Alexandr N. Zubkov

Об однозначной определённости общих бесконечных выпуклых поверхностей Евклидова пространства

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 28 (1978), No. 1, 87–101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101515

Czechoslovak Mathematical Journal, 28 (103) 1978, Praha

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЁННОСТИ ОБЩИХ БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

А. Н. Зубков, Ростов на Дону

(Поступило в редакцию 8/III 1976 г.)

А. В. Погорелов в дополнении к своей монографии [1] предложил исследовать возможность сведения ворпоса об однозначной определённости бесконечных выпуклых поверхностей евклидова пространства с помощью формул, полученных им в гл. V § 4, к вопросу об однозначной определённости конечных выпуклых поверхностей евклидова пространства. В настоящей статье излагается решение поставленной задачи.

Пусть E_4 – четырехмерное евклидово пространство, отнесённое к ортонормированной системе координат $\{O, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, а R – гиперсфера единичного радиуса этого пространства с центром в точке O. Через $\bar{x}$ обозначим радиус-вектор её текущей точки. Роль прямых и плоскостей в геометрии на гиперсфере R играют её большие круги и большие двумерные сферы [2]. Обозначим через E_0 гиперплоскость $x_0 = 1$ пространства E_4, касательную к R в точке $P(1, 0, 0, 0)$. Каждую точку этой гиперплоскости будем задавать векторами с началом в P.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЩИХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_0 В ВЫПУКЛЫЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ГИПЕРСФЕРЕ R

Рассмотрим в евклидовом пространстве E_0 две общие выпуклые, являющиеся границами выпуклых тел m_1 и m_2 или связными частями этих границ, изометричные поверхности Φ_1 и Φ_2. Пусть

$$\bar{y}_1 = \bar{y}(u, v), \quad \bar{y}_2 = \bar{y}_2(u, v) \tag{1.1}$$

– уравнения этих поверхностей, где u, v – общие (по изометрии) ортогональные координаты на Φ_1 и Φ_2.

Основным, для дальнейшего, результатом этого параграфа является теорема IV об условиях, при которых с помощью погореловского отображения

$$(1.2) \qquad \bar{x}_1 = \varrho(2\bar{y}_1 + \bar{e}_0(1 - \bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2)),$$

$$(1.3) \qquad \bar{x}_2 = \varrho(2\bar{y}_2 + \bar{e}_0(1 - \bar{y}_2^2 + \bar{y}_1^2)),$$

где

$$(1.4) \qquad \varrho = \frac{1}{\sqrt{[1 + 2(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2) + (\bar{y}_1^2 - \bar{y}_2^2)]^2}} > 0,$$

каждой паре общих бесконечных полных выпуклых изометричных поверхностей Φ_1 и Φ_2 ставится в соответствие на R пара общих выпуклых в целом изометричных поверхностей F_1 и F_2.

1. Пусть Φ_1 и Φ_2 – конечные поверхности в E_0. Отображая их по формулам (1.2) и (1.3), получим на R пару поверхностей F_1 и F_2, которые задаются, в силу (1.2) и (1.3), уравнениями

$$(1.5) \qquad \bar{x}_1 = \bar{x}_1(u, v), \quad \bar{x}_2 = \bar{x}_2(u, v).$$

Имеет место

Теорема I. *Если изометричные выпуклые поверхности Φ_1 и Φ_2 евклидова пространства E_0 однозначно проектируются из точки $P(1, 0, 0, 0) \,\bar{\in}\, \Phi_i$ $(i = 1, 2)$, то их образы F_1 и F_2 на гиперсфере R при отображении* (1.2), (1.3) *тоже однозначно проектируются из P.*

Доказательство. Возьмем в E_0 луч

$$(1.6) \qquad \bar{y} = \lambda\bar{a}, \quad |\bar{a}| = 1, \quad \bar{a} \cdot \bar{e}_0 = 0 \quad (\lambda \text{ – параметр, } \lambda \geqq 0),$$

исходящий из точки $P(1, 0, 0, 0)$ в направлении вектора $\bar{a}$, а на R – луч

$$(1.7) \qquad \bar{x} = \varrho_\mu(\bar{e}_0 + \mu\bar{b}), \quad |\bar{b}| = 1, \quad \bar{b} \cdot \bar{e}_0 = 0, \quad \bar{x} \cdot \bar{x} = 1,$$

определяемый единичным вектором $\bar{b}$ с началом в точке P; μ – параметр $(\mu \geqq 0)$, ϱ_μ – нормирующий множитель (см. [1], гл. V, § 1).

В точках встречи луча (1.6) с поверхностью Φ_1

$$\bar{y}_1 = \lambda\bar{a}.$$

Это уравнение имеет не более одного решения λ, т.к. поверхность Φ_1 однозначно проектируется из точки P. Тогда уравнение

$$\varrho(2\bar{y}_1 + \bar{e}_0(1 - \bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2)) = \varrho_\mu(\bar{e}_0 + \mu\bar{b})$$

относительно μ для луча (1.7), встречающего поверхность F_1, так же имеет не более одного решения. А это означает, что F_1 однозначно проектируется из точки P.

Аналогично показывается, что и F_2 — однозначно проектируется из P. ■

Предположим, что Φ_1 и Φ_2 — регулярные, не имеющие особенностей поверхности. Обозначим через $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ — единичные касательные векторы к координатным линиям $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$, а $\bar{a}_3$ — единичный вектор нормали к Φ_1 в точке (u, v). Через $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ и $\bar{b}_3$ обозначим соответствующие по изометрии векторы поверхности Φ_2 в точке (u, v).

Отобразим Φ_1 и Φ_2 по формулам (1.2) и (1.3) на R. Их образы F_1 и F_2, которые задаются уравнениями (1.5), являются, по теореме 2 гл. V, § 4 [1], регулярными, не имеющими особенностей, изометричными поверхностями. Обозначим через $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ и $\bar{c}_3$ — касательные векторы к координатным линиям $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ на поверхности F_1 и вектор нормали к F_1 в точке (u, v), а через $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$ — соответствующие векторы поверхности F_2 в точке (u, v).

Будем говорить, что поверхность F_i видна изнутри из точки P, если она однозначно проектируется из P и в окрестности каждой своей точки B_i не отделяется от P плоскостью a_i, касательной к F_i в точке B_i, $i = 1, 2$.

Теорема II. *Если Φ_1 и Φ_2 — регулярные, не имеющие особенностей, изометричные локально выпуклые поверхности евклидова пространства E_0, видны изнутри из точки P и противоположно ориентированы, то их образы F_1 и F_2 на R при отображении* (1.2), (1.3) *видны также изнутри из точки P и тоже противоположно ориентированы.*

Доказательство. Ориентируем, для орепделённости, поверхность Φ_1 внутренним образом, а Φ_2 — внешним образом. Тогда

$$(\bar{y}_1 \,.\, \bar{a}_3) < 0\,, \tag{1.8}$$

$$(\bar{y}_2 \,.\, b_3) > 0\,. \tag{1.9}$$

Согласно лемме 2, гл. V, § 4 [1],

$$(\bar{e}_0\bar{c}_3) = -8\varrho^3(\bar{y}_1 \,.\, \bar{a}_3)\,. \tag{1.10}$$

Аналогично для F_2,

$$(\bar{e}_0\bar{d}_3) = -8\varrho^3(\bar{y}_2 \,.\, \bar{b}_3)\,. \tag{1.11}$$

Из (1.10), в силу (1.4) и (1.8), следует

$$(\bar{e}_0 \,.\, \bar{c}_3) > 0\,, \tag{1.12}$$

а из (1.11), с учётом (1.4) и (1.9) —

$$(\bar{e}_0 \,.\, \bar{d}_3) < 0\,. \tag{1.13}$$

Так как Φ_1 и Φ_2 видны изнутри из точки P и Φ_1 ориентирована внутренним образом, а Φ_2 – внешним образом, то (доказательство теоремы 4, гл. V, § 4, [1])

$$(1.14) \qquad (\Delta\bar{x}_1 \,.\, \bar{c}_3) > 0\,,$$

где $\Delta\bar{x}_1$ – приращение радиуса-вектора при переходе от произвольной точки $B_1 \in F_1$ к близкой к ней точке $C_1 \in F_1$, а

$$(1.15) \qquad (\Delta\bar{x}_2 \,.\, \bar{d}_3) < 0\,,$$

где $\Delta\bar{x}_1$ – приращение радиуса-вектора при переходе от соответствующей точки $B_2 \in F_2$ к близкой к ней точке $C_2 \in F_2$, соответствующий точке C_1.

Из (1.12) и (1.14) вытекает, что F_1 в окрестности точки B_1 располагается с точкой P на одной полугиперсфере относительно касательной плоскости α_1 к F_1 в точке B_1. А из (1.13) и (1.14) следует, что и F_2 в окрестности точки B_2 так же находится с точкой P на одной полугиперсфере относительно плоскости α_2 касательной к F_2 в точке B_2. Отсюда, и в силу теоремы 1, вытекает, что поверхности F_1 и F_2 видны изнутри из точки P. Из (1.12) и (1.13) тогда заключаем, что они ориентированы противоположно. ∎

Теорему II можно распространить на случай общих выпуклых поверхностей. Верно более общее утверждение.

Теорема III. *Пусть Φ_1 и Φ_2 – общие изометричные выпуклые поверхности евклидова пространства E_0, которые видны изнутри из точки P и противоположно ориентированы. Тогда их образы F_1 и F_2 на гиперсфере R при отображении* (1.2), (1.3) *будут общими изометрическими поверхностями, которые видны также изнутри из точки P и любые их куски $V_1(F_1)$ и $V_2(F_2)$, проектируемые выпуклыми, не вырожденными в лучи или плоские углы, телесными конусами $V_1 \subset R$ и $V_2 \subset R$, будут выпуклыми в целом поверхностями.*

Доказательство проводится путем аппроксимации поверхностей Φ_1 и Φ_2 в окрестностях соответствующих по изометрии точек $\mathscr{A}_1 \in \Phi_1$ и $\mathscr{A}_2 \in \Phi_2$ регулярными, не имеющими особенностей, изометричными, одинаково ориентированными с Φ_1 и Φ_2 поверхностями $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$, которые видны изнутри из точки P. Отображая $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ по формулам (1.2) и (1.3) на R, получим регулярные, локально выпуклые поверхности $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$ (см. [1], гл. V § 4 теорема 4), которые аппроксимируют F_1 и F_2 в окрестностях точек $B_1 \in F_1$ и $B_2 \in F_2$, соответствующих точкам $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$. В силу теоремы II, поверхности $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$ видны изнутри из точки P. Проводя затем рассуждение подобно тому, как это было сделано в § 6 гл. V [1], легко показать, что поверхности F_1 и F_2 в окрестностях своих точек, соответствующих коническим и ребристым точкам поверхностей Φ_1 и Φ_2, будут выпуклыми и видными изнутри из точки P.

Рассмотрим отдельно случай, когда B_1 — гладкая точка поверхности F_1. При этом точка $\mathscr{A}_1 \in \Phi_1$ — прообраз B_1 и точка $\mathscr{A}_2 \in \Phi_2$, соответствующая $\mathscr{A}_1$ по изометрии, являются гладкими. Для удобства выкладок точки $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ и B_1 будем задавать их векторами $\bar{y}_1, \bar{y}_2$, исходящими из точки P и вектором $\bar{x}_1$ с началом в точке O. Возьмем на Φ_1 точку $\bar{y}_1 + \Delta\bar{y}_1$, близкую к $\bar{y}_1$, а на Φ_2 — соответствующую по изометрии точку $\bar{y}_2 + \Delta\bar{y}_2$. Соединим точки $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_1 + \Delta\bar{y}_1$, кратчайшей $\gamma_1 \subset \Phi_1$, а точки $\bar{y}_2$ и $\bar{y}_2 + \Delta\bar{y}_2$ — соответствующей по изометрии кратчайшей $\gamma_2 \subset \Phi_2$. По свойству кратчайшей на выпуклой поверхности (см. [1], гл. II § 2 теоремы 3, 4) вектор $\bar{y}_i + \Delta\bar{y}_i$ допускает разложение:

$$\bar{y}_i + \Delta\bar{y}_i = \bar{y}_i + \Delta s\bar{\tau}_i + \delta\bar{v}_i + \varepsilon_i\bar{\zeta}_i\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{1.16}$$

где $\bar{\tau}_i$ — единичный касательный вектор к кратчайшей γ_i в точке $\bar{y}_i$, $\bar{v}_i$ — единичный вектор внутренней нормали поверхности Φ_i в точке $\bar{y}_i$, $\bar{\zeta}_i$ — некоторый единичный вектор не компланарный с $\bar{\tau}_i$ и $\bar{v}_i$ и, кроме того,

$$\frac{\delta_i}{\Delta s} \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon_i}{\delta_i} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0\,;$$

δ_i — расстояние точки $\bar{y}_i + \Delta\bar{y}_i$ от касательной плоскости поверхности Φ_i в точке $\bar{y}_i$, которое считают положительным, если точка $\bar{y}_i + \Delta\bar{y}_i$ находится с той стороны от касательной плоскости к Φ_i в точке $\bar{y}_i$, куда направлен вектор нормали к Φ_i и отрицательными в противном случае.

Подставляя выражения (1.16) для $\bar{y}_1 + \Delta\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2 + \Delta\bar{y}_2$ в формулу (1.2), найдем приращение $\Delta\bar{x}_1$ радиуса-вектора при переходе от точки $\bar{x}_1 \in F_1$, к близкой к ней точке $\bar{x}_1 + \Delta\bar{x}_1 \in F_1$. Умножая затем Δx_1 скалярно на вектор нормали $\bar{n}_1$ поверхности F_1 в точке $\bar{x}_1$, получим:

$$\begin{gathered}(\bar{n}_1\,.\,\Delta\bar{x}_1) = 2\varrho\{(\bar{\tau}_1\,.\,\bar{n}_1) + (\bar{e}_0\,.\,\bar{n}_1)\,[(\bar{y}_2\,.\,\bar{\tau}_2) - (\bar{y}_1\,.\,\bar{\tau}_1)]\}\,.\,\Delta s\,+\\ +\,2\varrho\{\delta_1(\bar{v}_1\,.\,\bar{n}_1) + (\bar{e}_0\,.\,\bar{n}_1)\,[(\bar{y}_2\,.\,\bar{v}_2)\delta_2 - (\bar{y}_1\,.\,\bar{v}_1)\,\delta_1]\}\,+\\ +\,2\varepsilon'\{(\bar{\tau}_1\,.\,\bar{n}_1) + (\bar{e}_0\,.\,\bar{n}_1)\,[(\bar{y}_2\,.\,\bar{\tau}_2) - (\bar{y}_1\,.\,\bar{\tau}_1)]\}\,.\,\Delta s + \varepsilon'\,.\,O(\delta_1, \delta_2) + O(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\,,\end{gathered}$$

где $\varepsilon' \to 0$ при $\Delta s \to 0$.

Так как величина $(\bar{n}_1\,.\,\Delta\bar{x}_1)$ должна быть более высокого порядка малости, чем Δs, то

$$(\bar{\tau}_1\,.\,\bar{n}_1) + (\bar{e}_0\,.\,\bar{n}_1)\,[(\bar{y}_2\,.\,\bar{\tau}_2) - (\bar{y}_1\,.\,\bar{\tau}_1)] = 0\,.$$

Следовательно,

$$(\bar{n}_1\,.\,\Delta\bar{x}_1) = 2\varrho\{\delta_1[(\bar{v}_1\,.\,\bar{n}_1) - (\bar{e}_0\,.\,\bar{n}_1)\,(\bar{y}_1\,.\,\bar{v}_1)] + \delta_2(\bar{e}_0\,.\,\bar{n}_1)\,(\bar{y}_2\,.\,\bar{v}_2)\} + o(\Delta s^2)\,.$$

Таким образом, чтобы установить локальную выпуклость поверхности F_1 в точке $\bar{x}_1$ достаточно показать, что выражения

$$A' = \delta_1[(\bar{v}_1\,.\,\bar{n}_1) - (\bar{e}_0\,.\,\bar{n}_1)\,(\bar{y}_1\,.\,\bar{v}_1)] \quad \text{и} \quad B' = \delta_2(\bar{e}_0\,.\,\bar{n}_1)\,(\bar{y}_2\,.\,\bar{v}_2)$$

одного знака в окрестности этой точки.

Предполагая, для определённости, что поверхность Φ_1 ориентирована внутренним образом, а Φ_2 — внешним, имеем $\delta_1 > 0$, а $\delta_2 < 0$ и, следовательно, выражения A' и B' будут того же знака, что и величины $A = (\bar{c}_3 \,.\, \bar{a}_3) - (\bar{e}_0 \,.\, \bar{c}_3) \,.\, (\bar{a}_0 \,.\, \bar{a}_3)$ и $B = (\bar{e}_0 \,.\, \bar{c}_3)(\bar{b}_0 \,.\, \bar{b}_3)$ в лемме 2 гл. V § 4 [1]. Так как Φ_1 и Φ_2 видны изнутри из точки P и противоположно ориентированы, то A и B согласно этой лемме, одного знака.

Локальная выпуклость поверхности F_2 устанавливается аналогично.

Поверхность F_i в окрестности точки B_i видна изнутри из токчи P. Это следует из того, что регулярные поверхности $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$, касательные к F_1 и F_2 в точках B_1 и B_2 видны изнутри из точки P и знаки выражений A и B для поверхностей $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ те же, что и для поверхностей Φ_1 и Φ_2.

Докажем, что любой из кусков $V_i(F_i)$ — выпуклый в целом. (Если F_i — замкнутая поверхность, то не исключено, что $V_i(F_i) \equiv F_i$). Для этого достаточно показать, что любая плоскость $\alpha \subset R$, проходящая через точку P и секущая $V_i(F_i)$, пересекает его по выпуклой кривой λ_i.

Отобразим поверхности Φ_1 и Φ_2 по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\bar{e}_0 + \bar{y}}{\sqrt{(1 + \bar{y}^2)}}, \quad (\bar{x} \,.\, \bar{x}) = 1 \tag{1.17}$$

в область $R_0\,(x_0 > 0)$ гиперсферы R. Тогда они изобразятся выпуклыми поверхностями $\varphi_1 \subset R$ и $\varphi_2 \subset R$, которые видны изнутри из точки P. Взаимно однозначное соответствие между точками поверхностей φ_i и F_i осуществляется, как видно из формул (1.2), (1.3), (1.17) и теоремы 1, проектированием из точки P прямыми гиперсферы R. Таким образом, куску $V_i(F_i)$ соотвествует кусок $V_i(\varphi_i) \subset \varphi_i$.

Будем говорить, что поверхность F_i обращена в окрестности произвольной точки $B_i \in F_i$ внутренней стороной к точке P и слабо выпукла, если она однозначно проектируется из P и через точку B_i можно провести плоскость $\beta_i \subset R$ такую что любая сфера на R, касающаяся β_i в точке B_i и отделяемая от P плоскостью β_i, является локально опорной, т.е. точки поверхности F_i, достаточно близкие к B_i лежат вне этой сферы.

Поверхность F_i является в конических, ребристых и гладких точках локально выпуклой и, следовательно, слабо выпуклой и обращена к точке P внутренней стороной.

Возьмём произвольную плоскость $\alpha \subset R$, проходящую через P и секущую поверхность $V_i(\varphi_i)$. Согласно лемме 1 гл. V, § 6 [1], почти все такие плоскости пересекают её рёбра. Но рёбра поверхностей φ_i и F_i соответствуют друг другу, поэтому α пересекает почти все рёбра поверхности $V_i(F_i)$. В каждой точке линии $\lambda_i = V_i(F_i) \cap \alpha$ поверхность $V_i(F_i)$ будет, по крайней мере, слабо выпуклой. Обозначим через L_i выпуклую оболочку кривой λ_i в плоскости α. Точками соприкосновения с образующими конуса V_i, лежащими в α, кривая L_i, разбивается на две части. Пусть L_i^1 — та её часть, которая дальше от точки P. Докажем, что λ_i

совпадает с L_i^1. Если λ_i не совпадает с L_i^1, то каждая часть $L_i^1 \sqsubset \lambda_i$ состоит из отрезка прямой гиперсферы R с концами на кривой λ_i. Допустим, что g — один из таких отрезков и $\tilde{\lambda}_i$ — отрезок кривой λ_i, являющийся центральной проекцией кривой λ_i на g из P. Отрезок g принадлежит прямой $G \subset R$, которая делит α на две части, одна из которых α_1, содержит точку P и $\tilde{\lambda}_i$, а другая — α_2 не содержит их. Возьмём на G две точки Q_1 и Q_2 такие, чтобы отрезок $[Q_1, Q_2]$ не превосходил по длине половины дуги большой окружности G и содержал g. Проведем в α_1 через точки Q_1 и Q_2 дугу окружности, центр которой находится в α_2 и лежит на луче $l \subset \alpha$:

$$\bar{x}_2 = \varrho_2(\bar{x}_M + t\bar{b}), \quad |\bar{b}| = 1, \quad \bar{b} \cdot \bar{e}_0 < 0 \quad (t - \text{параметр}, \ t \geqq 0),$$

исходящем из точки M — середины отрезка $[Q_1, Q_2]$ в направлении, перпендикулярном направлению прямой G, такого радиуса, чтобы область, ограниченная ею и отрезком $[Q_1, Q_2]$, содержала $\tilde{\lambda}_i$. Представим себе, что эта окружность непрерывно деформируется так, что центр её смещается по l в направлении возрастания параметра t и сама она во всё время деформации проходит через точки Q_1 и Q_2. Тогда наступит такой момент, когда эта окружность внутренней стороной коснётся кривой $\tilde{\lambda}_i$. А это противоречит тому, что поверхность $V_i(F_i)$ в окрестности каждой своей точки слабо выпукла и обращена внутренней стороной к точке P.

Итак, почти все плоскости гиперсферы R, проходящие через точку P пересекают $V_i(F_i)$ по выпуклым кривым. Отсюда следует, что поверхность $V_i(F_i)$ — выпуклая в целом.

Изометричность поверхностей F_1 и F_2 доказывается так как это было сделано в § 6 гл. V [1] при исследовании образов в E_0 общих выпуклых поверхностей эллиптического пространства. ■

2. Рассмотрим теперь в E_0 две общие бесконечные полные выпуклые изометрические поверхности Φ_1 и Φ_2, являющиеся границами выпуклых тел m_1 и m_2, которые содержат телесные конусы K_1 и K_2. Эти конусы называют предельными конусами тел m_1 и m_2 [3]. Будем считать, что вершина конуса K_i принадлежит Φ_i, $i = 1, 2$. Тогда поверхность k_i конуса K_i является, как известно, предельным конусом поверхности Φ_i. Расположим тела m_1 и m_2 так, чтобы

А) обе поверхности Φ_1 и Φ_2 были видны изнутри из точки P.

Б) две, произвольно взятые, соответственные по изометрии точки $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ этих поверхностей совпадали с фиксированной точкой $\mathscr{A}(1, 0, 0, -h)$;

В) положительная полуось Py_3 проходила внутри k_ι. Пространство E_0, в случае необходимости, будем считать пополненным бесконечно удалёнными элементами.

Докажем основную теорему этого параграфа.

Теорема IV. *Пусть Φ_1 и Φ_2 — две общие бесконечные полные выпуклые изометричные поверхности пространства E_0 противоположно ориентированы и расположены так, что выполняются условиая* А) – В).

Пусть $k_1 \equiv k_2 = k$ и для любых, соответственных по изометрии последовательностей точек $M_{1\alpha} \in \Phi_1$ и $M_{2\alpha} \in \Phi_2$, уходящих в бесконечность, направления лучей $PM_{1\alpha}$ и $PM_{2\alpha}$ сходятся к направлению одной и той же образующей l конуса k (если k — луч, то они сходятся к направлению оси Py_3).

Тогда, если пространство E_0 пополнено бесконечно удалёнными элементами, то образы F_1 и F_2 этих поверхностей на гиперсфере R при отображении (1.2), (1.3) *будут общими изометричными выпуклыми в целом поверхностями либо с общим фиксированным краем, либо замкнутыми, если k — луч или плоский угол, и видны изнутри из точки P.*

Доказательство. Пусть Π — плоскость пространства E_0, проходящая через точку $(1, 0, 0, \alpha)$, $\alpha \geqq -h$, ортогонально оси Py_3. Смещая её в направлении оси Py_3 параллельно себе, отсечём последовательность выпуклых поверхностей $\Phi_{1\alpha}$ с плоским краем $\beta_{1\alpha}$ и общей точкой $\mathscr{A}(1, 0, 0, -h)$, удовлетворяющих условию

$$\Phi_{1\alpha_1} \subset \Phi_{1\alpha_2} \subset \Phi_{1\alpha_3} \subset \dots, \quad \text{если} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots \tag{1.18}$$

объединение которых даёт Φ_1. По изометрии между Φ_1 и Φ_2 на поверхности Φ_2 определится последовательность областей $\Phi_{2\alpha}$ также удовлетворяющих условию

$$\Phi_{2\alpha_1} \subset \Phi_{2\alpha_2} \subset \Phi_{2\alpha_3} \subset \dots, \quad \text{если} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots . \tag{1.19}$$

Возьмём на Φ_1 любую последовательность точек $M_{1\alpha} \in \beta_{1\alpha}$.

На Φ_2 ей соответствует последовательность точек $M_{2\alpha} \in \beta_{2\alpha}$, где $\beta_{2\alpha}$ — замкнутая кривая, ограничивающая область $\Phi_{2\alpha}$. Так как направления лучей $PM_{1\alpha}$ и $PM_{2\alpha}$ сходятся к направлению одной и той же образующей l конуса k, то для координат y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} точек $M_{i\alpha}$ выполняются условия:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{y_{i1}}{y_{i3}} = a\,, \quad \lim_{\alpha\to\infty} \frac{y_{i2}}{y_{i3}} = b\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{1.20}$$

где

$$a \geqq 0 \quad \text{и} \quad b \geqq 0\,. \tag{1.21}$$

Для каждого α паре поверхностей $\Phi_{1\alpha}$ и $\Phi_{2\alpha}$ соответствует на R, согласно теореме III, пара общих изометрических, по крайней мере локально выпуклых поверхностей $F_{1\alpha}$ и $F_{2\alpha}$, которые видны изнутри из точки P. Из (1.18) и (1.19), в силу взаимной однозначности отображения (1.2), (1.3), следует:

$$F_{i\alpha_1} \subset F_{i\alpha_2} \subset F_{i\alpha_3} \subset \dots, \quad \text{если} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots, \quad i = 1, 2\,. \tag{1.22}$$

Последовательностям точек $M_{i\alpha} \in \beta_{i\alpha}$ соответствуют последовательности точек $N_{i\alpha}$, принадлежащих граничным кривым $\beta'_{i\alpha} \subset F_{i\alpha}$. Покажем, что кривые $\beta'_{1\alpha}$ и $\beta'_{2\alpha}$ стягиваются к одной и той же кривой $\beta' \subset R$. Для этого, пополняя пространство E_0 бесконечно удалёнными элементами и вводя в нём однородные координаты, перейдем от неоднородных координат точек поверхностей Φ_1 и Φ_2 к однородным Y_0, Y_{im}, положив

$$y_{im} = \frac{Y_{im}}{Y_0}, \quad i = 1, 2; \quad m = 1, 2, 3. \tag{1.23}$$

Разлагая радиусы-векторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ ((1.2), (1.3)) точек $N_{1\alpha}$ и $N_{2\alpha}$ по базису $\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и используя (1.23), выразим вейерштрассовы координаты x_{i0}, x_{im} точек $N_{i\alpha}$ через однородные координаты Y_0, Y_{im} их прообразов $M_{i\alpha}$:

$$x_{i0} = \pm \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \dfrac{4(Y_{i1}^2 + Y_{i2}^2 + Y_{i3}^2)\, Y_0^2}{[Y_0^2 + (-1)^i (Y_{11}^2 + Y_{12}^2 + Y_{13}^2 - Y_{21}^2 - Y_{22}^2 - Y_{23}^2)]^2}\right]}}, \tag{1.24}$$

$$x_{im} = \frac{2Y_{im}}{\sqrt{\left[\dfrac{[Y_0^2 + (-1)^i (Y_{11}^2 + Y_{12}^2 + Y_{13}^2 - Y_{21}^2 - Y_{22}^2 - Y_{23}^2)]^2}{Y_0^2} + 4(Y_{i1}^2 + Y_{i2}^2 + Y_{i3}^2)\right]}}, \tag{1.25}$$

$i = 1, 2$; $m = 1, 2, 3$.

Так как направления лучей $PM_{i\alpha}$ сходятся к направлению одной и той же образующей l конуса k, то

$$Y_0 \to 0 \tag{1.26}$$

и

$$Y_{im} \to Y_m, \quad i = 1, 2; \quad m = 1, 2, 3. \tag{1.27}$$

при $\alpha \to \infty$, где 0 и Y_m — однородные координаты бесконечно удалённой точки образующей l.

В силу компактности R бесконечная последовательность точек $N_{i\alpha}$ является сходящейся. Следовательно, при условиях (1.26), (1.27) существуют $\lim x_{i0}$ и $\lim x_{im}$, $i = 1, 2$. С другой стороны, как видно из (1.24) и (1.25), при условии (1.27) для любого фиксированного, но не равного нулю значения Y_0 существуют конечные $\lim x_{i0}$ и $\lim x_{im}$. Следовательно, учитывая (1.20) и (1.23), получим, что

$$\lim x_{i0} = 0, \quad \lim x_{i1} = \frac{a}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}, \tag{1.28}$$

$$\lim x_{i2} = \frac{b}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}, \quad \lim \frac{1}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}, \quad i = 1, 2.$$

А это означает, что кривые $\beta'_{1\alpha}$ и β'_{22} стягиваются в одну и ту же кривую $\beta' \subset R$, которая лежит в плоскости $\bar{x}^2 = 1$, $x_0 = 0$. Кривая β' — замкнутая и выпуклая. Действительно, возьмём конус $\tilde{k} \subset E_0$ с вершиной в точке P, который получен из конуса k параллельным переносом на вектор $\overline{AP}$, и спроектируем его по формуле (1.17) на R. Получим выпуклый конус $\tilde{k}' \subset R$ с вершиной в точке P. Пусть $\tilde{l}$ — произовольная образующая конуса $\tilde{k}$. Возьмём на ней последовательность точек $\tilde{M}_2$, уходящих в бесконечность. На конусе $\tilde{k}^1$ этой последовательности соотвествует последовательность точек $\tilde{M}'_\alpha$. Разлагая радиусы-векторы $\bar{x}_\alpha$ точек $\tilde{M}'_\alpha$ по базису $\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и используя (1.23), выразим вейерштрассовы координаты $\tilde{x}_n$ точек $\tilde{M}'_\alpha$ через однородные координаты $\tilde{Y}_n$, $n = 0, 1, 2, 3$ их прообразов $\tilde{M}_\alpha$:

$$\tilde{x}_n = \frac{\tilde{Y}_n}{\sqrt{(\tilde{Y}_0^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2 + \tilde{Y}_3^2)}}. \tag{1.29}$$

Так как конус $\tilde{k}$ получен из k параллельным переносом, то из (1.29), в силу (1.20) и (1.23), при $\alpha \to \infty$ получаем:

$$\lim \tilde{x}_0 = 0\,, \quad \lim x_1 = \frac{a}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}, \tag{1.30}$$

$$\lim \tilde{x}_2 = \frac{b}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}, \quad \lim \tilde{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}.$$

Обозначим через $\tilde{\beta}'$ граничную кривую конуса $\tilde{k}'$. Так как конус $\tilde{k}'$ — выпуклый, то $\tilde{\beta}'$ — замкнутая выпуклая кривая, которая, как видно их (1.21) и (1.30), может быть вырожденной в точку $(0, 0, 0, 1)$ или отрезок прямой в плоскости $\bar{x}^2 = 1$, $x_0 = 0$. Из (1.28) и (1.30) следует, что $\tilde{\beta}' \equiv \beta'$. Таким образом, поверхности $F_1 = \lim\limits_{\alpha \to \infty} F_{1\alpha}$ и $F_2 = \lim\limits_{\alpha \to \infty} F_{2\alpha}$, являющиеся образами поверхностей Φ_1 и Φ_2 пространства E_0, пополненного бесконечно удалёнными элементами, при отображении (1.2), (1.3), ограничены одной и той же замкнутой выпуклой кривой β', лежащей в плоскости $\bar{x}^2 = 1$, $x_0 = 0$. Так как $F_{i\alpha}$ — общая, по крайней мере локально выпуклая поверхность, которая видна изнутри из точки P, то, в силу (1.22), F_i тоже общая, по меньшей мере локально выпуклая поверхность, которая видна изнутри из точки P. Если F_i замкнутая поверхность, то, рассуждая как при доказательстве теоремы III, убедимся, что она выпуклая в целом. Если же F_i — поверхность с фиксированным краем β', то дополняя её выпуклой областью Ω плоскости $\bar{x}^2 = 1$, $x_0 = 0$, ограниченной кривой β', получим замкнутую, по крайней мере слабо выпуклую поверхность $F_i + \Omega$, которая видна изнутри из точки P. По теореме III, $F_i + \Omega$ — замкнутая выпуклая в целом поверхность. Следовательно, выпукла в целом и поверхность F_i. Изометричность поверхностей F_1 и F_2 вытекает из изометричности их соответственных областей F_{12} и F_{22} и того, что они имеют общую границу, в которую стягиваются кривые, ограничивающие эти области. ■

Условиям доказанной теоремы при $a = 0$ и $b = 0$ удовлетворяет эллиптический параболоид, ось которого совпадает с осью Py_3 и бесконечные выпуклые полные поверхности, которые получены путем склеивания выпуклого полуцилиндра с выпуклой шапкой. В силу леммы 2 гл. III. § 8 [1], этим условиям удовлетворяют вообще бесконечные выпуклые поверхности с полной кривизной 2π. При $a \neq 0$ и $b \neq 0$ примером бесконечной выпуклой поверхности, удовлетворяющей условиям теоремы может служить верхняя полость двуполостного гиперболоида

$$\frac{y_1^2}{c_1^2} + \frac{y_2^2}{c_2^2} - \frac{y_3^2}{c_3^2} = 1\,,$$

а также, в силу теоремы С. П. Оловянишникова, бесконечные выпуклые изометричные поверхности с полной кривизной $< 2\pi$, которые имеют общий предельный конус, и некоторая образующая l этого конуса является предельной образующей для двух соответствующих по изометрии лучей γ_1 и γ_2 этих поверхностей.

2. ОДНОЗНАЧНАЯ ОПРЕДЕЛЁННОСТЬ ОБЩИХ БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

1. Теорема V. *Общие бесконечные полные изометричные выпуклые поверхности Φ_1 и Φ_2 евклидова пространства, предельные конусы которых — лучи, конгруэнтны или симметричны.*

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений можно считать, что поверхности $\Phi_i \subset E_0$, $i = 1, 2$, в результате движения и зеркального отражения, расположены в E_0 так, что выполняются условия A) — B) § 1, и противоположно ориентированы. Тогда, пополняя пространство E_0 бесконечно удалёнными элементами и отображая Φ_1 и Φ_2 по формулам (1.2) и (1.3), получим на R, согласно теореме IV, пару общих замкнутых изометричных выпуклых в целом поверхностей F_1 и F_2, корые видны изнутри из точки P и имеют две общие точки: Точку $\mathscr{A}'(1/\sqrt{(1 + 4h^2)}, 0, 0, -2h/\sqrt{(1 + 4h^2)})$, в которую переходит точка $\mathscr{A}(1, 0, 0, -h)$ и точку $(0, 0, 0, 1)$.

Пусть $\bar{e}_0'(\cos\varphi, 0, 0, \sin\varphi)$, $(0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi)$ — некоторая точка на R. Дополним вектор $\bar{e}_0^1$ до ортонормированного базиса $\bar{e}_0'$, $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_3'$ пространства E_4, положив

$$\begin{aligned}
\bar{e}_0' &= \bar{e}_0 \cos\varphi + \bar{e}_3 \sin\varphi\,,\\
\bar{e}_1' &= \bar{e}_1\,,\\
\bar{e}_2' &= \bar{e}_2\,,\\
\bar{e}_3' &= -\bar{e}_0 \sin\varphi + \bar{e}_3 \cos\varphi\,.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

При достаточно малом значении угла φ для всех соответственных по изометрии пар точек $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ поверхностей F_1 и F_2:

$$(2.2)\qquad (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\,\bar{e}'_1 > 0\,.$$

Действительно, в силу (1.2), (1.3) и (2.1),

$$(2.3)\qquad (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\,\bar{e}^1_0 = (y_{13} + y_{23})\sin\varphi + \cos\varphi$$

и так как Φ_1 и Φ_2 расположен так, что выполняется условие В), то существует на оси Py_3 точка $M(1, 0, 0, -H)$ такая, что Φ_1 и Φ_2 будут полностью находиться в открытом полупространстве

$$(2.4)\qquad y_3 > -H\,, \quad H > 0$$

определяемом плоскостью $y_3 = -H$.

Из (2.3) и (2.4) следует

$$(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\,\bar{e}'_0 > -2H\sin\varphi + \cos\varphi\,.$$

Отсюда, при $\operatorname{tg}\varphi < 1/2H$, вытекает (2.2).

Обозначим через φ' произвольное значение φ, удовлетворяющее (2.2). Так как F_1 и F_2 – выпуклые в целом поверхности и видны изнутри из точки P, то существует сферическая окрестность точки P, лежащая как внутри F_1, так и внутри F_2. Обозначим через φ'' угол между радиусом-вектором $\bar{e}''_0(\cos\varphi'', 0, 0, \sin\varphi'')$ точки, лежащей внутри этой окрестности и радиусом-вектором $\bar{e}_0(1, 0, 0, 0)$ точки P. Выберем $\tilde{\varphi} = \min[\varphi', \varphi'']$. Тогда это значение $\tilde{\varphi}$ будет удовлетворять обоим, вышеуказанным условиям. Ориентируем поверхности F_1 и F_2 одинаково и по формулам

$$(2.5)\qquad \bar{y}'_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{e}'_0(\bar{x}_i\bar{e}'_0)}{\bar{e}'_0(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)}\,, \quad i = 1, 2\,,$$

отобразим в евклидово пространство $E'_0(x'_0 = 1)$. Получим, в силу (2.2), пару общих изометричных замкнутых выпуклых в целом поверхностей Φ'_1 и Φ'_2, которые видны изнутри из точки $P'(\cos\tilde{\varphi}, 0, 0, \sin\tilde{\varphi})$ (см. § 6 гл. V [1]). По теореме 1 гл. III § 6 [1], эти поверхности конгруэнтны. Они имеют на оси $P'y'_3$ две общие точки: точку

$$\mathscr{B}\left(\cos\tilde{\varphi}, 0, 0, -\frac{1}{2}\,\frac{\sin\tilde{\varphi} + 2h\cos\tilde{\varphi}}{\cos\tilde{\varphi} - 2h\sin\tilde{\varphi}}\right),$$

являющуюся образом точки $\mathscr{A}'$, и точку $\mathscr{D}(\cos\tilde{\varphi}, 0, 0, \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\tilde{\varphi})$, в которую переходит точка (0, 0,0,1). С каждой из этих точек совпадает пара соответственных по изометрии точек поверхностей Φ'_1 и Φ'_2. И так как эти поверхности конгруэнтны и видны изнутри из точки P', то вращением

$$(2.6)\quad y'_{11} = y'_{21}\cos\psi + y_{22}\sin\psi\,, \quad y'_{12} = -y'_{21}\sin\psi + y_{23}\cos\psi\,, \quad y'_{13} = y'_{23}$$

в E'_0 вокруг оси $P'y'_3$ на угол ψ соответственные точки их могут быть совмещены.

Подставляя (1.2) и (1.3) в (2.5) найдем формулы

$$(2.7)\quad \bar{y}'_i = \frac{2(\bar{y}_i - \bar{e}_0(\bar{y}_i\bar{e}_0)) + (\bar{e}_0 - \bar{e}'_0(\bar{e}_0\bar{e}'_0))\left[1 - (-1)^i(\bar{y}_1^2 - \bar{y}_2^2)\right]}{2(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{e}_0)\,\bar{e}'_0}, \quad i = 1, 2,$$

по которым паре бесконечных поверхностей $\Phi_1 \subset E_0$ и $\Phi_2 \subset E_0$ ставится в соответствие пара конечных поверхностей Φ'_1 и Φ'_2 евклидова пространства E'_0. Разлагая (2.7) по базису $\bar{e}'_0, \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ и используя (2.1) получим формулы, выражающие координаты y'_{in}, $i = 1, 2$; $n = 1, 2, 3$, и системе $\{O, \bar{e}'_0, \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ точек поверхностей Φ'_1, и Φ'_2 через координаты y_{in} в системе $\{O, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ соответственных точек Φ_1 и Φ_2:

$$(2.8)\quad y'_{i1} = \delta y_{i1}, \quad y'_{i2} = \delta y_{i2},$$

$$y'_{i3} = \delta\{y_{i3}\cos\tilde{\varphi} - \tfrac{1}{2}[1 + (-1)^i(\bar{y}_1^2 - \bar{y}_2^2)]\}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$\delta = \frac{1}{(y_{13} + y_{23})\sin\tilde{\varphi} + \cos\tilde{\varphi}}.$$

Из первых пар уравнений (2.6) и (2.8) вытекают соотношения:

$$y_n = y_{21}\cos\psi + y_{22}\sin\psi, \quad y_{12} = -y_{21}\sin\psi + y_{22}\cos\psi$$

между координатами соответственных по изометрии точек поверхностей Φ_1 и Φ_2. Откуда следует, что:

$$(2.9)\quad y_{11}^2 + y_{12}^2 = y_{21}^2 + y_{22}^2.$$

Из третьих уравнений систем (2.6) и (2.8), в силу (2.9), получаем:

$$(y_{13} - y_{23})\left[\cos\tilde{\varphi} + (y_{13} + y_{23})\sin\tilde{\varphi}\right] = 0.$$

Отсюда, т.к. $\cos\tilde{\varphi} + (y_{13} + y_{23})\sin\tilde{\varphi} > 0$, вытекает $y_{13} = y_{23}$. Таким образом, изометрическое отображение, указанное в теореме, между поверхностями Φ_1 и Φ_2 происходит по формулам:

$$y_{11} = y_{21}\cos\psi + y_{22}\sin\psi, \quad y_{12} = -y_{21}\sin\psi + y_{22}\cos\psi, \quad y_{13} = y_{23}$$

А это означает, что поверхности Φ_1 и Φ_2 — конгруэтны. ∎

Имеет место:

Теорема VI. *Пусть Φ_1 и Φ_2 — две общие полные бесконечные выпуклые изометричные поверхности евклидова пространства имеют общий предельный конус k не вырожденный в луч. Тогда, если для любых, соответственных по изометрии последовательностей точек $M_{1\alpha} \in \Phi_1$ и $M_{2\alpha} \in \Phi_2$, уходящих в беско-*

нечность, направления лучей $PM_{1\alpha}$ и $PM_{2\alpha}$ сходятся к направлению одной и той же образующей l конуса k, то поверхности Φ_1 и Φ_2 равны.

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений можно считать, что выполняется условие B) § 1. Тогда, пополняя пространство E_0 бесконечно удалёнными элементами, ориентируя Φ_1 и Φ_2 противоположно и отображая их по формулам (1.2) и (1.3) на R, получим, солгасно теореме IV, две общие выпуклые в целом изометричные поверхности F_1 и F_2, которые видны изнутри из точки P и являются либо замкнутыми, либо имеют в плоскости $\bar{x}^2 = 1$, $x_0 = 0$ общую границу β'. Если они с краём, то областью Ω плоскости $\bar{x}^2 = 1$, $x_0 = 0$ ограниченной кривой β' дополним их до замкнутых выпуклых изометричных поверхностей $F_1 + \Omega$ и $F_2 + \Omega$. Проводя далсе рассуждения, как в теореме V, получим в евклидовом пространстве $E'_0(x'_0 = 1)$ пару замкнутых изометричных выпуклых поверхностей Φ'_1 и Φ'_2 или $\Phi'_1 + \Omega'$ и $\Phi_2 + \Omega'$. По теореме 1 гл. III § 6 [1], они равны. Отсюда, как и при доказательстве теоремы V, заключаем о равенстве самых поверхностей Φ_1 и Φ_2. ■

Из теорем V, VI и замечания к теореме IV следует однозначная определённость эллиптического параболоида, выпуклых поверхностей, полученных склеиванием выпуклого полуцилиндра с выпуклой шапкой, и вообще бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной 2π, и также поверхностей с полной кривизной $<2\pi$, имеющих общий предельный конус, некоторая образующая l которого является предельной для двух соответствующих по изометрии лучей γ_1 и γ_2 этих поверхностей [1].

2. Рассмотрим в евклидовом пространстве E_0 две общие бесконченые выпуклые изометричные поверхности Φ_1 и Φ_2, ограничевные замкнутыми кривыми γ_1^i и γ_2^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, соответственными по изометрии друг другу.

Справедлива

Теорема VII. *Пусть Φ_1 и Φ_2 — две общие бесконечные выпуклые изометричные поверхности евклидова пространства, предельные конусы которых — лучи, ограничены замкнутыми, соответственными по изометрии кривыми $\gamma_1^i \subset \Phi_1$ и $\gamma_2^i \subset \Phi_2$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Тогда, если движением поверхностей Φ_1 и Φ_2 в евклидовом пространстве все кривые γ_1^i и γ_2^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, могут быть совмещены в соответственных по изометрии точках, то поверхности Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны.

Доказательство. Совместим поверхности Φ_1 и Φ_2 в соответственных точках их граничных кривых γ_1^i и γ_2^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и возьём выпуклую оболочку $\tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 + \Pi_i$, поверхности, где Π_i — некототорая развёртывающаяся поверхность, ограниченная кривой $\gamma_1^i \equiv \gamma_2^i = \gamma^i$. Присоединяя затем Π_i к поверхности Φ_2, получим полную бесконечную выпуклую поверхность $\tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 + \Pi_i$, изометричную Φ_1. Поверхности $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ имеют те же предельные конусы, что и поверхности Φ_1 и Φ_2. По условию теоремы, они вырождены в лучи. Поэтому, согласно теореме V, поверхности $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ конгруэнтные. Следовательно, поверхности Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны. ■

Верна так же

Теорема VIII. *Пусть Φ_1 и Φ_2 — две общие бесконечные выпуклые изометричные поверхности евклидова пространства имеют общий предельный конус k и ограничены общими замкнутыми кривими γ^i, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Если для любых, соответственных по изометрии последовательностей точек $M_{1\alpha} \in \Phi_1$, и $M_{2\alpha} \in \Phi_2$, уходящих в бесконечность, направления лучей $PM_{1\alpha}$ и $PM_{2\alpha}$ сходятся к направлению одной и той же образующей l предельного конуса k, то поверхности Φ_1 и Φ_2 равны.

Доказательство. Возьмём выпуклые оболочки $\tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 + \Pi_i$ и $\tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 + \Pi_i$, где Π_i — некоторая развёртывающаяся поверхность, ограниченная кривой γ^i. Полученные бесконечные полные выпуклые изометричные поверхности $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ имеют тот же предельный конус, что и Φ_1 и Φ_2. Поэтому, по теореме VI, они равны. Отсюда следует равенство и самых поверхностей Φ_1 и Φ_2. ■

Выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю, проф. К. К. Мокрищеву, за постоянное внимание и большую помощь, оказанную при написании работы.

Литература

[1] *А. В. Погорелов:* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, „Наука", 1969.

[2] *Н. В. Ефимов:* Высшая геометрия, М., 1961.

[3] *А. Д. Александров:* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М. Л., техн. теор. лит., 1948.

Адрес автора: г. Ростов-на-Дону, СССР (Государственный университет. Каф. геометрии.)