathscr{P}_1, \mathscr{L}_1, \mathrm{I}_1)$ ist eine Inzidenzstruktur.

Es sei $\bar{u}$ ein Element mit $\bar{u} \notin \overline{\mathscr{R}}$. Wir setzen $\overline{\mathscr{Q}} = \overline{\mathscr{R}} \cup \{\bar{u}\}$, $\mathscr{P}'_1 = \mathscr{P}' \cup \{[x\varkappa] \mid x\varkappa \in \overline{\mathscr{R}}\} \cup \{[\bar{u}]\}$, $\mathscr{L}'_1 = \mathscr{L}' \cup \{\langle m\varkappa\rangle \mid m\varkappa \in \overline{\mathscr{R}}\} \cup \{\langle \bar{u}\rangle\}$ und definieren eine Inzidenzrelation $\mathrm{I}'_1 \subset \mathscr{P}'_1 \times \mathscr{L}'_1$ durch

$$
\begin{array}{l}
[x\varkappa, y\varkappa]\,\mathrm{I}'_1\,\langle m\varkappa, k\varkappa\rangle \Leftrightarrow \langle x\varkappa, y\varkappa\rangle\,\mathrm{I}'\,\langle m\varkappa, k\varkappa\rangle \ \text{für} \\
\qquad (x\varkappa, y\varkappa) \in \overline{\mathscr{R}} \times \overline{\mathscr{R}}\,,\quad (m\varkappa, k\varkappa) \in \overline{\mathscr{R}} \times \overline{\mathscr{R}}\,, \\
\qquad [x\varkappa, y\varkappa]\,\mathrm{I}'_1\,\langle x\varkappa\rangle \quad \forall (x\varkappa, y\varkappa) \in \overline{\mathscr{R}} \times \overline{\mathscr{R}}\,, \\
\qquad [m\varkappa]\,\mathrm{I}'_1\,\langle m\varkappa, k\varkappa\rangle \quad \forall (m\varkappa, k\varkappa) \in \overline{\mathscr{R}} \times \overline{\mathscr{R}}\,, \\
\qquad [x\varkappa]\,\mathrm{I}'_1\,\langle \bar{u}\rangle \quad \forall x\varkappa \in \overline{\mathscr{R}}\,, \\
\qquad [\bar{u}]\,\mathrm{I}'_1\,\langle m\varkappa] \quad \forall m\varkappa \in \overline{\mathscr{R}}\,, \\
\qquad [\bar{u}]\,\mathrm{I}'_1\,\langle \bar{u}\rangle\,.
\end{array}
$$

Das Tripel $\pi' = (\mathscr{P}'_1, \mathscr{L}'_1, \mathrm{I}'_1)$ ist eine projektive Ebene. Ferner definieren wir eine Abbildung $\varkappa_1 : \pi \to \pi'$ durch

$$
\begin{array}{lll}
[x, y] & \mapsto [x\varkappa, y\varkappa] & \forall (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}\,, \\
{[x, y]} & \mapsto [y\varkappa] & \forall (x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}\,, \\
{[x, y]} & \mapsto [\bar{u}] & \forall (x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'\,, \\
\langle m, k\rangle & \mapsto \langle m\varkappa, k\varkappa\rangle & \forall (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}\,, \\
\langle m, k\rangle & \mapsto \langle m\varkappa\rangle & \forall (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'\,, \\
\langle m, k\rangle & \mapsto \langle \bar{u}\rangle & \forall (m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'\,.
\end{array}
$$

Wir zeigen, daß $\varkappa_1$ ein Homomorphismus von $\pi$ auf $\pi'$ ist:

a) Gilt $[x, y]\, \mathrm{I}_1\, \langle m, k\rangle$ für $(x, y \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, dann ist $[x, y]\, \mathrm{I}$ $\mathrm{I}\, \langle m, k\rangle$. Da $\varkappa$ ein Homomorphismus von $\alpha$ auf $\alpha'$ ist, folgt daraus $[x, y]\, \varkappa\, \mathrm{I}'\, \langle m, k\rangle\, \varkappa$, also $[x\varkappa, y\varkappa]\, \mathrm{I}'\, \langle m\varkappa, k\varkappa\rangle$. Dies bedeutet aber $[x\varkappa, y\varkappa]\, \mathrm{I}'_1\, \langle m\varkappa, k\varkappa\rangle$ und $[x, y]\, \varkappa_1\, \mathrm{I}'_1$ $\mathrm{I}'_1\, \langle m, k\rangle\, \varkappa_1$.

b) Gilt $[x, y]\, \mathrm{I}_1\, \langle m, k\rangle$ für $(x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$, dann $[x, y]\, \mathrm{I}$ $\mathrm{I}\, \langle\!\langle k^\eta, m\rangle\!\rangle$ und mithin $x\varkappa = m\varkappa$. Daraus ergibt sich $[x\varkappa, y\varkappa]\, \mathrm{I}'_1\, \langle m\varkappa\rangle$ und $[x, y]\, \varkappa_1\, \mathrm{I}'_1$ $\mathrm{I}'_1\, \langle m, k\rangle\, \varkappa_1$.

c) Gilt $[x, y]\, \mathrm{I}_1\, \langle m, k\rangle$ für $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$, $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, dann $y = m^{\omega(x,k)}$ und wegen (A1) folgt $y\varkappa = m\varkappa$. Daraus ergibt sich $[y\varkappa]\, \mathrm{I}'_1\, \langle m\varkappa, k\varkappa\rangle$ und $[x, y]\, \varkappa_1\, \mathrm{I}'_1$ $\mathrm{I}'_1\, \langle m, k\rangle\, \varkappa_1$.

d) Es sei $[x, y]\, \mathrm{I}_1\, \langle m, k\rangle$ für $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$, $(m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$. Wegen $[x, y]\, \varkappa_1 = [y\varkappa]$, $\langle m, k\rangle\, \varkappa_1 = \langle \bar{u}\rangle$ folgt $[x, y]\, \varkappa_1\, \mathrm{I}'_1\, \langle m, k\rangle\, \varkappa_1$.

e) Es sei $[x, y]\, \mathrm{I}_1\, \langle m, k\rangle$ für $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$, $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$. Wegen $[x, y]\, \varkappa_1 =$ $= [\bar{u}]$ und $\langle m, k\rangle\, \varkappa_1 = \langle m\varkappa\rangle$ folgt $[x, y]\, \varkappa_1\, \mathrm{I}'_1\, \langle m, k\rangle\, \varkappa_1$.

g) Es sei $[x, y]\, \mathrm{I}_1\, \langle m, k\rangle$ für $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$, $(m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$. Wegen $[x, y]\, \varkappa_1 = [\bar{u}]$ und $\langle x, y\rangle\, \varkappa_1 = \langle \bar{u}\rangle$ folgt $[x, y]\, \varkappa_1\, \mathrm{I}'_1\, \langle x, y\rangle\, \varkappa_1$.

Jetzt beweisen wir, daß für das Tripel $(\pi, \pi', \varkappa_1)$ die Forderungen (1), (2) der Definition 1 befriedigt sind.

Ad (1) Es seien zwei Punkte $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$ aus $\mathscr{P}_1$ mit $s_1\varkappa_1 \neq s_2\varkappa_1$ gegeben. Wir wollen beweisen, daß es genau eine durch $s_1$, $s_2$ gehende Gerade aus $\mathscr{L}_1$ gibt.

a) Es sei $(x_1, y_1) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $(x_2, y_2) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$. Wegen $s_1\varkappa_1 \neq s_2\varkappa_1$ gilt entweder $x_1\varkappa \neq x_2\varkappa$ oder $y_1\varkappa \neq y_2\varkappa$. Nach (1) aus Definition 2 gibt es daher genau eine Gerade $P$ aus $\mathscr{L}$, die $s_1$, $s_2$ enthält.

α) Gilt $x_1\varkappa \neq x_2\varkappa$, dann ist nach (L'1) $P = \langle m, k\rangle$. Wegen $[x_1, y_1]\, \mathrm{I}\, \langle m, k\rangle$, $[x_2, y_2]\, \mathrm{I}\, \langle m, k\rangle$ folgt $s_1, s_2\, \mathrm{I}_1\, \langle m, k\rangle$. Wir zeigen, daβ $\langle m, k\rangle$ genau eine durch die Punkte $s_1$, $s_2$ gehende Gerade aus $\mathscr{L}_1$ ist. Gilt $s_1, s_2\, \mathrm{I}_1\, \langle m_1, k_1\rangle$ mit $(m_1, k_1) \in$ $\in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$, dann $[x_1, y_1]\, \mathrm{I}\, \langle\!\langle k_1^\eta, m_1\rangle\!\rangle$, $[x_2, y_2]\, \mathrm{I}\, \langle\!\langle k_1^\eta, m_1\rangle\!\rangle$ und mithin $x_1\varkappa = m_1\varkappa =$ $= x_2\varkappa$, was der Gleichheit $x_1\varkappa = x_2\varkappa$ widerspricht. Aus $s_1, s_2\, \mathrm{I}_1\, \langle m_1, k_1\rangle$ mit $(m_1, k_1) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ folgt z. B. $s_1\varkappa_1\, \mathrm{I}'_1\, \langle m_1, k_1\rangle\, \varkappa_1$, also $[x\varkappa, y\varkappa]\, \mathrm{I}'_1\, \langle \bar{u}\rangle$, was wieder ein Widerspruch ist.

β) Gilt $x_1\varkappa = x_2\varkappa$, $y_1\varkappa \neq y_2\varkappa$, dann ist nach (L'2) $P = \langle\!\langle m, k\rangle\!\rangle$ und somit $s_1, s_2\, \mathrm{I}_1\, \langle k, m^{\eta^{-1}}\rangle$. Aus $s_1, s_2\, \mathrm{I}_1\, \langle m, k\rangle$ mit $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ ergibt sich $[x_1, y_1]\, \mathrm{I}$ $\mathrm{I}\, \langle m, k\rangle$, $[x_2, y_2]\, \mathrm{I}\, \langle m, k\rangle$, was wegen (L'1) der Voraussetzung $x_1\varkappa = x_2\varkappa$ widerspricht. Aus $s_1, s_2\, \mathrm{I}_1\, \langle m, k\rangle$ mit $(m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ folgt z. B. $[x_1\varkappa, y_1\varkappa]\, \mathrm{I}'_1\, \langle \bar{u}\rangle$, also wieder ein Widerspruch. Durch die Punkte $s_1$, $s_2$ geht mithin genau eine Gerade $\langle k, m^{\eta^{-1}}\rangle$ aus $\mathscr{L}_1$.

b) Es sei $(x_1, y_1) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $(x_2, y_2) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$. Gemäß (B1) gibt es genau ein Paar $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ mit $s_1\, \mathrm{I}_1\, \langle m, k\rangle$, $y_2 = m^{\omega(x_2,k)}$. Daraus folgt aber $s_2\, \mathrm{I}_1\, \langle m, k\rangle$.

Ähnlich wie in a) läßt sich zeigen, daß $\langle m, k\rangle$ genau eine Gerade aus $\mathscr{L}_1$ mit $s_1, s_2 \mathrm{I}_1$ $\mathrm{I}_1 \langle m, k\rangle$ ist.

c) Es sei $(x_1, y_1) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$, $(x_2, y_2) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$ mit $y_1\varkappa \neq y_2\varkappa$. Nach (B3) gibt es genau ein Paar $(m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ mit $x_1 = m^{\psi(y_1,k)}$, $x_2 = m^{\psi(y_2,k)}$, was $s_1, s_2 \mathrm{I}_1$ $\mathrm{I}_1 \langle m, k\rangle$ bedeutet. $\langle m, k\rangle$ ist genau eine Gerade aus $\mathscr{L}_1$ mit $s_1, s_2 \mathrm{I}_1 \langle m, k\rangle$.

d) Es sei $(x_1, y_1) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $(x_2, y_2) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$. Nach (B8) gibt es genau ein Paar $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$ mit $[x_1, y_1] \mathrm{I} \langle\!\langle k^\eta, m\rangle\!\rangle$, $y_2 = k^{\varphi(x_2,m)}$, was $s_1 \mathrm{I}_1 \langle m, k\rangle$, $s_2 \mathrm{I}_1 \langle m, k\rangle$ bedeutet.

e) Es sei $(x_1, y_1) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$, $(x_2, y_2) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$. Nach (B2) gibt es genau ein Paar $(m, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ mit $x_1 = m^{\psi(y_1,k)}$, $x_2 = k^{\xi(y_2,m)}$, was $s_1, s_2 \mathrm{I}_1 \langle m, k\rangle$ bedeutet.

Ad (2) Es seien zwei Geraden $P_1 = \langle m_1, k_1\rangle$, $P_2 = \langle m_2, k_2\rangle$ aus $\mathscr{L}_1$ mit $P_1\varkappa_1 \neq P_2\varkappa_1$ gegeben. Wir wollen beweisen, daß $P_1, P_2$ genau einen Punkt aus $\mathscr{P}_1$ gemeinsam haben.

a) Es sei $(m_1, k_1) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $(m_2, k_2) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$. Wegen $P_1\varkappa_1 \neq P_2\varkappa_1$ gilt entweder $m_1\varkappa \neq m_2\varkappa$ oder $k_1\varkappa \neq k_2\varkappa$.

α) Gilt $m_1\varkappa \neq m_2\varkappa$, dann $\langle m_1\varkappa, k_1\varkappa\rangle \nparallel \langle m_2\varkappa, k_2\varkappa\rangle$ und daher $\langle m_1, k_1\rangle \varkappa \nparallel$ $\nparallel \langle m_2, k_2\rangle \varkappa$. Nach (2) aus Definition 2 gibt es also genau einen Punkt $[x, y]$ aus $\mathscr{P}$ mit $[x, y] \mathrm{I} \langle m_1, k_1\rangle$, $[x, y] \mathrm{I} \langle m_2, k_2\rangle$, woraus $[x, y] \mathrm{I}_1 P_1, P_2$ folgt. Wir zeigen, daß $[x, y]$ der einzige auf den Geraden $P_1, P_2$ liegende Punkt aus $\mathscr{P}_1$ ist. Gilt $[x_1, y_1] \mathrm{I}_1 P_1, P_2$ für $(x_1, y_1) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$, dann ist $y_1 = m_1^{\omega(x_1,k_1)}$, $y_1 = m_2^{\omega(x_1,k_2)}$ und wegen (A1) ergibt sich $y_1\varkappa = m_1\varkappa = m_2\varkappa$, was ein Widerspruch ist. Gilt $[x_1, y_1] \mathrm{I}_1$ $P_1, P_2$ für $(x_1, y_1) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$, dann z. B. $[\bar{u}] \mathrm{I}_1 \langle m_1\varkappa, k_1\varkappa\rangle$, was aber wieder ein Widerspruch ist.

β) Es sei $m_1\varkappa = m_2\varkappa$, $k_1\varkappa \neq k_2\varkappa$. Nach (B4) gibt es genau ein Element $x \in \mathscr{R}'$ mit $y = m_1^{\omega(x,k_1)} = m_2^{\omega(x,k_2)}$ und somit $[x, y] \mathrm{I}_1 P_1, P_2$. Gilt $[x_1, y_1] \mathrm{I}_1 P_1, P_2$ für $(x_1, y_1) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, dann $[x_1, y_1] \mathrm{I} \langle m_1, k_1\rangle$, $\langle m_2, k_2\rangle$. Wegen $m_1\varkappa = m_2\varkappa$ gilt dabei $\langle m_1\varkappa, k_1\varkappa\rangle \parallel \langle m_2\varkappa, k_2\varkappa\rangle$, was ein Widerspruch ist. Aus $[x_1, y_1] \mathrm{I}_1 P_1, P_2$ für $(x_1, y_1) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ folgt $[\bar{u}] \mathrm{I}_1' \langle m_1\varkappa, k_1\varkappa\rangle$, also wieder ein Widerspruch.

b) Es sei $(m_1, k_1) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ und $(m_2, k_2) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$. Nach (L'1) und (L'2) gilt $\langle m_1, k_1\rangle \varkappa \nparallel Y\varkappa$ und $\langle\!\langle k_2^\eta, m_2\rangle\!\rangle \varkappa \parallel Y\varkappa$. Daraus $\langle m_1, k_1\rangle \varkappa \nparallel \langle\!\langle k_2^\eta, m_2\rangle\!\rangle \varkappa$ und die Geraden $\langle m_1, k_1\rangle$, $\langle\!\langle k_2^\eta, m_2\rangle\!\rangle$ schneiden sich in genau einem Punkt $[x, y]$ mit $(x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, was $[x, y] \mathrm{I}_1 \langle m_1, k_1\rangle$, $\langle m_2, k_2\rangle$ bedeutet. $[x, y]$ ist der einzige auf $P_1, P_2$ enthaltene Punkt aus $\mathscr{P}_1$.

c) Gilt $(m_1, k_1) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$, $(m_2, k_2) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$ mit $m_1\varkappa \neq m_2\varkappa$, dann gibt es nach (B7) genau ein $x \in \mathscr{R}'$ mit $y = k_1^{\varphi(x,m_1)} = k_2^{\varphi(x,m_2)}$, was $[x, y] \mathrm{I}_1 P_1, P_2$ bedeutet.

d) Gilt $(m_1, k_1) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $(m_2, k_2) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$, dann gibt es nach (B5) genau ein Paar $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$ mit $y = m_1^{\omega(x,k_1)}$, $x = m_2^{\psi(y,k_2)}$, was $[x, y] \mathrm{I}_1 P_1, P_2$ bedeutet.

e) Gilt $(m_1, k_1) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$, $(m_2, k_2) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$, dann gibt es nach (B6) genau ein Paar $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ mit $y = k_1^{\varphi(x,m_1)}$, $x = k_2^{\xi(y,m_2)}$, was $[x, y] \mathrm{I}_1 P_1, P_2$ bedeutet.

Das Tripel $(\pi, \pi', \varkappa_1)$ ist also eine PK-Ebene. Wir zeigen, daß $\alpha$ in $\pi$ eingebettet ist. Wir betrachten die AK-Ebene $(\alpha^U, \alpha'^U, \varkappa_1')$, die durch die Gerade $U = \langle u, u\rangle$ aus $\pi$ bestimmt ist. Wird $\alpha^U = (\mathscr{P}_1^U, \mathscr{L}_1^U, \mathrm{I}_1^U)$ gesetzt, so $\mathscr{P}_1^U = \{[x, y] \in \mathscr{P}_1 \mid [x, y]\,\varkappa_1$ non $\mathrm{I}'$ non $\mathrm{I}'\, U\varkappa_1\}$. Ist $(x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, so $[x, y]\,\varkappa_1 = [x\varkappa, y\varkappa]$ non $\mathrm{I}'\,\langle u, u\rangle\,\varkappa_1 = \langle \bar{u}\rangle$. Gilt $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$, so $[x, y]\,\varkappa_1 = [y\varkappa]\,\mathrm{I}_1'\,\langle\bar{u}\rangle$ und aus $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$ ergibt sich $[x, y]\,\varkappa_1 = [\bar{u}]\,\mathrm{I}_1'\,\langle\bar{u}\rangle$. Somit erhält man $[x, y] \in \mathscr{P}_1^U \Leftrightarrow (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ und $\mathscr{P}^U = \mathscr{P}$. Ähnlich läßt sich $\mathscr{L}_1^U = \{P \in \mathscr{L}_1 \mid P\varkappa_1 \neq \langle\bar{u}\rangle\} = \{\langle m, k\rangle \mid (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}\} \cup \{\langle m, k\rangle \mid (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'\}$ zeigen. Nach der Identifikation $\langle m, k\rangle := \langle\!\langle k^\eta, m\rangle\!\rangle\ \forall (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$ ergibt sich daraus $\mathscr{L}_1^U = \mathscr{L}$. Wegen $[x, y]\,\mathrm{I}_1\ \mathrm{I}_1\,\langle m, k\rangle \Leftrightarrow [x, y]\,\mathrm{I}\,\langle m, k\rangle\ \ \forall (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}\ \ \forall (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ und $[x, y]\,\mathrm{I}_1\ \mathrm{I}_1\,\langle m, k\rangle \Leftrightarrow [x, y]\,\mathrm{I}\,\langle\!\langle k^\eta, m\rangle\!\rangle\ \ \forall (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}\ \ \forall (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$ gilt $\mathrm{I}_1^U = \mathrm{I}$ und mithin $\alpha^U = (\mathscr{P}_1^U, \mathscr{L}_1^U, \mathrm{I}_1^U) = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I}) = \alpha$. Ist $\varkappa_1'$ die Restriktion von $\varkappa_1$ auf die Menge $\mathscr{P}_1^U \cup \mathscr{L}_1^U$, dann ist $\varkappa_1' = \varkappa$, denn $[x, y]\,\varkappa_1 = [x\varkappa, y\varkappa] = [x, y]\,\varkappa\ \forall (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $\langle m, k\rangle\,\varkappa_1 = \langle m\varkappa, k\varkappa\rangle = \langle m, k\rangle\,\varkappa\ \ \forall (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $\langle m, k\rangle\,\varkappa_1 = \langle m\varkappa\rangle = \langle\!\langle k^\eta, m\rangle\!\rangle\,\varkappa\ \forall (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$. Wegen $\alpha'^U = \alpha'$ ergibt sich also $(\alpha^U, \alpha'^U, \varkappa_1') = (\alpha, \alpha', \varkappa)$.

Weiter wollen wir zeigen, daß zwei Geraden aus $\alpha$ genau dann parallel sind, wenn sie in $\pi$ einen Punkt auf der Geraden $U$ gemeinsam haben.

1. Es seien $\langle m_1, k_1\rangle$, $\langle m_2, k_2\rangle$ zwei Geraden mit $(m_1, k_1) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $(m_2, k_2) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$.

a) Wir nehmen $\langle m_1, k_1\rangle \parallel \langle m_2, k_2\rangle$, also $m_1 = m_2 = m$ an.

α) Gilt $k_1\varkappa \neq k_2\varkappa$, dann schneiden sich die Geraden $\langle m, k_1\rangle$, $\langle m, k_2\rangle$ nach Ad (2), a), β) in einem einzigen Punkt $[x, y]$ mit $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$, wobei $y = m^{\omega(x,k_1)} = m^{\omega(x,k_2)}$. Nach (B4) gilt dann $x = u$ und nach (A2) $u = u^{\psi(y,u)}$, was $[x, y] = [u, y]\,\mathrm{I}_1\,\langle u, u\rangle = U$ bedeutet.

β) Es sei $k_1\varkappa = k_2\varkappa$. Wählt man eine Gerade $\langle m, k\rangle$ mit $k \in \mathscr{R}$, $k\varkappa \neq k_1\varkappa$, dann schneiden sich $\langle m, k_1\rangle$, $\langle m, k\rangle$ bzw. $\langle m, k_2\rangle$, $\langle m, k\rangle$ nach α) im Punkt $[u, y_1]$ bzw. $[u, y_2]$. Da $\langle m, k\rangle$, $U$ sich in genau einem Punkt schneiden, gilt $[u, y_1] = [u, y_2]$ und die Geraden $\langle m, k_1\rangle$, $\langle m, k_2\rangle$ haben den Punkt $[u, y_1]$ auf $U$ gemeinsam.

b) Haben die Geraden $\langle m_1, k_1\rangle$, $\langle m_2, k_2\rangle$ einen Punkt $[x, y]$ auf $U$ gemeinsam, so $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$. Wegen $[x, y]\,\mathrm{I}_1\,\langle u, u\rangle$ ist $x = u^{\psi(y,u)}$ und nach (A2) folgt daraus $x = u$. Wird $m_1\varkappa \neq m_2\varkappa$ angenommen, so gilt nach Ad (2), a), α) $(x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, also $[x, y]$ non $\mathrm{I}\,\langle u, u\rangle$, was aber ein Widerspruch ist. Somit ist $m_1\varkappa = m_2\varkappa$.

α) Aus $k_1\varkappa \neq k_2\varkappa$ folgt nach Ad (2), a), β) $y = m_1^{\omega(u,k_1)} = m_2^{\omega(u,k_2)}$, nach (B4) ergibt sich daraus $m_1 = m_2$ und die Geraden $\langle m_1, k_1\rangle$, $\langle m_2, k_2\rangle$ sind daher parallel.

β) Es sei $k_1\varkappa = k_2\varkappa$. Führen wir durch den Punkt $[x, y]$ eine Gerade $\langle m, k\rangle$ mit $k \in \mathscr{R}$, $k\varkappa \neq k_1\varkappa$, so gilt nach α) $\langle m, k\rangle \parallel \langle m_1, k_1\rangle$, $\langle m, k\rangle \parallel \langle m_2, k_2\rangle$, also auch $\langle m_1, k_1\rangle \parallel \langle m_2, k_2\rangle$.

2. Es seien $\langle m_1, k_1\rangle := \langle\!\langle k_1^\eta, m_1\rangle\!\rangle$, $\langle m_2, k_2\rangle := \langle\!\langle k_2^\eta, m_2\rangle\!\rangle$ zwei Geraden mit $(m_1, k_1) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$, $(m_2, k_2) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$.

a) Wir nehmen $\langle\!\langle k_1^\eta, m_1\rangle\!\rangle \parallel \langle\!\langle k_2^\eta, m_2\rangle\!\rangle$ an. Dann ist $k_1^\eta = k_2^\eta$ und daraus auch $k_1 = k_2 = k$.

α) Gilt $m_1\varkappa \neq m_2\varkappa$, dann schneiden sich die Geraden $\langle m_1, k\rangle$, $\langle m_2, k\rangle$ nach Ad (2), c) in einem einzigen Punkt $[x, y]$ mit $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$, wobei $y = k^{\varphi(x,m_1)} = k^{\varphi(x,m_2)}$. Nach (B7) gilt dann $x = u$ und nach (A3) $u = u^{\xi(y,u)}$, was $[x, y] = [u, y] \mathrm{I}_1 \langle u, u\rangle = U$ bedeutet. Die Geraden $\langle m_1, k\rangle$, $\langle m_2, k\rangle$ schneiden sich also im Punkt $[u, y]$ auf $U$.

β) Gilt $m_1\varkappa = m_2\varkappa$, so läßt sich ähnlich wie im Falle 1a), β) zeigen, daß $\langle m_1, k\rangle$, $\langle m_2, k\rangle$ wieder einen Punkt auf $U$ gemeinsam haben.

b) Haben die Geraden $\langle m_1, k_1\rangle$, $\langle m_2, k_2\rangle$ einen Punkt $[x, y]$ auf $U$ gemeinsam, dann $(x, y) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}'$. Aus $[x, y] \mathrm{I}_1 \langle u, u\rangle$ folgt dann $x = u^{\xi(y,u)}$ und aus (A3) $x = u$.

α) Gilt $m_1\varkappa \neq m_2\varkappa$, so ist nach Ad (2) c) $y = k_1^{\varphi(u,m_1)} = k_2^{\varphi(u,m_2)}$, wegen (B7) ergibt sich daraus $k_1 = k_2$, was $k_1^\eta = k_2^\eta$ bedeutet. Die Geraden $\langle\!\langle k_1^\eta, m_1\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle k_2^\eta, m_2\rangle\!\rangle$ sind also parallel.

β) Gilt $m_1\varkappa = m_2\varkappa$, so läß sich ähnlich wie im Falle 1 b) β) zeigen, daß $\langle\!\langle k_1^\eta, m_1\rangle\!\rangle \parallel \langle\!\langle k_2^\eta, m_2\rangle\!\rangle$ ist.

Die PK-Ebene $\pi$ ist also eine projektive Erweiterung der gegebenen AK-Ebene $\alpha$

**Bemerkung.** Bei der Formulierung unseres Satzes wird ein festes Koordinatensystem $(X, Y, e)$ der AK-Ebene $(\alpha, \alpha', \varkappa)$ angewandt. Sind alle Forderungen dieses Satzes (im Hinblick auf $(X, Y, e)$) befriedigt, so gibt es eine PK-Ebene $(\pi, \pi', \varkappa_1)$, die eine Erweiterung von $\alpha$ ist. In $\pi$ gibt es also eine Gerade $U$ mit $(\alpha, \alpha', \varkappa) = (\alpha^U, \alpha'^U, \varkappa')$. Wir wählen ein anderes Koordinatensystem $(X', Y', e')$ von $\alpha$ und bezeichnen $o' = X' \sqcap Y'$, $u' = X' \sqcap U$, $v' = Y' \sqcap U$. Keine drei von den Punkten $o'\varkappa_1$, $e'\varkappa_1$, $u'\varkappa_1$, $v'\varkappa_1$ liegen dann auf einer Geraden aus $\pi'$. Nach dem Teil I können wir also durch die Lemmas 1–5 bijektive Abbildungen $\eta'$, $\omega'(x, k)$, $\psi'(y, k)$, $\varphi'(x, m)$, $\xi'(y, m)$ erklären. Diese Abbildungen befriedigen dabei die Forderungen (A1)–(A3), (B), (B1)–(B7) und folglich auch (B8). Existieren also die Abbildungen $\eta$, $\omega(x, k)$, $\psi(y, k)$, $\varphi(x, m)$, $\xi(y, m)$, die (A1)–(A3), (B1)–(B8) im Hinblick auf ein Koordinatensystem von $\alpha$ erfüllen, so existieren Abbildungen mit denselben Eigenschaften im Hinblick auf ein beliebiges Koordinatensystem von $\alpha$.

Wählt man in $\pi$ eine Gerade $V$ mit $V\varkappa_1 = U\varkappa_1$, dann läßt sich in $\alpha$ einen neuen Parallelismus derart definieren, daß die Geraden aus $\alpha$ genau dann parallel sind, wenn ihre projektiven Erweiterungen einen Punkt auf $V$ gemeinsam haben. Betrachten wir aber in $\alpha$ einen beliebigen die Forderung (3) aus Definition 2 erfüllenden Parallelismus, dann soll schon keine diesen Parallelismus reproduzierende projektive Erweiterung von $\alpha$ existieren (siehe [4]).

**Bemerkung.** Ist $\alpha^U$ eine AK-Ebene, die durch eine Gerade $U$ einer PK-Ebene bestimmt ist, dann gibt es nach dem Teil I die Abbildungen $\eta$, $\omega(x, k)$, $\psi(y, k)$, $\varphi(x, y)$, $\xi(y, m)$, welche die Bedingungen (A1)–(A3), (B1)–(B7) und wegen (B) auch (B8) erfüllen. Nach unserem Satz läßt sich jede AK-Ebene, in welcher die angeführten Abbildungen existieren, zu einer PK-Ebene erweitern. Eine AK-Ebene läßt sich also genau dann projektiv erweitern, wenn Abbildungen $\eta$, $\omega(x, k)$, $\psi(y, k)$, $\varphi(x, m)$, $\xi(y, m)$ existieren, welche die Bedingungen (A1)–(A3), (B1)–(B8) befriedigen.

## III

Es sei $R$ ein lokaler (nicht notwendig kommutativer) Ring mit maximalem Ideal $R_0$. $R_0$ ist dann die Menge aller nichtinvertierbaren Elemente aus $R$ und der Restklassenring $\bar{R} = R/R_0$ mit $\bar{x} = x + R_0 \in \bar{R}\ \forall x \in R$ ist ein Körper ([6], Kap. III).

Setzen wir $\mathscr{P} = \{[x, y] \mid (x, y) \in R \times R\}$, $\mathscr{L} = \{\langle m, k\rangle \mid (m, k) \in R \times R\} \cup \cup \{\langle\!\langle n, k\rangle\!\rangle \mid (n, k) \in R_0 \times R\}$ und definieren wir eine Inzidenzrelation $\mathrm{I} \subset \mathscr{P} \times \mathscr{L}$ durch

$$[x, y]\ \mathrm{I}\ \langle m, k\rangle \Leftrightarrow y = xm + k\,,$$

$$[x, y]\ \mathrm{I}\ \langle\!\langle n, k\rangle\!\rangle \Leftrightarrow x = ym + k\,,$$

so ist $\alpha = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ eine Inzidenzstruktur.

Ferner setzen wir $\mathscr{P}' = \{[\bar{x}, \bar{y}] \mid (x, y) \in R \times R\}$, $\mathscr{L}' = \{\langle \bar{m}, \bar{k}\rangle \mid (m, k) \in R \times \times R\} \cup \{\langle\!\langle \bar{o}, \bar{k}\rangle\!\rangle \mid k \in R\}$ und definieren wir eine Inzidenzrelation $\mathrm{I}' \subset \mathscr{P}' \times \mathscr{L}'$ durch

$$[\bar{x}, \bar{y}]\ \mathrm{I}'\ \langle \bar{m}, \bar{k}\rangle \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{x}\bar{m} + \bar{k}\,,$$

$$[\bar{x}, \bar{y}]\ \mathrm{I}'\ \langle\!\langle \bar{o}, \bar{k}\rangle\!\rangle \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{k}\,.$$

Erklären wir in der Inzidenzstruktur $\alpha' = (\mathscr{P}', \mathscr{L}', \mathrm{I}')$ einen Parallelismus durch $\langle \bar{m}_1, \bar{k}_1\rangle \parallel \langle \bar{m}_2, \bar{k}_2\rangle \Leftrightarrow \bar{m}_1 = \bar{m}_2$, $\langle\!\langle \bar{o}, \bar{k}_1\rangle\!\rangle \parallel \langle\!\langle \bar{o}, \bar{k}_2\rangle\!\rangle\ \forall \bar{k}_1, \bar{k}_2 \in \bar{R}$, dann ist $\alpha'$ eine affine Ebene. Die Abbildung $\varkappa$:

$$\begin{aligned}
[x, y] &\mapsto [\bar{x}, \bar{y}] && \forall (x, y) \in R \times R\,,\\
\langle m, k\rangle &\mapsto \langle \bar{m}, \bar{k}\rangle && \forall (m, k) \in R \times R\,,\\
\langle\!\langle n, k\rangle\!\rangle &\mapsto \langle\!\langle \bar{o}, \bar{k}\rangle\!\rangle && \forall (n, k) \in R_0 \times R
\end{aligned}$$

ist ein Homomorphismus der Inzidenzstruktur $\alpha$ auf die affine Ebene $\alpha'$. Definiert man einen Parallelismus in $\alpha$ durch $\langle m_1, k_1\rangle \parallel \langle m_2, k_2\rangle \Leftrightarrow m_1 = m_2$, $\langle\!\langle n_1, k_1\rangle\!\rangle \parallel \parallel \langle\!\langle n_2, k_2\rangle\!\rangle \Leftrightarrow n_1 = n_2$, so ist $(\alpha, \alpha', \varkappa)$ eine AK-Ebene.

Ein Tripel $(X, Y, e)$ mit $X = \langle o, o\rangle$, $Y = \langle\!\langle o, o\rangle\!\rangle$, $e = [1, 1]$ stellt ein Koordinatensystem von $\alpha$ dar. Offenbar gilt $X \sqcap Y = [o, o]$ und $[x, y]\ \mathrm{I}\ X \Leftrightarrow y = o$. Wird $\mathscr{R} = = \{[x, y] \in \mathscr{P} \mid [x, y]\ \mathrm{I}\ X\}$ und $\mathscr{R}_0 = \{[x, y] \in \mathscr{R} \mid [x, y]\varkappa = [\bar{o}, \bar{o}]\}$ gesetzt, so erhält man nach der Identifikation $[x, o] := x \ \forall x \in R$ die Gleichheiten $\mathscr{R} = R$, $\mathscr{R}_0 = R_0$. Nach weiterer Identifikation $[\bar{x}, \bar{o}] := \bar{x} \ \forall \bar{x} \in \bar{R}$ erhält man dann $[x, o]\,\varkappa = \bar{x}$.

Es sei $R'$ eine Menge mit $R' \cap R = \emptyset$ und $\eta$ eine bijektive Abbildung von $R'$ auf $R_0$. Wir setzen $o^{\eta^{-1}} = u$ und

$$m^{\omega(x,k)} = x^\eta k + m \quad \forall x \in R' \quad \forall m, k \in R\,,$$

$$m^{\psi(y,k)} = (yk^\eta + m^\eta)^{\eta^{-1}} \quad \forall y \in R \quad \forall m, k \in R'\,,$$

$$k^{\varphi(x,m)} = (x^\eta m + k^\eta)^{\eta^{-1}} \quad \forall m \in R \quad \forall x, k \in R'\,,$$

$$k^{\xi(y,m)} = (y^\eta m^\eta + k^\eta)^{\eta^{-1}} \quad \forall y, m, k \in R'\,.$$

Es läßt sich zeigen, daß $\omega(x, k)$ eine bijektive Abbildung der Menge $R$ auf sich ist, $\psi(y, k)$, $\varphi(x, m)$ und $\xi(y, m)$ bijektive Abbildungen der Menge $R'$ auf sich sind, welche die Forderungen (A1)–(A3) befriedigen.

Zur Ansicht beweisen wir z. B., daß $\psi(y, k)$ eine bijektive Abbildung von $R'$ auf sich für jedes Paar $(y, k) \in R \times R'$ ist, die (A2) erfüllt: Für ein beliebiges Element $m'$ aus $R'$ gilt $m'^\eta - yk^\eta \in R_0$, denn $R_0$ ist ein Ideal in $R$. Setzt man $m = (m'^\eta - yk^\eta)^{\eta^{-1}}$, so $m^\eta = m'^\eta - yk^\eta$ und $m^{\psi(y,k)} = (yk^\eta + m^\eta)^{\eta^{-1}} = (yk^\eta + m'^\eta - yk^\eta)^{\eta^{-1}} = m'$. Das Element $m$ ist das einzige aus $R'$ mit $m^{\psi(y,k)} = m'$. Für ein beliebiges $y \in R$ gilt $u^{\psi(y,u)} = (yu^\eta + u^\eta)^{\eta^{-1}} = (yo + o)^{\eta^{-1}} = o^{\eta^{-1}} = u$ und dadurch wird die Gültigkeit von (A2) gezeigt.

Die Abbildungen $\eta$, $\omega(x, k)$, $\psi(y, k)$, $\varphi(x, m)$, $\xi(y, m)$ genügen den Forderungen (B1)–(B8):

Wir beweisen z. B. die Gültigkeit von (B1) und (B7).

Ad (B1) Wir zeigen, daß für $x_1, y_1, y_2 \in R$, $x_2 \in R'$ die Gleichungen $y_1 = x_1 m + k$, $y_2 = x_2^\eta k + m$ genau eine Lösung $(m, k) \in R \times R$ haben. Aus diesen Gleichungen ergibt sich unmittelbar $k = y_1 - x_1 m$, $y_2 = x_2^\eta(y_1 - x_1 m) + m = x_2^\eta y_1 + (1 - x_2^\eta x_1)\,.$ $.\, m$. Wegen $x_2^\eta \in R_0$ ist $x_2^\eta x_1 \in R_0$ und $1 - x_2^\eta x_1 \notin R_0$. Zu $1 - x_2^\eta x_1$ gibt es also ein inverses Element in $R$ und mithin $m = (1 - x_2^\eta x_1)^{-1}(y_2 - x_2^\eta y_1)$, $k = y_1 -$ $- x_1(1 - x_2^\eta x_1)^{-1}(y_2 - x_2^\eta y_1)$. Das Paar $(m, k) \in R \times R$ ist das einzige mit $[x_1, y_1]\,\mathrm{I}\,\langle m, k\rangle$, $y_2 = m^{\omega(x_2,k)}$.

Ad (B7) Es seien $m_1, m_2 \in R$ und $k_1, k_2 \in R'$ mit $\bar{m}_1 \nparallel \bar{m}_2$.

a) Wir zeigen, daß es genau ein $w \in R_0$ mit $wm_1 + k_1^\eta = wm_2 + k_2^\eta$ gibt. Wegen $\bar{m}_1 \nparallel \bar{m}_2$ ist $m_1 - m_2 \notin R_0$ und daher $w = (k_2^\eta - k_1^\eta)(m_1 - m_2)^{-1}$. Wegen $k_2^\eta - k_1^\eta \in R_0$ gilt dabei $w \in R_0$. Mithin gibt es ein $x \in R'$ mit $w^{\eta^{-1}} = x$, also $x^\eta = w$. Daraus ergibt sich $k_1^{\varphi(x,m_1)} = (x^\eta m_1 + k_1^\eta)^{\eta^{-1}} = (x^\eta m_2 + k_2^\eta)^{\eta^{-1}} = k_2^{\varphi(x,m_2)}$.

b) Nehmen wir $k_1 = k_2$ an, dann $k_1^\eta = k_2^\eta$ und $x^\eta m_1 + k_1^\eta = x^\eta m_2 + k_1^\eta$, $x^\eta(m_1 - m_2) = o$. Wegen $m_1 - m_2 \notin R_0$ erhält man daraus $x^\eta = o$ und $x = o^{\eta^{-1}} =$

$= u$. Gilt umgekehrt $x = u$, so $x^\eta = o$ und $om_1 + k_1^\eta = om_2 + k_2^\eta$, was jedoch $k_1^\eta = k_2^\eta$ und folglich $k_1 = k_2$ bedeutet.

Nach unserem Satz läßt sich $\alpha$ zu einer PK-Ebene erweitern, deren Konstruktion im Beweis dieses Satzes angegeben wird.

*Literatur*


[1] *Artmann, B.:* Über die Einbettung uniformer affiner Hjelmslev-Ebenen in projektive Hjemslev-Ebenen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *34* (1970), 127—134.

[2] *Bacon, P. Y.:* On the Extension of Projectively Affine Hjelmslev Planes. Math. Sem. Univ. Hamburg *41* (1974), 185—189.

[3] *Drake, D. A.:* Projective Extension of Uniform Affine Hjelmslev Planes. Math. Z. *105* (1968), 196—207.

[4] *Drake, D. A.:* Existence of parallelismus and projective extension for strongly n-uniform near affine Hjemslev planes. Geom. Ded. *3* (1974), 191—214.

[5] *Klingenberg, W.:* Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *20* (1955), 97—111.

[6] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrien mit Homomorphismus. Math. Annalen *132* (1956), 180—200.

[7] *Lambek, J.:* Lectures on rings and modules. Toronto, London 1966.

[8] *Machala, F.:* Koordinatisation projektiver Ebenen mit Homomorphismus. Czech. Math. J. *27* (*102*) (1977), 573—590.

[9] *Machala, F.:* Koordinatisation affiner Ebenen mit Homomorphismus. Math. Slovaca *27* (1977), 181—193.



*Anschrift des Verfassers:* 771 46 Olomouc, Leninova 26, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UP).