Ladislav Skula

Eine Bemerkung zum Kardinalprodukt

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 27 (1977), No. 4, 515–522

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101488`

CZECHOSLOVAK MATHEMATICAL JOURNAL
Mathematical Institute of Czechoslovak Academy of Sciences
V. *27 (102)*, PRAHA 19. 12. 1977, No. 4

EINE BEMERKUNG ZUM KARDINALPRODUKT

LADISLAV SKULA, Brno

(Eingegangen am 18. August 1970)

1. EINLEITUNG

In der Kardinalarithmetik der Typen der teilweise geordneten Mengen wird oft das folgende Problem untersucht: „*Es seien α, β, γ Typen der teilweise geordneten Mengen, und es gelte $\alpha . \beta = \alpha . \gamma$. Wann gilt $\beta = \gamma$?*“ Eine Reihe von den sich mit diesem Problem beschäftigten Resultaten befindet sich in den Arbeiten von BIRKHOFF ([1]), CHANG ([2], [3]), NOVOTNÝ ([6], [7]), MIKOLÁŠ ([5]) und SKULA ([8]).

In der Arbeit ([7]) hat Novotný bewiesen: „*Sind α, β, γ endliche Typen, $\alpha \neq 0$, und gilt $\alpha . \beta = \alpha . \gamma$, so ist $\beta = \gamma$.*“

Dieses Resultat wurde von Mikoláš in [5] für Typen α, β, γ mit der in [5] angegebenen Eigenschaft (S_3) verallgemeinert.

Das Resultat von Novotný über endliche Typen wurde noch von Skula in [8] mit einer anderen Methode bewiesen. Diese Methode benutzt den Polynombereich in abzählbar vielen Unbestimmten über dem Ring der ganzen Zahlen.

In dieser Arbeit wird der Polynomenbegriff verallgemeinert, und mit der Hilfe der Integritätsbereiche $\mathscr{P}_1$ und $\mathscr{P}_2$ dieser „verallgemeinerten Polynome“ wird das Resultat von Mikoláš verallgemeinert (Satz 3.3).

Die in den Arbeiten von Mikoláš ([4], Satz; [5], 3.11 und 3.12) angegebenen Resultate über das Problem: „*Wann ergibt sich $\alpha = \beta$ aus $\alpha^2 = \beta^2$, wobei α, β Typen von teilweise geordneten Mengen sind?*“ und über das Problem: „*Wann gilt $\alpha = \beta . \gamma$, $\beta = \alpha . \delta \Rightarrow \alpha = \beta$ für Typen der teilweise geordneten Mengen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$?*“ werden auch hier verallgemeinert (Satz 3.3).

Unter einem *Typus* versteht sich hier stets der Typus einer teilweise geordneten Menge. Der Typus der leeren Menge ist 0, und der Typus der einelementigen teilweise geordneten Menge ist 1. Für Typen α, β bezeichnet man mit $\alpha + \beta$ die Kardinalsumme dieser Typen und $\alpha . \beta$ ihr Kardinalprodukt. Für ein Typensystem $\{\alpha_\iota \mid \iota \in I \neq \emptyset\}$ bezeichnen wir mit $\sum \alpha_\iota (\iota \in I)$ die Kardinalsumme und mit $\prod \alpha_\iota (\iota \in I)$ das Kardinalprodukt dieser Typen. Sind α ein Typus und n eine natürliche Zahl, so bezeichnet $n \, . \, \alpha$ den Typus $\alpha + \alpha + \ldots + \alpha$ (n Summanden), und α^n bezeichnet den Typus $\alpha \, . \, \alpha \, . \ldots . \, \alpha$ (n Faktoren). Unter $0. \, \alpha$ verstehen wir den Typus 0, und α^0 heißt den Typus 1. Ein Typus heißt *zusammenhängend*, wenn er der Typus einer nichtleeren teilweise geordneten zusammenhängenden Menge ist. Ein Typus α heißt *unzerlegbar*, wenn $\alpha \neq 1$ und aus der Gleichung $\alpha = \alpha_1 \, . \, \alpha_2$ stets $\alpha_1 = 1$ oder $\alpha_2 = 1$ folgt.

Für diese Arbeit brauchen wir folgende Aussagen:

1.1. (Novotný [6], 2.3.) *Es sei α ein Typus und es gelte $\alpha = \sum \alpha_\iota (\iota \in I \neq \emptyset) = \sum \beta_\varkappa (\varkappa \in K \neq \emptyset)$, wobei $\alpha_\iota, \beta_\varkappa$ zusammenhängende Typen sind. Dann ist* card $I =$ card K *und es gibt eine schlichte Abbildung φ der Menge I auf die Menge K mit $\alpha_\iota = \beta_{\varphi(\iota)}$ für alle Indizes $\iota \in I$.*

1.2. (Novotný [7], 2.3.) *Es sei α ein Typus, und es gelte $\alpha = \prod \alpha_\iota (\iota \in I \neq \emptyset) = \prod \beta_\varkappa (\varkappa \in K \neq \emptyset)$, wobei $\alpha_\iota, \beta_\varkappa$ zusammenhängende unzerlegbare Typen sind. Dann ist* card $I =$ card K, *und es gibt eine schlichte Abbildung φ der Menge I auf die Menge K mit $\alpha_\iota = \beta_{\varphi(\iota)}$ für alle Indizes $\iota \in I$.*

1.3. (Novotný [6], 3.3). *Es seien α, β Typen, $\alpha = \sum \alpha_\iota (\iota \in I \neq \emptyset)$, $\beta = \sum \beta_\varkappa (\varkappa \in K \neq \emptyset)$, wobei $\alpha_\iota, \beta_\varkappa$ zusammenhängende Typen sind. Dann ist $\alpha_\iota \, . \, \beta_\varkappa$ ein zusammenhängender Typus für jedes $\iota \in I$ und jedes $\varkappa \in K$, und es gilt $\alpha \, . \, \beta = \sum \alpha_\iota \, . \, \beta_\varkappa (\iota \in I, \varkappa \in K)$.*

2. RINGE $\mathscr{P}_1$ UND $\mathscr{P}_2$

2.1. Bezeichnungen. Unter einem *Ring* $R = (R, +, \cdot)$ verstehen wir einen kommutativen Ring. Das Nullelement von dem Ring R wird mit 0_R bezeichnet. Die Menge aller ganzen nichtnegativen Zahlen mit der üblichen Operation $+$ bezeichnen wir mit $\mathbf{M} = (\mathbf{M}, +)$.

Für Mengen $U \neq \emptyset \neq V$ heißt U^V die Menge aller Abbildungen von V in U.

Sind $Y \neq \emptyset$ eine Menge und $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe mit einem neutralen Element n_S[1]), so bezeichnen wir die Menge $\{f \in S^Y \mid \text{card} f^{-1}(S - \{n_S\}) < \aleph_0\}$ mit $((S, \cdot)^Y)' = (S^Y)'$.

2.2. Definition. Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Für $g, h \in \mathbf{M}^X$ setzen wir $g \, . \, h = f$, wobei $f(x) = g(x) + h(x)$ für jedes $x \in X$ gilt. Offenbar ist die Menge $\mathbf{M}^X$ mit dieser Operation $\cdot$ (also $(\mathbf{M}^X, \cdot)$) eine kommutative Halbgruppe mit dem neutralen Element o und mit der Kürzungsregel.[2]) Das Element o wird definiert: $o(x) = 0$ für jedes $x \in X$. Offenbar ist $((\mathbf{M}^X)', \cdot)$ eine Unterhalbgruppe von $(\mathbf{M}^X, \cdot)$, und $o \in (\mathbf{M}^X)'$ ist auch ein neutrales Element dieser Unterhalbgruppe.

[1]) Das heißt: für beliebiges Element $s \in S$ gilt $s \cdot n_S = n_S \cdot s = s$.

[2]) Das heißt: für $f, g, h \in \mathbf{M}^X$ mit $f \, . \, g = f \, . \, h$ gilt $g = h$.

Es sei $R = (R, +, \cdot)$ ein Ring. Wir setzen $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_1(R, X) = ((R, +)^{\mathbf{M}^X})' = (R^{\mathbf{M}^X})'$, $\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_2(R, X) = R^{(\mathbf{M}^X)'}$. Für $p, q \in \mathscr{P}_1 (p, q \in \mathscr{P}_2)$ setzen wir $p + q = r$, wobei $r(f) = p(f) + q(f)$ für jedes $f \in \mathbf{M}^X (f \in (\mathbf{M}^X)')$, und $p \,.\, q = s$, wobei $s(f) = \sum p(g) \,.\, q(h) \,(g, h \in \mathbf{M}^X,\ g \,.\, h = f)$ für jedes $f \in \mathbf{M}^X (s(f) = \sum p(g) \,.\, q(h) \,(g, h \in (\mathbf{M}^X)',\ g \,.\, h = f)$ für jedes $f \in (\mathbf{M}^X)')$. Damit werden zwei Operationen $+$ und $\cdot$ auf den Mengen $\mathscr{P}_1$ und $\mathscr{P}_2 (\mathscr{P}_1 = (\mathscr{P}_1, +, \cdot)$, $\mathscr{P}_2 = (\mathscr{P}_2, +, \cdot))$ definiert, und es gilt:

2.3. *$\mathscr{P}_1 = (\mathscr{P}_1, +, \cdot)$ und $\mathscr{P}_2 = (\mathscr{P}_2, +, \cdot)$ sind Ringe; für das Nullelement $0_{\mathscr{P}_1}$ des Rings $(\mathscr{P}_1, +, \cdot)$ gilt: $0_{\mathscr{P}_1}(f) = 0_R$ für jedes $f \in \mathbf{M}^X$, und für das Nullelement $0_{\mathscr{P}_2}$ des Rings $(\mathscr{P}_2, +, \cdot)$ gilt: $0_{\mathscr{P}_2}(f) = 0_R$ für jedes $f \in (\mathbf{M}^X)'$.*

Beweis. a) Offenbar sind $(\mathscr{P}_1, +)$ und $(\mathscr{P}_2, +)$ kommutative Gruppen mit den in der Behauptung beschriebenen neutralen Elementen $0_{\mathscr{P}_1}$ und $0_{\mathscr{P}_2}$.

b) Wir zeigen, daß $(\mathscr{P}_1, \cdot)$ eine Halbgruppe ist. Es seien $p_1, p_2, p_3 \in \mathscr{P}_1$, $r = (p_1 \,.\, p_2) \,.\, p_3$, $r' = p_1 \,.\, (p_2 \,.\, p_3)$, $f \in \mathbf{M}^X$. Es gilt $r(f) = \sum (p_1 \,.\, p_2)(g) \,.\, p_3(g_3) \,.\, (g, g_3 \in \mathbf{M}^X,\ g \,.\, g_3 = f)$. Wegen $(p_1 \,.\, p_2)(g) = \sum p_1(g_1) \,.\, p_2(g_2) \,(g_1, g_2 \in \mathbf{M}^X,\ g_1 \,.\, g_2 = g)$ ist $r(f) = \sum p_1(g_1) \,.\, p_2(g_2) \,.\, p_3(g_3) \,(g_1, g_2, g_3 \in \mathbf{M}^X,\ g_1 \,.\, g_2 \,.\, g_3 = f)$. Auf analoge Weise wird $r'(f) = \sum p_1(g_1) \,.\, p_2(g_2) \,.\, p_3(g_3) \,(g_1, g_2, g_3 \in \mathbf{M}^X,\ g_1 \,.\, g_2 \,.\, g_3 = f)$ bewiesen. Also gilt $r = r'$.

c) Wir zeigen, daß für $(\mathscr{P}_1, +, \cdot)$ das Distributivgesetz gilt. Es seien $p_1, p_2, p_3 \in \mathscr{P}_1$, $r = (p_1 + p_2) \,.\, p_3$, $r' = p_1 \,.\, p_3 + p_2 \,.\, p_3$, $f \in \mathbf{M}^X$. Es gilt $r(f) = \sum (p_1 + p_2) \,.\, (g) \,.\, p_3(h) \,(g, h \in \mathbf{M}^X, g \,.\, h = f) = \sum p_1(g) \,.\, p_3(h) \,(g, h \in \mathbf{M}^X, g \,.\, h = f) + \sum p_2(g) \,.\, p_3(h) \,(g, h \in \mathbf{M}^X,\ g \,.\, h = f) = r'(f)$. Also gilt $r = r'$.

d) Auf analoge Weise wird es gezeigt, daß auch $(\mathscr{P}_2, +, \cdot)$ ein Ring ist.

2.4. Bemerkung. Die Elemente $p \in \mathscr{P}_1$ oder $p \in \mathscr{P}_2$ verallgemeinern den Begriff „des *Polynoms über dem Ring R*". Die Elemente der Menge X entsprechen da „*den Unbestimmten*", die Abbildungen $f \in \mathbf{M}^X$ oder $f \in (\mathbf{M}^X)'$ verallgemeinern den Begriff „*des Gliedes des Polynoms*", die Zahl $f(x)$ $(x \in X)$ entspricht „*dem Exponenten der Unbestimmten x im Glied f*" und die Abbildung o entspricht dem Begriff „*des absoluten Gliedes des Polynoms*". Das Element $p(f) \in R$ bedeutet „*den Koeffizienten des Polynoms p beim Glied f*".

2.5. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(A) *Der Ring $(R, +, \cdot)$ besitzt ein Einselement.*
(B) *Der Ring $\mathscr{P}_1(R, X)$ besitzt ein Einselement.*
(C) *Der Ring $\mathscr{P}_2(R, X)$ besitzt ein Einselement.*

Gelten diese Aussagen, so ist $1_{\mathscr{P}_1} (1_{\mathscr{P}_1}(f) = 0_R$ für jedes $f \in \mathbf{M}^X$, $f \neq o$, $1_{\mathscr{P}_1}(o) = 1_R)$ das Einselement von $(\mathscr{P}_1, +, \cdot)$, und $1_{\mathscr{P}_2} (1_{\mathscr{P}_2}(f) = 0_R$ für jedes $f \in (\mathbf{M}^X)'$, $f \neq o$, $1_{\mathscr{P}_2}(o) = 1_R)$ ist das Einselement von $(\mathscr{P}_2, +, \cdot)$. 1_R bedeutet das Einselement von $(R, +, \cdot)$.

Beweis. Der Ring R besitze ein Einselement 1_R. Wir setzen $1_{\mathscr{P}_1}(f) = 0_R$ für jedes $f \in \mathbf{M}^X$, $f \neq o$, $1_{\mathscr{P}_2}(f) = 0_R$ für jedes $f \in (\mathbf{M}^X)'$, $f \neq o$, und $1_{\mathscr{P}_1}(o) = 1_{\mathscr{P}_2}(o) = 1_R$. Dann gilt $(1_{\mathscr{P}_1} . p)(f) = \sum 1_{\mathscr{P}_1}(g) . p(h)\,(g, h \in \mathbf{M}^X,\ \ g . h = f) = 1_{\mathscr{P}_1}(o) . p(f) = p(f)$ für jedes $p \in \mathscr{P}_1$ und $f \in \mathbf{M}^X$. Also ist $1_{\mathscr{P}_1}$ ein Einselement des Rings $\mathscr{P}_1$. Gleicherweise zeigt man, daß $1_{\mathscr{P}_2}$ ein Einselement des Rings $\mathscr{P}_2$ ist. Es gelten daher die Aussagen (B) und (C).

b) Es sei $1_{\mathscr{P}_1}$ ein Einselement des Rings $\mathscr{P}_1$. Wir bezeichnen $1_{\mathscr{P}_1}(o)$ mit e. Für beliebiges $r \in R$ setzen wir $p(o) = r$, $p(f) = 0_R$ für jedes $f \in \mathbf{M}^X$, $f \neq o$. Es gilt $r = p(o) = (1_{\mathscr{P}_1} . p)(o) = \sum 1_{\mathscr{P}_1}(g) . p(h)\,(g, h \in \mathbf{M}^X,\ \ g . h = o) = 1_{\mathscr{P}_1}(o) . p(o) = e . r$. Also ist e ein Einselement des Rings R. Daher gilt (A).

Gleicherweise zeigt man die Implikation: (C) $\rightarrow$ (A).

2.6. Es sei auf der Menge X eine Wohlordnung $\leqq$ definiert. Die Ordnung $\leqq$ auf der Menge $\mathbf{M}$ bedeute die übliche Ordnung unter den ganzen Zahlen. Für $f, g \in \mathbf{M}^X$ setzen wir $f \leqq g \equiv f = g$ oder es gibt $x_0 \in X$ mit $f(x) = g(x)$ für jedes $x < x_0$ und $f(x_0) < g(x_0)$ (die sog. *lexikographische Ordnung der Menge* $\mathbf{M}^X$). Offenbar gilt:

(a) $(\mathbf{M}^X, \leqq)$ *ist eine linear geordnete Menge.*

Weiter gilt:

(b) *Sind* $f, g, h \in \mathbf{M}^X$ *mit* $f < g$, *so ist* $f . h < g . h$.

Beweis. Ist $f < g$, so gibt es $x_0 \in X$ mit $f(x_0) < g(x_0)$ und $f(x) = g(x)$ für jedes $x < x_0$. Für $x < x_0$ gilt $(f . h)(x) = f(x) + h(x) = g(x) + h(x) = (g . h)(x)$, und es ist $(f . h)(x_0) = f(x_0) + h(x_0) < g(x_0) + h(x_0) = (g . h)(x_0)$. Daraus folgt $f . h < g . h$.

Hieraus folgt unmittelbar:

(c) *Es seien* $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbf{M}^X$, $f_1 \leqq f_2$. *Dann gilt*:

(c1) $f_3 \leqq f_4 \Rightarrow f_1 . f_3 \leqq f_2 . f_4$,

(c2) $f_3 < f_4 \Rightarrow f_1 . f_3 < f_2 . f_4$.

2.7. Für $f \in (\mathbf{M}^X)'$ setzen wir $s(f) = \sum f(x)\,(x \in X)$. Für $f, g \in (\mathbf{M}^X)'$ definieren wir $f \preceq g \equiv f = g$ oder $s(f) = s(g)$ und es gibt $x_0 \in X$ mit $f(x) = g(x)$ für $x < x_0$ und $f(x_0) > g(x_0)$ oder $s(f) < s(g)$. Dann ist $\preceq$ eine lineare Ordnung auf der Menge $(\mathbf{M}^X)'$, und es gilt:

(a) $((\mathbf{M}^X)', \preceq)$ *ist eine wohlgeordnete Menge.*

Beweis. Es sei $\emptyset \neq N \subset (\mathbf{M}^X)'$. Wir setzen $n = \min s(f)\,(f \in N)$, $N_1 = \{f \in N : s(f) = n\}$, $Y_1 = \{x \in X \mid \text{es gibt } f \in N_1 \text{ mit } f(x) \neq 0\}$. Ist $Y_1 = \emptyset$, so ist $N_1 = \{o\}$, und o ist das kleinste Element der Menge N.

Wir nehmen weiter an, daß die Menge Y_1 eine nichtleere Menge ist. Dann gibt es ein kleinstes Element y_1 der Menge Y_1.

Weiter setzen wir $n_1 = \max f(y_1)\,(f \in N_1)$. Es sei $k > 1$ eine natürliche Zahl und es seien schon für $1 \leqq l \leqq k-1$ die Teilmengen N_l von N, die Mengen $\emptyset \neq Y_l \subset X$ mit den kleinsten Elementen $y_l \in Y_l$ und die Zahlen $n_l = \max f(y_l)\,(f \in N_l)$ definiert, die für $1 \leqq l \leqq k-2$ die Forderungen $N_{l+1} = \{f \in N_l : f(y_l) = n_l\}$ und $Y_{l+1} = \{x \in X,\ x > y_l$: es gibt $f \in N_{l+1}$ mit $f(x) \neq 0\}$ erfüllen. Dann gilt $\sum_{l=1}^{k-1} n_l \leqq n$. Ist $\sum_{l=1}^{k-1} n_l = n$, so ist die Menge N_{k-1} eine einelementige Menge $\{f_0\}$, und f_0 ist das kleinste Element der Menge N. Ist $\sum_{l=1}^{k-1} n_l < n$, so setzen wir $N_k = \{f \in N_{k-1} : f(y_{k-1}) = n_{k-1}\}$ und $Y_k = \{x \in X,\ x > y_{k-1}$: es gibt $f \in N_k$ mit $f(x) \neq 0\}$. Dann ist $Y_k \neq \emptyset$, und wir bezeichnen das kleinste Element der Menge Y_k mit y_k und setzen $n_k = \max f(y_k)\,(f \in N_k)$. Dann ist $n_k > 0$, daher gilt $\sum_{l=1}^{k-1} n_l < \sum_{l=1}^{k} n_l \leqq n$, woraus die Existenz des kleinsten Elementes der Menge N folgt.

Da $s(f_1 \,.\, f_2) = s(f_1) + s(f_2)$ für $f_1, f_2 \in (\mathbf{M}^X)'$ ist, gilt:

(b) *Sind $f, g, h \in (\mathbf{M}^X)'$ mit $f \prec g$, so ist $f \,.\, h \prec g \,.\, h$.*

Daraus ergibt sich:

(c) *Es seien $f_1, f_2, f_3, f_4 \in (\mathbf{M}^X)'$, $f_1 \precsim f_2$. Dann gilt:*

(c1) $f_3 \precsim f_4 \Rightarrow f_1 \,.\, f_3 \precsim f_2 \,.\, f_4$,

(c2) $f_3 \prec f_4 \Rightarrow f_1 \,.\, f_3 \prec f_2 \,.\, f_4$.

2.8. Definition. Ist $p \in \mathscr{P}_1(R, X)$, $p \neq 0_{\mathscr{P}_1}$, so ist die Menge $p^{-1}(R - \{0_R\})$ eine nichtleere endliche Teilmenge der linear geordneten Menge $(\mathbf{M}^X, \leqq)$. Daher gibt es ein kleinstes Element f der Menge $p^{-1}(R - \{0_R\})$. Wir setzen $v_1(p) = p(f)$ und $v_1(0_{\mathscr{P}_1}) = 0_R$.

Ist $p \in \mathscr{P}_2(R, X)$, $p \neq 0_{\mathscr{P}_2}$, so ist die Menge $p^{-1}(R - \{0_R\})$ eine nichtleere Teilmenge der wohlgeordneten Menge $((\mathbf{M}^X)', \precsim)$. Also gibt es ein kleinstes Element f der Menge $p^{-1}(R - \{0_R\})$. Wir setzen $v_2(p) = p(f)$ und $v_2(0_{\mathscr{P}_2}) = 0_R$.

2.9. *Es seien $p_1, q_1 \in \mathscr{P}_1(R, X)$; $p_2, q_2 \in \mathscr{P}_2(R, X)$ und es seien $v_1(p_1)$, $v_1(q_1)$, $v_2(p_2)$, $v_2(q_2)$ keine echten Nullteiler von dem Ring R. Dann gilt $v_1(p_1 \,.\, q_1) = v_1(p_1) \,.\, v_1(q_1)$, $v_2(p_2 \,.\, q_2) = v_2(p_2) \,.\, v_2(q_2)$.*

Beweis. I. Nehmen wir an, daß $v_1(p_1) \neq 0_R \neq v_1(q_1)$ keine Nullteiler von R sind. Es sei f_p das kleinste Element von $p_1^{-1}(R - \{0_R\})$, und es sei f_q das kleinste Element von $q_1^{-1}(R - \{0_R\})$. Dann ist $v_1(p_1) = p_1(f_p)$, $v_1(q_1) = q_1(f_q)$. Wir setzen $f = f_p \,.\, f_q$.

Es seien $g, h \in \mathbf{M}^X$, $p_1(g) \neq 0_R \neq q_1(h)$. Dann gilt $f_p \leqq g$, $f_q \leqq h$. Ist $f_p \neq g$, so ist $f_p < g$, und wegen 2.6(c2) ist $f = f_p \,.\, f_q < g \,.\, h$. Ist $f_q \neq h$, so beweist man gleicherweise, daß $f \neq g \,.\, h$ ist. Daraus ergibt sich $(p_1 \,.\, q_1)(f) = \sum p_1(g) \,.\, q_1(h) \,.\, (g, h \in \mathbf{M}^X,\ g \,.\, h = f) = p_1(f_p) \,.\, q_1(f_q) = v_1(p_1) \,.\, v_1(q_1) \neq 0_R$. Daher gilt $f \in (p_1 \,.\, q_1)^{-1}\,(R - \{0_R\})$.

Es sei $f' \in (p_1 \,.\, q_1)^{-1} (R - \{0_R\})$. Dann gibt es $g, h \in \mathbf{M}^X$, $g \,.\, h = f'$, $p_1(g) \neq 0_R \neq q_1(h)$, daher gilt $f_p \leqq g, f_q \leqq h$, woraus wegen 2.6 (c1) $f = f_p \,.\, f_q \leqq g \,.\, h = f'$ folgt. Daher ist f das kleinste Element von $(p_1 \,.\, q_1)^{-1} (R - \{0_R\})$, woraus sich $v_1(p_1 \,.\, q_1) = (p_1 \,.\, q_1)(f) = v_1(p_1) \,.\, v_1(q_1)$ ergibt.

II. Die Gleichung $v_2(p_2 \,.\, q_2) = v_2(p_2) \,.\, v_2(q_2)$ beweist man gleicherweise.

2.10. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent*:

(A) *Der Ring* $(R, +, \cdot)$ *besitzt keine echten Nullteiler.*
(B) *Der Ring* $\mathscr{P}_1(R, X)$ *besitzt keine echten Nullteiler.*
(C) *Der Ring* $\mathscr{P}_2(R, X)$ *besitzt keine echten Nullteiler.*

Beweis. I. Der Ring R besitze keine echten Nullteiler, und es seien $p, q \in \mathscr{P}_1$, $p \,.\, q = 0_{\mathscr{P}_1}$, $p \neq 0_{\mathscr{P}_1} \neq q$. Daraus folgt $v_1(p) \neq 0_R \neq v_1(q)$, und wegen 2.9 ist $0_R = v_1(0_{\mathscr{P}_1}) = v_1(p \,.\, q) = v_1(p) \,.\, v_1(q)$, was ein Widerspruch ist. Es gilt die Aussage (B).

Gleicherweise beweist man die Implikation: (A) $\rightarrow$ (C).

II. Es gelte (B) und es seien $a, b \in R$, $a \neq 0_R \neq b$. Wir setzen $p(f) = 0_R = q(f)$ für jedes $f \in \mathbf{M}^X$, $f \neq o$ und $p(o) = a$, $q(o) = b$. Dann ist $p, q \in \mathscr{P}_1$ und es gelten $(p \,.\, q)(f) = 0_R$ für jedes $f \in \mathbf{M}^X$, $f \neq o$ und $(p \,.\, q)(o) = a \,.\, b$. Wegen $p \neq 0_{\mathscr{P}_1} \neq q$ ist $p \,.\, q \neq 0_{\mathscr{P}_1}$, woraus $a \,.\, b = (p \,.\, q)(o) \neq 0_R$ folgt. Daher gilt die Aussage (A).

Auf analoge Weise beweist man die Implikation: (C) $\rightarrow$ (A).

Aus 2.5 und 2.10 erhalten wir gleich:

2.11. Satz. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent*:

(A) *Der Ring* $(R, +, \cdot)$ *ist ein Integritätsbereich*[3]).
(B) *Der Ring* $\mathscr{P}_1(R, X)$ *ist ein Integritätsbereich.*
(C) *Der Ring* $\mathscr{P}_2(R, X)$ *ist ein Integritätsbereich.*

3. ANWENDUNG AN DIE TYPENARITHMETIK

3.1. Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge zusammenhängender unzerlegbarer Typen. Wir setzen $\mathscr{S}_1 = \{\prod \alpha^{a_\alpha}(\alpha \in X) : a_\alpha \in \mathbf{M}$ für jedes $\alpha \in X\}$ und $\mathscr{S}_2 = \{\prod \alpha^{a_\alpha}(\alpha \in X) : a_\alpha \in \mathbf{M}$ für jedes $\alpha \in X$ und card $\{\alpha \in X : a_\alpha \neq 0\} < \aleph_0\}$. Ferner setzen wir $\mathscr{G}_1 = \{\gamma : \gamma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n,\ \sigma_i \in \mathscr{S}_1$ für $1 \leqq i \leqq n\} \cup \{0\}$ und $\mathscr{G}_2 = \{\gamma : \gamma = \sum m_\sigma \sigma(\sigma \in \mathscr{S}_2)$, $m_\sigma \in M$ für jedes $\sigma \in \mathscr{S}_2\}$. Offenbar *sind die Mengen* $\mathscr{G}_1$ *und* $\mathscr{G}_2$ *in bezug auf die Kardinalsumme* $+$ *und auf das Kardinalprodukt* $\cdot$ *abgeschlossen.* (S.1.3).

3.2. *Für* $i = 1, 2$ *läßt sich* $\mathscr{G}_i = (\mathscr{G}_i, +, \cdot)$ *in den Ring* $\mathscr{P}_i(\mathbf{Z}, X) = (\mathscr{P}_i, +, \cdot)$ *isomorph in bezug auf die Kardinalsumme* $+$ *und auf das Kardinal produkt* $\cdot$ *einbetten, wobei* $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}, +, \cdot)$ *der Ring der ganzen Zahlen ist.*

[3]) Unter einem *Integritätsbereich* verstehen wir einen Ring mit einem Einselement $1_R \neq 0_R$ und ohne echte Nullteiler.

Beweis. Es sei $\sigma \in \mathcal{S}_1$. Dann ist $\sigma = \prod \alpha^{a_\alpha}(\alpha \in X)$, wobei $a_\alpha \in \mathbf{M}$ gilt. Wegen 1.2 ist diese Form von σ eindeutig. Wir setzen $\varphi_\sigma(\alpha) = a_\alpha$ für jedes $\alpha \in X$. Dann ist $\varphi_\sigma \in \mathbf{M}^X$. Es sei $\gamma \in \mathcal{G}_1$. Dann gibt es für jedes $\sigma \in \mathcal{S}_1$ ein $m_\sigma \in \mathbf{M}$ (wegen 1.1 eindeutig) mit $\gamma = \sum m_\sigma \sigma(\sigma \in \mathcal{S}_1)$. Wir setzen $p_\gamma(\varphi_\sigma) = m_\sigma$ für jedes $\sigma \in \mathcal{S}_1$. Da es für jedes $\varphi \in \mathbf{M}^X$ ein $\sigma \in \mathcal{S}_1$ mit $\varphi = \varphi_\sigma$ gibt, ist $p_\gamma \in \mathcal{P}_1(\mathbf{Z}, X)$. Wir setzen $F(\gamma) = p_\gamma$ für jedes $\gamma \in \mathcal{G}_1$.

Da $p_\gamma \neq p_{\gamma'}$ für $\gamma, \gamma' \in \mathcal{G}_1$, $\gamma \neq \gamma'$ gilt, ist F eine schlichte Abbildung von $\mathcal{G}_1$ in $\mathcal{P}_1$. Es seien $\gamma, \gamma' \in \mathcal{G}_1$, $m_\sigma, m'_\sigma \in \mathbf{M}$ für jedes $\sigma \in \mathcal{S}_1$, so daß $\gamma = \sum m_\sigma(\sigma \in \mathcal{S}_1)$ und $\gamma' = \sum m'_\sigma \sigma(\sigma \in \mathcal{S}_1)$ sind. Dann gilt $\gamma + \gamma' = \sum(m_\sigma + m'_\sigma)\,\sigma(\sigma \in \mathcal{S}_1)$ und für $\sigma \in \mathcal{S}_1$ ist $p_\gamma(\varphi_\sigma) = m_\sigma$, $p_{\gamma'}(\varphi_\sigma) = m'_\sigma$, $p_{\gamma+\gamma'}(\varphi_\sigma) = m_\sigma + m'_\sigma$, woraus $F(\gamma + \gamma') = F(\gamma) + F(\gamma')$ folgt. Wegen 1.3 ergibt sich $\gamma \,.\, \gamma' = \sum m_\sigma \,.\, m'_{\sigma'} \,.\, \sigma \,.\, \sigma'(\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_1) = \sum n_\sigma \sigma(\sigma \in \mathcal{S}_1)$, wobei $n_\sigma = \sum m_{\sigma_1} \,.\, m'_{\sigma_2}(\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_1, \sigma_1 \,.\, \sigma_2 = \sigma)$ gilt. Für $\sigma \in \mathcal{S}_1$ ist $(p_\gamma \,.\, p_{\gamma'})(\varphi_\sigma) = \sum p_\gamma(\varphi_{\sigma_1}) \,.\, p_{\gamma'}(\varphi_{\sigma_2})\,(\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_1, \varphi_{\sigma_1} \,.\, \varphi_{\sigma_2} = \varphi_\sigma) = \sum m_{\sigma_1} \,.\, m'_{\sigma_2}(\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_1, \sigma_1 \,.\, \sigma_2 = \sigma) = n_\sigma = p_{\gamma.\gamma'}(\varphi_\sigma)$. Hieraus ergibt sich $F(\gamma \,.\, \gamma') = F(\gamma) \,.\, F(\gamma')$. Daher ist F eine isomorphe Einbettung von $(\mathcal{G}_1, +, \cdot)$ in $(\mathcal{P}_1, +, \cdot)$.

Gleicherweise zeigt man, daß auch $(\mathcal{G}_2, +, \cdot)$ in $(\mathcal{P}_2, +, \cdot)$ sich isomorph einbetten läßt.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

3.3. Satz. *Für* $i = 1,2$ *gilt*:

(a) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{G}_i$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \,.\, \beta = \alpha \,.\, \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$,

(b) n *ist eine natürliche Zahl*; $\alpha, \beta \in \mathcal{G}_i$, $\alpha^n = \beta^n \Rightarrow \alpha = \beta$,

(c) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{G}_i$, $\alpha = \beta \,.\, \gamma$, $\beta = \alpha \,.\, \delta \Rightarrow \alpha = \beta$.

Beweis. Die Behauptungen (a) und (b) folgen unmittelbar aus 3.2 und aus 2.11. Für $f, g \in \mathcal{P}_i$, $f^n = g^n$ (n ist eine natürliche Zahl) gilt nämlich $f^n - g^n = (f - g) \,.\, (f^{n-1} + f^{n-2} \,.\, g + \ldots + f \,.\, g^{n-2} + g^{n-1}) = 0_{\mathcal{P}_i}$. Sind f, g Bilder von $\alpha, \beta \in \mathcal{G}_i$, $\alpha \neq 0 \neq \beta$ beim, im Beweis von 3.2 eingeführten, Isomorphismus von $\mathcal{G}_i$ in $\mathcal{P}_i$, ist $f^{n-1} + f^{n-2} \,.\, g + \ldots + f \,.\, g^{n-2} + g^{n-1} \neq 0_{\mathcal{P}}$, also gilt $f = g$.

Die Behauptung (c) beweist man leicht von der Behauptung (a).

Literatur

[1] *G. Birkhoff:* Generalized arithmetic, Duke Math. Journ. *9* (1942), 283—302.

[2] *C. C. Chang:* Cardinal and ordinal factorization of relation types, thesis. Berkeley, 1955.

[3] *C. C. Chang:* Cardinal and ordinal multiplication of relation types. Proceedings fo Symposia in pure Mathematics, vol. II, Lattice Theory, 1961, 123—128.

[4] *Š. Mikoláš:* Über ein Problem aus der Kardinalarithmetik, Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně Brno, No *478*, 1966, 427—431.

[5] *Š. Mikoláš:* Über gewisse Eigenschaften des Kardinalproduktes, Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně Brno, A *31* (1967), 489—496.

[6] *M. Novotný:* Über gewisse Eigenschaften von Kardinaloperationen, Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No. *418* (1960), 465—484.

[7] *M. Novotný:* Über Kardinalprodukte, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., Bd. *9* (1963), 13—20.
[8] *L. Skula:* Prime elements in the semigroup of finite types of partially ordered sets in cardinal multiplication, Spisy přírodovědecké fak. University J. E. Purkyně v Brně, T *4* (1968), 97—102.

Hinzugefügt am 20. IV. 1977

[9] *R. Mc Kenzie:* Cardinal multiplication of structures with a reflexive relation, Fundamenta Mathematicae, *LXX* (1971), 59—101.

Anschrift des Verfassers: 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UJEP).