A. B. Kurovskii; Jurij Michailov Smirnov

О размерности ird, определенной с помощью ретракций

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 26 (1976), No. 1, 30–36

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101370`

Czechoslovak Mathematical Journal, 26 (101) 1976, Praha

О РАЗМЕРНОСТИ Ird, ОПРЕДЕЛЕННОЙ С ПОМОЩЬЮ РЕТРАКЦИЙ

А. Б. КУРОВСКИЙ, Ю. М. СМИРНОВ, Москва

(Поступило в редакцию 12/XII 1973 г.)

Фактически усиливается следующим образом одна теорема Б. Т. Левшенко [1]: *если в метрическом пространстве X для всякого непустого замкнутого множества A существует такое конечномерное*[1]) *замкнутое в $X \setminus A$ множество B, что A является ретрактом дополнения $X \setminus B$. то X — конечномерно и тогда* $\dim X \leqq n$ *в том и только в том случае, когда для всякого непустого замкнутого в X множества A найдется такое замкнутое в $X \setminus A$ множество B размерности* $\dim B \leqq n - 1$, *что A является ретрактом дополнения $X - B$.*

Вторая часть этого утверждения и есть теорема Левшенко.

Доказательство проходит не только для размерности $\dim X = \operatorname{Ind} X$ [1]), но и для так называемой *размерности* $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X$ *по модулю* M, введенной А. Лелеком [2] и скрупулезно изученной Й. Аартсом [3]. В связи с этим вводится и изучается *ретракционная размерность* $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X$ *по модулю* M, определение которой следующее:

Определение 1. Пусть M — класс пространств[2]); $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X = -1$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathrm{M}$; считая, что неравенства $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X \leqq \alpha$ определены для всех порядковых чисел $\alpha < \beta$, полагаем, что $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X \leqq \beta$ тогда и только тогда, когда для всякого непустого замкнутого в X множества A существует такое замкнутое в $X \setminus A$ множество B размерности $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} B \leqq \alpha < \beta$, что A является ретрактом дополнения $X \setminus B$.

Аналогично определяется индуктивная размерность $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X$:

Определение 2 (А. Лелек [2]). $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X = -1$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathrm{M}$; считая, что неравенства $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X \leqq \alpha$ определены для всех $\alpha < \beta$, пола-

[1]) В смысле размерности $\dim X$ или, что то же самое [4], в рассматриваемон случае метрических пространств, в смысле размерности $\operatorname{Ind} X$.

[2]) Ради краткости пространствами будем называть топологические пространства, отображениями — непрерывные отображения, ретракциями — непрерывные ретракции, и окрестностями — открытые окрестности.

гаем, что $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X \leqq \beta$ тогда и только тогда, когда любые два замкнутых непересекающихся множества A и B пространства X можно разбить перегородкой[3]) C размерности $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} C \leqq \alpha < \beta$.

Лемма 1. *Если* $\mathrm{L} \subset \mathrm{M}$, *то* $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X \leqq \operatorname{Ird}_{\mathrm{L}} X$[4]) *для любого* X.

В самом деле, легко показать по индукции, что если $\operatorname{Ird}_{\mathrm{L}} X \leqq \alpha$, то и $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X \leqq \alpha$, откуда лемма следует очевидным образом.

Лемма 1' (А. Лелек [2]). *Если* $\mathrm{L} \subset \mathrm{M}$, *то* $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X \leqq \operatorname{Ind}_{\mathrm{L}} X$ *для любого* X.

Доказательство — аналогичное.

Назовём класс M пространств *монотонным по замкнутым множествам* (Й. Аартс), если он вместе со всяким пространством X содержит и любое его замкнутое множество. Назовём функцию fX, заданную на некотором классе пространств, со значениями в упорядоченном множестве *монотонной по замкнутым множествам* (Й. Аартс), если $fA \leqq fX$ для всякого пространства X и всякого его замкнутого множества A.

Лемма 2. *Если класс* M *монотонен по замкнутым множествам, то и размерность* $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X$ *монотонна по замкнутым множествам.*

Действительно, легко показать по индукции, что если $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X \leqq \alpha$, то и $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} A \leqq \alpha$ для любого замкнутого в X множества A, откуда непосредственно вытекает лемма.

Лемма 2' (Й. Аартс [3]). *В предположении леммы* 2 *размерность* $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X$ *монотонна по замкнутым множествам.*

Доказательство — аналогичное.

Лемма 3. *В предположении леммы* 2 $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X \leqq \operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X$ *для всякого нормального пространства* X.

Доказательство. Покажем по индукции, что если $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X \leqq \beta$, то и $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X \leqq \beta$. Пусть $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X \leqq \beta$, а A и B — замкнутые в X непересекающиеся множества[5]). Существует замкнутое в $X \setminus A \setminus B$ множество C размерности $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} C \leqq \alpha < \beta$ и ретракция $r : X \setminus C \to A \cup B$. Множества $r^{-1}A$ и $r^{-1}B$ не

[3]) Говорят, что „перегородка C разбивает X между A и B“, если C является дополнением к объединению $U \cup V$ непересекающихся окрестностей U и V множеств A и, соотв., B. Определение 2 эквивалентно определению, данному Лелеком.

[4]) Здесь и всюду далее всякое неравенство такого рода будем понимать так: если существует $\operatorname{Ird}_{\mathrm{L}} X$, то существует $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X$ $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X \leqq \operatorname{Ird}_{\mathrm{L}} X$.

[5]) Тогда $M \neq \emptyset$. Если $A = B = \emptyset$, то искомой перегородкой будет $\emptyset$, необходимо принадлежащее к классу M. Поэтому можно предполагать, что $A \cup B \neq \emptyset$.

пересекаются, открыты в $X \setminus C$ и $r^{-1}A \cup r^{-1}B = X \setminus C$. Так как r – непрерывно, то $A \cap \overline{r^{-1}B} = \emptyset$ и $B \cap \overline{r^{-1}A} = \emptyset$. Из предположения о нормальности пространства X следует, что существуют такие окрестности G и H множества A и, соотв., B, что

$$G \cap H = \emptyset\,, \quad G \cap \overline{r^{-1}B} = \emptyset\,, \quad H \cap \overline{r^{-1}A} = \emptyset\,.$$

Множества $U = G \cup r^{-1}A$ и $V = H \cup r^{-1}B$ являются непересекающимися окрестностями множеств A и, соотв., B. Искомой перегородкой между A и B будет множество $D = X \setminus U \setminus V$, так как $D \subset X \setminus r^{-1}A \setminus r^{-1}B = C$ и, являясь замкнутым множеством в C, имеет по индукционному предположению размерность $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} D \leqq \operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} D \leqq \operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} C \leqq \alpha < \beta$. Так как замкнутые непересекающиеся множества A и B были выбраны в X произвольно, то это значит, что $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X \leqq \beta$. Лемма доказана.

Лемма 4. *В предположении леммы 2 никакое пространство X, представимое в виде $X = \overline{\bigcup X_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где слагаемые X_k попарно не пересекаются, открыты и замкнуты в X, а $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X_k \geqq k$* [6]*) для каждого k, не имеет размерности* $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}}$.

Доказательство. Среди этих пространств X, представимых в указанном выше виде, и, предположительно, имеющих размерность $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X$, возьмем пространство X наименьшей возможной размерности $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X = \beta$. Приведем это к противоречию. Пусть $X = \overline{\bigcup X_k}$, где $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X_k \geqq k$. Тогда для каждого k существует такое замкнутое в X_k множество A_k, что если для замкнутого в $X_k \setminus A_k$ множества B_k имеется ретракция $r_k : X_k \setminus B_k \to A_k$, то $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} B_k \geqq k - 1$. Пусть $a_k \in A_k$ для каждого k. Так как $A = \overline{\bigcup A_k}$ – замкнуто в X, а $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X = \beta$, то существуют замкнутое в $X \setminus A$ множество B размерности $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} B = \alpha < \beta$ и ретракция $r : X \setminus B \to A$. Определим теперь для каждого k отображение $r_k : X_k \setminus B \to A_k$ формулами:

$$r_k(x) = r(x)\,, \quad \text{если} \quad r(x) \in A_k\,, \quad r_k(x) = a_k\,, \quad \text{если} \quad r(x) \notin A_k\,.$$

Для каждого множества $\Phi \subset A_k \setminus a_k$ полный прообраз $r_k^{-1}\Phi = X_k \cap r^{-1}\Phi$. Если же $a_k \in \Phi \subset A_k$, то полный прообраз $r_k^{-1}\Phi = X_k \cap r^{-1}((A \setminus X_k) \cup \Phi)$. Значит, для любого замкнутого в A_k множества Φ полный прообраз $r_k^{-1}\Phi$ – замкнут в X_k. Поэтому каждое отображение r_k является ретракцией (непрерывной!) на A_k. Значит, в силу выбора множеств A_k размерность $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} (X_k \cap B) \geqq k - 1$, – ведь $X_k \cap B$ замкнуто в $X_k \setminus A_k = X_k \setminus A$.

[6]) Мы пишем $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X \geqq \alpha$ (и, соотв., $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X \geqq \alpha$) и в том случае, когда X не имеет размерности $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}}$ (соотв. $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}}$).

Пусть теперь $Y_k = X_{k+1} \cap B$ для каждого k и $Y = \overline{UY_k^B}$ [7]). По лемме 2 $\mathrm{Ird_M}\, Y \leqq \mathrm{Ird_M}\, B \leqq \alpha \leqq \beta$. Так как каждое X_k открыто и замкнуто в X, то каждое $Y_k = X_{k+1} \cap B = X_{k+1} \cap Y$ открыто и замкнуто в Y. Кроме того мы уже показали, что $\mathrm{Ird_M}\, Y_k = \mathrm{Ird_M}(X_{k+1} \cap B) \geqq k$ для каждого k. Этим получено противоречие с выбором числа β.

Несколько проще доказывается аналогичная

Лемма 4′. *В предположении леммы 2 никакое пространство X, представимое в виде $X = \overline{UX_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ где слагаемые X_k попарно не пересекаются, открыты и замкнуты в X, а $\mathrm{Ind_M}\, X_k \geqq k$ для каждого k, не имеет размерности* $\mathrm{Ind_M}$.

Назовем, предварительно, систему множеств X_λ пространства X *сильно-звёздно-конечной*, если у каждого X_λ существует окрестность O_λ, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств X_λ.

Следствие 1. *В предположении леммы 2 никакое пространство X, представимое в виде $X = \overline{UX_\lambda}$, где слагаемые X_λ — замкнуты в X, составляют сильно-звездно-конечную систему, которая для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ содержит множества X_{λ_k} ($\lambda_k \neq \lambda_l$ при $k \neq l$) размерности $\mathrm{Ird_M}\, X_{\lambda_k} \geqq k$, не имеет размерности* $\mathrm{Ird_M}$.

Доказательство. Достаточно показать, что в пространстве X, представимом указанным образом, можно найти замкнутое подпространство, представимое так, как указано в лемме 4. Пусть $Y_0 = X_0$, а O_0 — окрестность множества Y_0, пересекающуюся с конечным числом множеств X_λ, что возможно так как система $\{X_\lambda\}$ — сильно-звездно-конечна. Предположим теперь, что мы выбрали множества $Y_n = X_{\lambda_{k_n}}$ и их окрестности O_n для всех $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ таким образом, что каждая окрестность O_n пересекается лишь с конечным числом множеств X_λ и что $O_n \cap Y_{n'} = \emptyset$, если $0 \leqq n < n' \leqq N$. В силу выбора окрестностей O_n, $n \leqq N$, существует такой номер k_{N+1}, что $X_{\lambda_{k_{N+1}}} \cap O_n = \emptyset$ для всех $n \leqq N$. Пусть $Y_{N+1} = X_{\lambda_{k_{N+1}}}$, а O_{N+1} — некоторая окрестность множества Y_{N+1}, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств X_λ. Действуя таким образом до бесконечности мы получим последовательность замкнутых множеств Y_n размерности $\mathrm{Ird_M}\, Y_n \geqq k_n \geqq n$. Пусть $Y = \overline{UY_n}$. Каждое Y_n замкнуто в Y. Легко видеть, что множества Y_n попарно не пересекаются. Поэтому множество $O'_n = O_n \setminus Y_o \setminus \ldots \setminus Y_{n-1}$ является открытой окрестностью множества Y_n, не пересекающейся ни с одним из других множеств Y_n. Значит, $Y_n = Y \cap O'_n$, и следовательно, открыто в Y. Поэтому можно применить лемму 4 ко множеству Y и заключить с помощью леммы 2, что X не имеет размерности $\mathrm{Ird_M}$.

[7]) Через $\overline{S^B}$ мы обозначаем замыкание множества S во множестве B.

Точно также из леммы 4′ получаем

Следствие 1′. *В предположении леммы* 2 *никакое пространство* X, *представимое в виде* $X = \overline{U X_\lambda}$, *где слагаемые* X_λ — *замкнуты в* X, *составляют сильно-звездно-конечную систему, которая для каждого* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *содержит множества* X_{λ_k} $(\lambda_k \neq \lambda_l$ *при* $k \neq l)$ *размерности* $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X_{\lambda_k} \geqq k$, *не имеет размерности* $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}}$.

Докажем теперь теорему Левшенко [1] для размерности $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}}$ но при следующем дополнительном условии, налагаемом на класс M: назовём класс M *локально-счетно-аддитивным*, если он содержит всякое пространство X, имеющее локально-счетное покрытие из замкнутых множеств $\Phi_\lambda \in \mathrm{M}$.

Теорема 1. *Если класс* M *монотоннен по замкнутым множествам и локально-счётно-аддитивен, то* $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X = \operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X$ *для всякого метрического пространства* X, *обладающего конечной размерностью* $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X$.

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно показать, что в наших условиях $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X \leqq \operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X$. Пусть $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X = -1$. Тогда $X \in \mathrm{M}$ и $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X = -1$. Предположим теперь, что если $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X \leqq n - 1$, то и $\operatorname{Ird}_{\mathrm{M}} X \leqq n - 1$. Докажем, что заменив в этом утверждении n на $n + 1$, мы не нарушим его справедливости. Пусть $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} X \leqq n$, а A — произвольное непустое замкнутое множество в X. Применим конструкцию Левшенко [1]. Для каждого $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ существуют такие окрестности O_k множества A, что $\overline{O}_{k+1} \subset O_k$ и $\varrho(x, A) \leqq 1/k$, если $x \in O_k$, и $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} \dot{O}_k \leqq n - 1$ [8]. Пусть еще $O_0 = X$, а $P_k = \overline{O}_k \setminus O_{k+1}$ для каждого k. Ясно, что $X \setminus A = U P_k$ и что множество $T = U \dot{P}_k$ замкнуто в $X \setminus A$. По теореме Аартса о счётной сумме ([3], стр. 202–203) $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} T \leqq n - 1$. В силу леммы 2 $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} P_k \leqq n$ для каждого k. Отсюда легко вывести известными методами, что для каждого $k \geqq 1$ существует такое локально-конечное покрытие $\{U_{k\alpha}\}$ множества P_k открытыми в нем множествами $U_{k\alpha}$, что $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} (\overline{U}_{k\alpha} \setminus U_{k\alpha}) \leqq n - 1$ для всех α и что $\operatorname{diam} U_{k\alpha} \leqq 1/k$ при любых k и α.

Пусть $\Phi = \bigcup_k \bigcup_\alpha (\overline{U}_{k\alpha} \setminus U_{k\alpha})$. Легко видеть, что Φ, а, значит, и множество $B = T \cup \Phi$ замкнуто в $X \setminus A$. По теореме Аартса о локально-конечной сумме ([3], стр. 203–204) $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} \bigcup_\alpha (\overline{U}_{k\alpha} \setminus U_{k\alpha}) \leqq n - 1$ для каждого k, а отсюда по теореме Аартса о счётной сумме имеем: $\operatorname{Ind}_{\mathrm{M}} B \leqq n - 1$ [9]. Можно считать, что индексы α являются порядковыми числами. Построим по индукции множества $V_{k\alpha}$ с помощью формул:

$$V_{00} = X \setminus \overline{O}_1 \setminus B\,, \quad V_{k\beta} = U_{k\beta} \setminus B \setminus \bigcup_{\alpha < \beta} \overline{U}_{k\alpha}\,.$$

[8]) Через $\dot{O}$ обозначаем границу $\overline{O} \setminus O$ множества O в X.

[9]) Легко видеть, что в наших предположениях условие счётно-локальной аддитивности эквивалентно условиям Аартса (счётной аддитивности и локально конечной аддитивности) взятым вместе.

Множества $V_{k\alpha}$ будут открыты в X, попарно не пересекаются и покрывают множество $X \setminus A \setminus B$. Ретракцию $r : X \setminus B \to A$ получаем так: берем в A такую систему точек $a_{k\alpha}$, что $V_{k\alpha} \neq \emptyset$ и $\varrho(a_{k\alpha}, V_{k\alpha}) < 2/k$, и полагаем $r(x) = a_{k\alpha}$, если $x \in V_{k\alpha}$, и $r(x) = x$, если $x \in A$. По индукционному предположению $\mathrm{Ird_M}\, B \leqq n - 1$. Так как A было выбрано произвольно, то этим доказано, что $\mathrm{Ird_M}\, X \leqq n$, чем теорема Левшенко доказана и в наших предположениях.

Для второй теоремы нам понадобится вспомогательная

Лемма 5. *Если класс* M *монотонен по замкнутым множествам и счётно-аддитивен*[10]*, то всякая точка x всякого метрического пространства X, имеющего размерность* $\mathrm{Ird_M}\, X$, *обладает такой окрестностью O, что* $\mathrm{Ird_M}\, O$ *— конечно.*

Доказательство. Если $\mathrm{M} = \emptyset$, то пространств, имеющих размерность $\mathrm{Ird_M}$, не существует, и – лемма верна. Пусть $\mathrm{M} \neq \emptyset$. Тогда $\emptyset \in M$ и $\mathrm{Ird_M}\, \emptyset = -1$. Тогда каждое одноточечное пространство X является ретрактом самого себя. Откуда следует, что $\mathrm{Ird_M}\, X \leqq 0$. С помощью этих утверждений покажем предварительно, что если точка x метрического пространства X не имеет замкнутых окрестностей конечной размерности $\mathrm{Ird_M}$, то для каждой ее окрестности O и каждого числа $k \geqq 1$ найдется такая окрестность O', что $\bar{O}' \subset O$ и $\mathrm{Ird_M}\,(\bar{O} \setminus O') \geqq k$. Для этого построим такую последовательность окрестностей O_n точки x, что $O_1 = O$, $\bar{O}_{n+1} \subset O_n$ и $\operatorname{diam} O_n < 1/n$ для всех n. Тогда $\bar{O} = x \cup \bigcup P_n$, где $P_n = \bar{O} \setminus O_n$. Предположив, вопреки желаемому, что $\mathrm{Ird_M}\,(\bar{O} \setminus O_n) \leqq k - 1$ для всех n получим в силу леммы 3, теоремы 1 и теоремы Аартса о счётной сумме, что $\mathrm{Ird_M}\, \bar{O} \leqq k - 1$, вопреки условию. Предположим снова, что точка x метрического пространства X, обладающего размерностью $\mathrm{Ird_M}\, X$, не имеет замкнутых окрестностей конечной размерности $\mathrm{Ird_M}$. Тогда из только что доказанного следует, что для окрестности $O_0 = X$ найдется такая окрестность O_1, что $\bar{O}_1 \subset O_0$ и $\mathrm{Ird_M}\,(\bar{O}_0 \setminus O_1) \geqq 1$. Для O_1 найдется по той же причине такая окрестность O_2 точки x, что $\bar{O}_2 \subset O_1$ и $\mathrm{Ird_M}\,(\bar{O}_1 \setminus O_2) \geqq 2$. Продолжая этот процесс мы получим последовательность окрестностей O_k точки x, удовлетворяющих условиям $\bar{O}_{k+1} \subset O_k$ и $\mathrm{Ird_M}\, X_k \geqq k$, для всех k, где $X_k = \bar{O}_{k-1} \setminus O_k$. Система замкнутых множеств X_k сильно-звездно-конечна. Поэтому согласно следствию леммы 4 замкнутое множество $\overline{UX_k}$ не имеет размерности $\mathrm{Ird_M}$. Но тогда и X согласно лемме 2 и вопреки нашему предположению не имеет размерности $\mathrm{Ird_M}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если в предположениях теоремы* 1 *метрическое пространство X обладает размерностью* $\mathrm{Ird_M}\, X$, *то* $\mathrm{Ird_M}\, X = \mathrm{Ind_M}\, X < \omega_0$.

[10]) Это значит, что M содержит всякое пространство X, обладающее счетным покрытием из замкнутых множеств $\Phi_k \in \mathrm{M}$.

Доказательство. Согласно лемме 5 в этом случае каждая точка x имеет замкнутую окрестность $\overline{Ox}$ конечной размерности $\operatorname{Ird}_M \overline{Ox}$. Выберем эту окрестность так, чтобы её размерность $\operatorname{Ird}_M \overline{Ox}$ была наименьшей из возможных. Если существует такое натуральное число N, что $\operatorname{Ird}_M \overline{Ox} \leqq N$ для всех x, то в покрытие из окрестностей Ox можно вписать замкнутое локально-конечное покрытие $\{\Phi\}$. По леммам 2 и 3 тогда $\operatorname{Ind}_M \Phi \leqq N$ для всех Φ, а по теореме Аартса о локально-конечной сумме и нашей теореме 1 получим, что $\operatorname{Ird}_M X = \operatorname{Ind}_M X \leqq k$ что и требовалось доказать. Остается еще показать, что другого случая не может быть. Пусть всё же существует такая последовательность точек x_k, что $\operatorname{Ird}_M \overline{Ox_k} \geqq k$ при каждом k. Если последовательность x_k не имеет точек прикосновения, то множество всех точек x_k замкнуто и дискретно, т. е. расстояния $\varrho(x_k, x_{k'}) \geqq \delta_k > 0$ при всех k и $k' \neq k$. Возьмем тогда такие окрестности Ux_k, что $\overline{Ux_k} \subset Ox_k$ и $\operatorname{diam} \overline{Ux_k} \leqq \delta_k/3$. В силу наших предположений об окрестностях Ox_k размерности $\operatorname{Ird}_M \overline{Ux_k} = \operatorname{Ird}_M \overline{Ox_k} \geqq k$. В силу леммы 4 множество $X' = \overline{\bigcup_k \overline{Ux_k}}$ не имеет размерности Ird_M, так как окрестности $\overline{Ux_k}$ попарно не пересекаются и открыты в X'. Так как X' замкнуто в X, то по лемме 2 и X не имеет размерности Ird_M, вопреки предположению. Итак, остается случай, когда последовательность x_k имеет точку прикосновения. Пусть такой будет точка x. Тогда найдется такое число k, что $x_k \in Ox$ и $k > \operatorname{Ird}_M \overline{Ox}$. Это снова противоречит выбору окрестности Ox_k, так как $\operatorname{Ird}_M \overline{Ox_k} \geqq k > \operatorname{Ird}_M \overline{Ox}$ и $x_k \in Ox$. Этим все возможные случаи разобраны, чем теорема доказана.

Литература

[1] *Б. Т. Левшенко:* Размерность метрических пространств и ретракция, "Fund. Math.", *66*, 1969, 1—5,

[2] *A. Lelek,* Dimension and mappings of spaces with finite deficiency. "Coll. Math" v. *12*, 1964, 221—227.

[3] *J. M. Aarts,* Dimension modulo a class of spaces. "Nieuw Archif Wisk" v. *20*, 1972, 191—215.

[4] *М. Катетов:* О размерности метрических пространств. ДАН СССР, т. *79*, 1951, 189—191.

Адрес авторов: СССР, Москва В-234, МГУ, Математическое отделение.