Vasile Cruceanu

Connexions compatibles avec certaines structures sur un fibré vectoriel banachique

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 24 (1974), No. 1, 126–142

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101223`

Czechoslovak Mathematical Journal, 24 (99) 1974, Praha

CONNEXIONS COMPATIBLES AVEC CERTAINES STRUCTURES SUR UN FIBRÉ VECTORIEL BANACHIQUE

V. CRUCEANU, Jassy

(Recu le 18. avril 1973)

Le problème de la détermination des connexions compatibles avec certaines structures sur une variété différentiable est souvent rencontré en géométrie différentielle et il a été étudié par de nombreux géométres. En reprenant ce problème dans le cadre plus général d'un fibré vectoriel banachique (f.v.b.) nous déterminons dans ce travail toutés les connexions et les couples des connexions qui sont compatibles avec l'une des structures: presque-produit (p.p.), presque-complexe (p.c.), presque-métrique (p.m.), presque-symplectique (p.s.) ou avec certaines combinaisons de ces structures. Dans la résolution simple et géométrique de ce problème un rôle essentiel est joué par le fait que l'ensemble des connexions sur un f.v.b. admet une structure de module affine.

1. CONNEXIONS SUR UN F.V.B.

Soit M une variété différentiable banachique de classe C^∞ qui admet des partitions de l'unité et $\pi : V \to M$ un f.v.b. sur M aussi de classe C^∞. Notons par $\mathfrak{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles de classe C^∞ sur M et par $C^\infty(V)$ le $\mathfrak{F}(M)$-module des sections de classe C^∞ de V. Une trivialisation locale (U, φ, Φ) pour $\pi : V \to M$ est un isomorphisme de fibrés

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \varphi(U) \times \boldsymbol{V} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U \arrow[r] & \varphi(U) \end{tikzcd}$$

où $(U, \varphi, \boldsymbol{M})$ est une carte locale sur M et $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{V}$ sont des espaces de Banach. Si pour tous $p \in U$ et $A \in V_p = \pi^{-1}(p)$, nous posons $\Phi(A) = (\varphi(p), \Phi_p(A))$, on obtient un isomorphisme topologique linéaire $\Phi_p : V_p \to \boldsymbol{V}$. En considerant une autre trivialisation (U', φ', Φ') telle que $U \cap U' \neq \emptyset$, nous définissons l'application de transition

$$G_{\varphi'\varphi} : \varphi(U \cap U') \to L(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{V}')$$

par $G_{\varphi'\varphi}(x) = \Phi'_p \circ \Phi_p^{-1}$ où $\varphi(p) = x$ et qui est de la classe C^∞. Pour $A \in C^\infty(V)$ nous notons par $A_\varphi : \varphi(U) \to V$ la partie principale de cette section dans la trivialisation (U, φ, Φ) et par $A_{\varphi(p)}$ sa valeur en $\varphi(p)$.

Définition 1.1. [6, pg. 9] On appelle *connexion* (linéaire) sur le f.v.b. $\pi : V \to M$ une application $\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ notée $\nabla(X, A) = \nabla_X A$, telle que pour toute trivialisation locale (U, φ, Φ) de π il existe une application de classe C^∞ $\Gamma_\varphi : \varphi(U) \to L(M, V; V)$ avec la propriété que $\nabla_X A$ a l'expression locale

$$(1) \qquad \nabla_X A|_{\varphi(p)} = DA|_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}) + \Gamma_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, A_{\varphi(p)})$$

où $\Gamma_{\varphi(p)} = \Gamma_\varphi(\varphi(p))$.

De cette définition il résulte que l'application ∇ satisfait aux conditions

$$(2) \qquad \nabla_{fX+gY} = f\,\nabla_X + g\,\nabla_Y\,, \quad \nabla_X(A + B) = \nabla_X A + \nabla_X B\,,$$
$$\nabla_X(fA) = X(f)\,A + f\,\nabla_X A$$

pour $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, $X, Y \in C^\infty(TM)$ et $A, B \in C^\infty(V)$.

Ces conditions caractérisent une connexion dans le cas d'un fibré de dimension finie, mais elles ne sont pas suffisantes pour définir une connexion sur un f.v.b. de dimension infinie.

De l'expression locale (1) il résulte qu'à un changement de la trivialisation, l'application Γ_φ se transforme selon la loi

$$(3) \qquad \Gamma_{\varphi'(p)} = G_{\varphi'\varphi}(\varphi(p)) \circ$$
$$\circ \left[DG_{\varphi\varphi'}(\varphi'(p)) + \Gamma_{\varphi(p)} \circ (D(\varphi \circ \varphi'^{-1})(\varphi'(p)), G_{\varphi\varphi'}(\varphi'(p))\right].$$

On en déduit une autre définition et l'existence d'une connexion sur un f.v.b.

A une connexion ∇ sur V, on peut associer l'application $R : C^\infty(TM) \times C^\infty(TM) \times C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ donnée par

$$(4) \qquad R(X, Y)\,A = [\nabla_X, \nabla_Y]\,A - \nabla_{[X,Y]}A \quad \forall X, Y \in C^\infty(TM),\ A \in C^\infty(V)\,.$$

De la représentation locale

$$R(X, Y)\,A|_{\varphi(p)} = D\Gamma_{\varphi|\varphi(p)}(X_{\varphi(p)})\,(Y_{\varphi(p)}, A_{\varphi(p)}) -$$
$$- D\Gamma_{\varphi|\varphi(p)}(Y_{\varphi(p)})\,(X_{\varphi(p)}, A_{\varphi(p)}) +$$
$$+ \Gamma_{\varphi|\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, \Gamma_{\varphi|\varphi(p)}(Y_{\varphi(p)}, A_{\varphi(p)})) - \Gamma_{\varphi|\varphi(p)}(Y_{\varphi(p)}, \Gamma_{\varphi|\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, A_{\varphi(p)}))$$

on déduit que R est une application $\mathfrak{F}(M)$-linéaire qui détermine une section de classe C^∞ sur le f.v.b. $\mathfrak{C}(TM, TM, V; V)$, notée aussi par R et nommée le tenseur de courbure de ∇.

Si A est une section de V, absolument parallèle dans la connexion ∇, c'est-à-dire

(5) $$\nabla_X A = 0 \quad \forall X \in C^\infty(TM),$$

alors elle satisfait à la condition d'intégrabilité

(6) $$R(X, Y)\, A = 0 .$$

Pour ce qui suit, nous rappelons la notion de module affine qui généralise celle d'espace affine et qui a été introduite dans [4].

Soient $\mathfrak{D}$ un module linéaire sur l'anneau K et $\mathfrak{A}$ un ensemble d'éléments nommés points.

Définition 1.2. Nous disons que l'application $\varrho : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ détermine sur $\mathfrak{A}$ une structure de *module affine* associé au module linéaire $\mathfrak{D}$ si les conditions suivantes sont vérifiées:

1. $\varrho(P, Q) + \varrho(Q, R) = \varrho(P, R) \ \forall P, Q, R \in \mathfrak{A}$,

2. Il existe $O \in \mathfrak{A}$ tel que l'application $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ définie par $h(P) = \varrho(O, P)$ soit une bijection.

Un grand nombre de notions et résultats sur les espaces affines s'étendent sans difficulté aux modules affines [5]. Rappelons seulement les notions suivantes.

On dit que la partie $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ est un *sous-module affine* de $\mathfrak{A}$ s'il existe $O \in \mathfrak{A}'$ tel que l'ensemble $\mathfrak{D}' = \{\varrho(O, P); P \in \mathfrak{A}'\}$ soit un sous-module linéaire de $\mathfrak{D}$ ou si $\mathfrak{A}' = \emptyset$.

Une application $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ s'appelle *K-affine* s'il existe $O \in \mathfrak{A}$ tel que l'application $f : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ definie par

$$\forall X = \varrho(O, P) : f(X) = \varrho(F(O), F(P))$$

soit K-linéaire. On dit alors que F est associée à f.

On peut maintenant énoncer et démontrer le

Théorème 1.1. *L'ensemble $\mathfrak{A}(V)$ des connexions sur un f.v.b. $\pi : V \to M$ peut être doné d'une structure de module affine associé ou module linéaire $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$ sur l'anneau $\mathfrak{F}(M)$.*

En effet, soient ∇^1 et ∇^2 deux connexions sur V et $\tau : C^\infty(TM) \times C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ l'application définie par

(7) $$\tau(X, A) = \nabla_X^2 A - \nabla_X^1 A \quad \forall X \in C^\infty(TM), \quad A \in C^\infty(V),$$

et notée par $\tau = \nabla^2 - \nabla^1$. Compte tenu de l'expression (1) on constate que l'application τ est $\mathfrak{F}(M)$-linéaire et qu'elle détermine une section de classe C^∞ sur le f.v.b. $\mathfrak{C}(TM, V; V)$, nommée *le tenseur de déformation* pour le couple (∇^1, ∇^2). En considérant alors l'application $\varrho : \mathfrak{A}(V) \times \mathfrak{A}(V) \to C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V)$ qui fait correspondre à chaque couple ordonné de connexions (∇^1, ∇^2) son tenseur de déformation τ, on constate qu'elle satisfait aux conditions 1, 2, de la définition 1.2 et par suite détermine sur $\mathfrak{A}(V)$ une structure de module affine associé au module linéaire $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$ sur l'anneau $\mathfrak{F}(M)$.

Soient V_1 et V_2 deux f.v.b. de base M et $\mathfrak{C}(V_1, V_2)$ le f.v.b. des homomorphismes de V_1 en V_2 [1]. En considerant deux connexions ∇^1 et ∇^2 respectivement sur V_1 et V_2 et en mettant pour chaque $X \in C^\infty(TM)$ et $h \in C^\infty(\mathfrak{C}(V_1; V_2))$,

$$\mathfrak{D}_X h(v) = \nabla^2_X(h(v)) - h(\nabla^1_X v) \quad \forall v \in C^\infty(V_1)\,, \tag{8}$$

on obtient pour $\mathfrak{D}_X h$ l'expression locale

$$\mathfrak{D}_X h|_{\varphi(p)} = Dh|_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}) + \Gamma_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, h_{\varphi(p)})\,,$$

où Γ_φ est donnée par

$$\Gamma_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, h_{\varphi(p)})\,(v_{\varphi(p)}) =$$
$$= \Gamma^2_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, h_{\varphi(p)}(v_{\varphi(p)})) - h_{\varphi(p)}(\Gamma^1_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, v_{\varphi(p)}))\,.$$

Il en résulte que $\Gamma_\varphi : \varphi(U) \to L(M, L(V_1, V_2); L(V_1; V_2))$ est une application de classe C^∞ et que $\mathfrak{D}_X h \in C^\infty(\mathfrak{C}(V_1; V_2))$. Par suite, $\mathfrak{D}$ est une connexion sur $\mathfrak{C}(V_1; V_2)$ qui serait nommée la connexion *induite* par ∇^1 et ∇^2. Compte tenu, qu'une section $h \in C^\infty(\mathfrak{C}(V_1; V_2))$ détermine un homomorphisme de V_1 en V_2 et par suite une application $\mathfrak{F}(M)$-linéaire de $C^\infty(V_1)$ en $C^\infty(V_2)$ notée aussi par h, nous pouvons écrire $\mathfrak{D}$ sous la forme plus commode

$$\mathfrak{D}_X h = \nabla^2_X \circ h - h \circ \nabla^1_X \quad \forall X \in C^\infty(TM)\,. \tag{9}$$

On en obtient pour le tenseur de courbure de $\mathfrak{D}$ l'expression

$$R(X, Y)\, h = R^2(X, Y) \circ h - h \circ R^1(X, Y)\,. \tag{10}$$

Par suite si la section h est absolument parallèle, elle doit satisfaire à la condition d'intégrabilité

$$R^2(X, Y) \circ h - h \circ R^1(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in C^\infty(TM)\,. \tag{11}$$

Soit $\boldsymbol{R}_M = M \times \boldsymbol{R}$ le f.v.b. trivial de base M et fibre $\boldsymbol{R}$, le corps des réels. Alors en mettant, pour chaque $X \in C^\infty(TM)$ et $f \in C^\infty(\boldsymbol{R}_M) = \mathfrak{F}(M)$

$$\nabla^\circ_X f = X(f)\,, \tag{12}$$

on obtient l'expression locale

$$\nabla^\circ_X f|_{\varphi(p)} = Df_{\varphi|\varphi(p)}(X_{\varphi(p)})\,,$$

qui a la forme (1) avec $\Gamma_\varphi = 0$. Par suite, ∇° est une connexion sur $\boldsymbol{R}_M$ qui sera nommée la connexion *canonique.*

En prenant $V_1 = V$ et $V_2 = \boldsymbol{R}_M$ le f.v.b. $\mathfrak{C}(V; \boldsymbol{R}_M) = V'$ est le dual de V. Par suite, à une connexion ∇ sur V et à la connexion canonique sur $\boldsymbol{R}_M$ correspond une connexion ${}^t\nabla$ sur V' nommée la connexion duale à ∇, définie par la relation

$$(13) \qquad {}^t\nabla_X \omega(A) = X(\omega(A)) - \omega(\nabla_X A) \quad \forall X \in C^\infty(TM)\,, \quad A \in C^\infty(V)$$

où $\omega \in C^\infty(V')$. Pour son tenseur de courbure on obtient

$$(14) \qquad {}^tR(X, Y)\,\omega = -\omega \circ R(X, Y) \quad \forall X, Y \in C^\infty(TM)\,, \quad \omega \in C^\infty(V')\,.$$

2. CONNEXIONS ET COUPLES DE CONNEXIONS COMPATIBLES À UNE F-STRUCTURE

Définition 2.1. Nous appelons *F-structure* sur un f.v.b. V une section F de classe C^∞ sur le fibré $\mathfrak{C}(V; V)$.

Par suite, F détermine un endomorphisme du fibré V et un endomorphisme de l'$\mathfrak{F}(M)$-module $C^\infty(V)$, notés aussi par F.

Définition 2.2. On dit que la connexion ∇ sur V est compatible avec la structure F ou qu'elle est une *F-connexion* si F est absolument parallele pour la connexion $\mathfrak{D}$ induite sur $\mathfrak{C}(V; V)$ par ∇, c'est à dire

$$(15) \qquad \mathfrak{D}_X F = \nabla_X \circ F - F \circ \nabla_X = 0 \quad \forall X \in C^\infty(TM)\,.$$

La structure F doit satisfaire alors à la condition d'intégrabilité

$$(16) \qquad R(X, Y) \circ F - F \circ R(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in C^\infty(TM)\,.$$

Si ∇ et $\overline{\nabla}$ sont deux connexions sur V, liées par la relation

$$(17) \qquad \overline{\nabla} = \nabla + \tau$$

nous avons

$$(18) \qquad \overline{\mathfrak{D}}_X F = \mathfrak{D}_X F + \tau_X \circ F - F \circ \tau_X$$

où $\tau_X : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ est défini par $\tau_X(A) = \tau(X, A)$.

Par suite, ∇ et $\overline{\nabla}$ sont simultanément des F-connexions si et seulement si le tenseur de déformation τ satisfait à la condition

$$(19) \qquad \tau_X \circ F - F \circ \tau_X = 0 \quad \forall X \in C^\infty(TM)\,.$$

Cette relation étant $\mathfrak{F}(M)$-linéaire en τ_X, on obtient

Théorème 2.1. *L'ensemble* $\mathfrak{A}_F(V)$ *des connexions sur* V, *compatibles à une* F*-structure donnée, est un sous-module affine de* $\mathfrak{A}(V)$, *associé au sous-module linéaire de* $C^\infty(\mathfrak{L}(TM, V; V))$ *formé par les éléments* τ *qui satisfont à la relation* (19).

En particulier, si la structure F est non singulière, c'est-à-dire F est un isomorphisme de V, alors F^{-1} est aussi une F-structure. Dans ce cas, on peut introduire l'opérateur $\mathfrak{F}(M)$-linéaire ${}^*\Omega_F$ sur $C^\infty(\mathfrak{L}(TM, V; V))$ défini par

$$(20) \qquad {}^*\Omega_F(\tau)_X = \tfrac{1}{2}(\tau_X - F^{-1} \circ \tau_X \circ F) \quad \forall X \in C^\infty(TM)$$

et la relation (18) prend la forme

$$(21) \qquad \bar{\mathfrak{D}}_X F = \mathfrak{D}_X F - 2F \circ {}^*\Omega_F(\tau)_X .$$

Par suite,

Théorème 2.2. *Pour une* F*-structure non singulière le sous-module* $\mathfrak{A}_F(V)$ *de* $\mathfrak{A}(V)$, *formé par les connexions compatibles à* F, *est associé au sous-module linéaire* $Ker\, {}^*\Omega_F$ *de* $C^\infty(\mathfrak{L}(TM, V; V))$.

Soient maintenant ∇^1 et ∇^2 deux connesions sur V. A leur aide, nous pouvons définir quatre connexions $\mathfrak{D}^{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ sur $\mathfrak{L}(V; V)$ par les relations

$$(22) \qquad \mathfrak{D}^{ij}_X F = \nabla^i_X \circ F - F \circ \nabla^j_X \quad (i, j = 1, 2), \quad \forall X \in C^\infty(TM),$$

quel que soit $F \in C^\infty(\mathfrak{L}(V; V))$.

Définition 2.3. Nous disons que le couple ordonné de connexions (∇^1, ∇^2) sur V est *compatible* à une F-structure donnée si l'on a

$$(23) \qquad \mathfrak{D}^{12}_X F = \nabla^1_X \circ F - F \circ \nabla^2_X = 0 \quad \forall X \in C^\infty(TM),$$

c'est-à-dire F est absolument parallèle par rapport à la connexion $\mathfrak{D}^{12}$. On dit encore que le couple (∇^1, ∇^2) est F*-compatible* ou que ∇^2 est *conjuguée* à ∇^1 par rapport à F.

De (23) on obtient la condition d'intégrabilité

$$(24) \qquad R^1(X, Y) \circ F - F \circ R^2(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in C^\infty(TM).$$

Au couple (∇^1, ∇^2) on peut associer la connexion moyenne et le tenseur de déformation τ donnés par

$$(25) \qquad \nabla^m = \tfrac{1}{2}(\nabla^1 + \nabla^2), \quad \tau = \nabla^2 - \nabla^1 .$$

Nous avons alors

$$(26) \qquad \mathfrak{D}^{12}_X F = \mathfrak{D}^m_X F - \tfrac{1}{2}(\tau_X \circ F + F \circ \tau_X), \quad \mathfrak{D}^{21}_X F = \mathfrak{D}^m_X F + \tfrac{1}{2}(\tau_X \circ F + F \circ \tau_X)$$

et par suite,

Théorème 2.3. *Les couples des connexions (∇^1, ∇^2) et (∇^2, ∇^1) sur V sont simultanement compatible avec la structure F si et seulement si la connexion moyenne et le tenseur de déformation satisfont aux conditions*

$$(27) \qquad \mathfrak{D}^m_X F = 0\,, \quad \tau_X \circ F + F \circ \tau_X = 0 \quad \forall X \in C^\infty(TM)\,.$$

En supposant la structure F non singulière, on peut introduire l'operateur $\mathfrak{F}(M)$-linéaire Ω_F sur $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$ donné par

$$(28) \qquad \Omega_F(\tau)_X = \tfrac{1}{2}(\tau_X + F^{-1} \circ \tau_X \circ F) \quad \forall X \in C^\infty(TM)$$

et à son aide les relations (26) peuvent s'écrire sous la forme

$$(29) \qquad \mathfrak{D}^{12}_X F = \mathfrak{D}^m_X F - F \circ \Omega_F(\tau)_X \quad \mathfrak{D}^{21}_X F = \mathfrak{D}^m_X F + F \circ \Omega_F(\tau)_X\,.$$

On en obtient

Théorème 2.4. *Les couples des connexions (∇^1, ∇^2) et (∇^2, ∇^1) sur V sont simultanément compatibles à une structure F non singulière si et seulement si la connexion moyenne est une F-connexion et le tenseur de déformation appartient à* Ker Ω_F.

Pour F non singulière, la relation (23) peut s'écrire sous la forme

$$(30) \qquad \nabla^2_X = F^{-1} \circ \nabla_X \circ F = \nabla^1_X + F^{-1} \circ \mathfrak{D}^{11}_X F \quad \forall X \in C^\infty(TM)$$

et par suite,

Théorème 2.5. *Etant données une connexion ∇^1 et une structure F non singulière sur V il existe une connexion ∇^2 et une seule telle que le couple (∇^1, ∇^2) soit compatible à F.*

De (30) on obtient pour la connexion moyenne

$$(31) \qquad \nabla^m_X = \nabla^1_X + \tfrac{1}{2}F^{-1} \circ \mathfrak{D}^{11}_X F$$

ce qui donne

$$(32) \qquad \mathfrak{D}^m_X F = \tfrac{1}{2}F^{-1} \circ \mathfrak{D}^{11}_X (F^2)\,.$$

On en obtient

Théorème 2.6. *Pour une structure F non singulière, la connexion moyenne d'un couple (∇^1, ∇^2), F-compatible, est une F-connexion si et seulement si ∇^1 est une F^2-connexion.*

La relation (31) nous donne l'idée de considérer l'opérateur $\Phi_F : \mathfrak{A}(V) \to \mathfrak{A}(V)$, défini par

$$(33) \qquad \Phi_F(\nabla) = \nabla_X + \tfrac{1}{2}F^{-1} \circ \mathfrak{D}_X F \quad \forall X \in C^\infty(TM)$$

qui fait correspondre à ∇ la connexion moyenne de ∇ et sa conjuguée par rapport à F. Pour deux connexions ∇ et $\overline{\nabla}$ liées par la relation (17) on obtient

$$\Phi_F(\overline{\nabla}) = \Phi_F(\nabla) + \Omega_F(\tau) \tag{34}$$

et par suite

Théorème 2.7. *L'opérateur Φ_F défini par (33) est une application $\mathfrak{F}(M)$-affine sur $\mathfrak{A}(V)$, associée à l'application $\mathfrak{F}(M)$-linéaire Ω_F sur $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$.*

Définition 2.4. Une F-structure sur V s'appelle *presque-produit* (p.p) ou *presque-complexe* (p.c) si elle satisfait respectivement, la condition

$$F^2 = I \quad \text{ou} \quad F^2 = -I\,, \tag{35}$$

où I est l'automorphisme identique de V.

Il en résulte qu'une F-structure p.p. ou p.c. est non singulière.

En considerant les opérateurs Ω_F et $^*\Omega_F$, on obtient de (35), (28) et (20)

$$\Omega_F^2 = \Omega_F\,, \quad \Omega_F + {}^*\Omega_F = \mathrm{id}\,, \quad {}^*\Omega_F^2 = {}^*\Omega_F\,, \quad \Omega_F \circ {}^*\Omega_F = {}^*\Omega_F \circ \Omega_F = 0\,, \tag{36}$$

c'est-à-dire nous avons

Théorème 2.8. *Pour une F-structure p.p. ou p.c. les opérateurs Ω_F et $^*\Omega_F$ sont des projecteurs supplémentaires de l'$\mathfrak{F}(M)$-module linéaire $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$.*

Il en résulte

$$\mathrm{Ker}\,\Omega_F = \mathrm{Im}\,{}^*\Omega_F\,, \quad \mathrm{Ker}\,{}^*\Omega_F = \mathrm{Im}\,\Omega_F \tag{37}$$

et par suite, les équations

$$\Omega_F(\tau) = 0 \quad \text{et} \quad {}^*\Omega_F(\tau) = 0 \tag{38}$$

ont respectivement les solutions

$$\tau = {}^*\Omega_F(\sigma) \quad \text{et} \quad \tau = \Omega_F(\sigma) \tag{39}$$

où σ est un élément arbitraire de $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$.

Des relations (33) et (32), il résulte que pour une F-structure p.p. ou p.c. on a

$$\Phi_F(\nabla)_X F = \mathfrak{D}_X^m F = 0 \tag{40}$$

pour toute connexion ∇, c'est-à-dire, l'image d'une connexion ∇ par l'application Φ_F est une F-connexion.

En tenant compte que Φ_F est une application $\mathfrak{F}(M)$-affine de $\mathfrak{A}(V)$, associée a l'application $\mathfrak{F}(M)$-lineaire Ω_F de $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$ et que, pour une structure p.p.

ou p.c., Ω_F est la projection de $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$ sur Ker $^*\Omega_F$, faite parallélement au Ker Ω_F, il résulte

Théorème 2.9. *Dans le cas d'une structure p.p. ou p.c. sur V, l'opérateur Φ_F est la projection du module affine $\mathfrak{A}(V)$ sur le sous-module $\mathfrak{A}_F(V)$, faite parallèlement à la direction définie par* Ker Ω_F.

Par suite, on a

$$\mathfrak{A}_F(V) = \operatorname{Im} \Phi_F \,. \tag{41}$$

En considérant sur $\mathfrak{A}(V)$ l'opérateur de conjugaison par rapport à F, c'est-à-dire l'application $C_F : \mathfrak{A}(V) \to \mathfrak{A}(V)$ qui fait correspondre à chaque connexion ∇ sa conjuguée relatif à F, définie d'après (30) par la relation

$$C_F(\nabla)_X = F^{-1} \circ \nabla_X \circ F = \nabla_X + F^{-1} \circ \mathfrak{D}_X F \,, \quad \forall X \in C^\infty(TM) \tag{42}$$

il resulte, compte tenu de (33) que

$$\Phi_F(\nabla) = \tfrac{1}{2}(\nabla + C_F(\nabla)) \,. \tag{43}$$

De cette relation et du théorème 2.9 on obtient

Théorème 2.10. *Dans le cas d'une F-structure p.p. ou p.c. l'opérateur de conjugaison par rapport à F est la symétrie affine de $\mathfrak{A}(V)$ par rapport au sous-module $\mathfrak{A}_F(V)$, faite parallélement à la direction de* Ker Ω_F.

Conséquence 2.1. *La relation de F-compatibilité sur $\mathfrak{A}(V)$, par rapport à une structure F p.p. ou p.c., est symétrique.*

$\mathfrak{A}(V)$ étant une module affine associé ou module linéaire $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$, en considérant un élément fixe ∇° de $\mathfrak{A}(V)$, tout autre élément est de la forme $\nabla^\circ + \sigma$ ou $\sigma \in C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$. Par suite, toute connexion ∇ de $\mathfrak{A}_F(V)$ peut être écrite sous la forme $\nabla = \Phi_F(\nabla^\circ + \sigma)$ et en tenant compte de (34) on obtient

Théorème 2.11. *Pour une F-structure p.p. ou p.c. sur V, l'ensemble $\mathfrak{A}_F(V)$ des F-connexions est donnée par l'équation*

$$\nabla = \Phi_F(\nabla^\circ) + \Omega_F(\sigma) \,, \tag{44}$$

ou ∇° est une connexion quelconque fixée sur V et σ est un élement arbitarire de $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$.

Les connexions ∇^1 et ∇^2 d'un couple F-compatible étant symétriques par rapport à $\mathfrak{A}_F(V)$, parallélement à la direction de Ker Ω_F, on peut écrire

$$\nabla^1 = \nabla^m + \mu \,, \quad \nabla^2 = \nabla^m - \mu \tag{45}$$

où la connexion moyenne $\nabla^m \in \mathfrak{A}_F(V)$ et $\mu \in \operatorname{Ker} \Omega_F = \operatorname{Im} {}^*\Omega_F$. Par suite, on a

Théorème 2.12. *L'ensemble des couples* (∇^1, ∇^2) *de connexions sur* V *compatibles à une F-structure p.p. ou p.c. est donné par les équations*

$$\begin{aligned} \nabla^1 &= \Phi_F(\nabla^\circ) + \Omega_F(\sigma) + {}^*\Omega_F(\tau) \\ \nabla^2 &= \Phi_F(\nabla^\circ) + \Omega_F(\sigma) - {}^*\Omega_F(\tau) \end{aligned} \tag{46}$$

où ∇° *est une connexion quelconque fixée sur* V *et* σ, τ *sont des éléments arbitraires de* $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$.

3. CONNEXIONS ET COUPLES DES CONNEXIONS COMPATIBLES À UNE g-STRUCTURE

Dans ce qui suit nous supposons que les f.v.b. sont modelés par des espaces de Banach réflexifs.

Définition 3.1. Nous appelons g-structure sur le f.v.b. V une section g de classe C^∞ du fibré $\mathfrak{C}(V; V')$, où V' est le dual de V.

Une telle structure détermine un homomorphisme de V en V' et par suite une application $\mathfrak{F}(M)$-linéaire de $C^\infty(V)$ en $C^\infty(V')$ qui seront tous les deux notes aussi par g.

Définition 3.2. Une connexion ∇ sur V s'appelle compatible avec la structure g ou g-compatible si g est absolument paralléle pour la connexion $\mathfrak{D}$ induite sur $\mathfrak{C}(V; V')$ par ∇ et ${}^t\nabla$.

Par suite on a

$$\mathfrak{D}_X g = {}^t\nabla_X \circ g - g \circ \nabla_X = 0 \quad \forall X \in C^\infty(TM) \tag{47}$$

d'où résulte la condition d'intégrabilité

$${}^tR(X, Y) \circ g - g \circ R(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in C^\infty(TM) . \tag{48}$$

Si ∇ et $\overline{\nabla}$ sont deux connexions sur V liées par la relation (17) on a

$$\overline{\mathfrak{D}}_X g = \mathfrak{D}_X g + {}^t\tau_X \circ g - g \circ \tau_X \tag{49}$$

où ${}^t\tau = {}^t\overline{\nabla} - {}^t\nabla$. Par suite, ∇ et $\overline{\nabla}$ sont simultanément g-connexions si et seulement si τ satisfait à la condition

$${}^t\tau_X \circ g - g \circ \tau_X = 0 \quad \forall X \in C^\infty(TM) . \tag{50}$$

Nous avons donc,

Théorème 3.1. *L'ensemble* $\mathfrak{A}_g(V)$ *des connexions sur* V, *compatibles avec une g-structure donnée, est un sous-module affine de* $\mathfrak{A}(V)$ *associé au sous-module linéaire de* $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$ *formé par les éléments* τ *qui satisfont à la condition* (50).

Si la structure g est non singulière, c'est-à-dire g est un isomorphisme de V sur V', alors g^{-1} est une g-structure sur V'. Dans ce cas, on peut considérer l'opérateur $\mathfrak{F}(M)$-linéaire ${}^*O_g$ sur $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$ défini par

$$(51) \qquad {}^*O_g(\tau)_X = \tfrac{1}{2}(\tau_X - g^{-1} \circ {}^t\tau_X \circ g) \quad \forall X \in C^\infty(TM)$$

et à son aide la relation (49) peut s'écrire sous la forme

$$(52) \qquad \overline{\mathfrak{D}}_X g = \mathfrak{D}_X g - 2g \circ {}^*O_g(\tau)_X .$$

On en obtient

Théorème 3.2. *Pour une g-structure non singulière le sous-module affine $\mathfrak{A}_g(V)$ de $\mathfrak{A}(V)$, formé par les connexions compatibles avec la structure g, est associé au sous-module linéaire* Ker ${}^*O_g$ *de* $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$.

Etant données deux connexions ∇^i $(i, j = 1, 2)$ sur V, elles déterminent quatre connexions $\mathfrak{D}^{ij}$ sur $\mathfrak{C}(V; V')$ définies par

$$(53) \qquad \mathfrak{D}^{ij}_X g = {}^t\nabla^i_X \circ g - g \circ \nabla^j_X \quad (i, j = 1, 2), \quad \forall X \in C^\infty(TM), \quad g \in C^\infty(\mathfrak{C}(V, V')) .$$

Définition 3.3. Nous disons que le couple ordonné des connexions (∇^1, ∇^2) sur V est *compatible* avec la structure g donnée sur V si nous avons

$$(54) \qquad \mathfrak{D}^{12}_X g = {}^t\nabla^1_X \circ g - g \circ \nabla^2_X = 0 \quad \forall X \in C^\infty(TM) .$$

Par suite, g est absolument parallèle par rapport à $\mathfrak{D}^{12}$. Nous disons encore dans ce cas que le couple (∇^1, ∇^2) est *g-compatible* ou que ∇^2 est *conjuguée* à ∇^1 par rapport à g. De (54) il résulte la condition d'intégrabilité

$${}^tR^1(X, Y) \circ g - g \circ R^2(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in C^\infty(TM) .$$

En considérant la connexion moyenne ∇^m et le tenseur de déformation τ pour le couple (∇^1, ∇^2), on obtient

$$(55) \qquad \mathfrak{D}^{12}_X g = \mathfrak{D}^m_X g - \tfrac{1}{2}({}^t\tau_X \circ g + g \circ \tau_X), \quad \mathfrak{D}^{21}_X g = \mathfrak{D}^m_X g + \tfrac{1}{2}({}^t\tau_X \circ g + g \circ \tau_X)$$

et par suite,

Théorème 3.3. *Les couples des connexions (∇^1, ∇^2) et (∇^2, ∇^1) sur V sont simultanément compatibles avec la structure g is et seulement si la connexion moyenne et le tenseur de déformation satisfont aux conditions*

$$(56) \qquad \mathfrak{D}^m_X g = 0 , \quad {}^t\tau_X \circ g + g \circ \tau_X = 0 \quad \forall X \in C^\infty(TM) .$$

Pour une g-structure non singulière, en introduissant l'opérateur $\mathfrak{F}(M)$-liniaire O_g sur $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V, V))$ donné par

$$(57) \qquad O_g(\tau)_X = \tfrac{1}{2}(\tau_X + g^{-1} \circ {}^t\tau_X \circ g) \quad \forall X \in C^\infty(TM) ,$$

les relations (55) peuvent s'écrire sous la forme

$$(58)\qquad \mathfrak{D}_X^{12}g = \mathfrak{D}_X^m g - g \circ O_g(\tau)_X, \quad \mathfrak{D}_X^{21}g = \mathfrak{D}_X^m g + g \circ O_g(\tau)_X.$$

Il en résulte

Théorème 3.4. *Les couples* (∇^1, ∇^2) *et* (∇^2, ∇^1) *sont simultanément compatibles à une g-structure non singulière si et seulement si la connexion moyenne et une g-connexion et le tenseur de déformation appartient à* Ker O_g.

Pour ces structures, de la relation (54) il resulte

$$(59)\qquad \nabla_X^2 = g^{-1} \circ {}^t\nabla_X^1 \circ g = \nabla_X^1 + g^{-1} \circ \mathfrak{D}_X^{11} g$$

c'est-à-dire

Théorème 3.5. *Etant données sur V une connexion* ∇^1 *et une g-structure g non singulière, il existe une connexion* ∇^2 *et une seule telle que le couple* (∇^1, ∇^2) *soit compatible à g.*

De (59) on obtient pour la connexion moyenne

$$(60)\qquad \nabla_X^m = \nabla_X^1 + \tfrac{1}{2} g^{-1} \circ \mathfrak{D}_X^{11} g$$

et par suite

$$(61)\qquad \mathfrak{D}_X^m g = \tfrac{1}{2} g^{-1} \circ \mathfrak{D}_X^{11}({}^t g^{-1} \circ g).$$

Il en resulte

Théorème 3.6. *La connexion moyenne d'un couple* (∇^1, ∇^2), *compatible à une g-structure non singulière, est une g-connexion si et seulement si* ∇^1 *est une* ${}^t g^{-1} \circ$ $\circ\, g$*-connexion.*

Pour une g-structure non-singulière, considérons l'opérateur $\Psi_g : \mathfrak{A}(V) \to \mathfrak{A}(V)$ défini par

$$(62)\qquad \Psi_g(\nabla)_X = \nabla_X + \tfrac{1}{2} g^{-1} \circ \mathfrak{D}_X g \quad \forall X \in C^\infty(TM)$$

qui fait correspondre à ∇ la connexion moyenne de ∇ et sa conjuguée par rapport à g. Si $\bar{\nabla}$ est une autre connexion, liée à ∇ par la relation (17), on obtient

$$(63)\qquad \Psi_g(\bar{\nabla}) = \Psi_g(\nabla) + O_g(\tau)$$

c'est-à-dire

Théorème 3.7. *L'opérateur* Ψ_g *défini par* (62) *est une application* $\mathfrak{F}(M)$*-affine sur* $\mathfrak{A}(V)$ *associée à l'application* $\mathfrak{F}(M)$*-linéaire* O_g *sur* $C^\infty(\mathfrak{L}(TM, V; V))$.

La rélation (61) nous conduit à considérer les g-structures particulières données par

Définition 3.4. Une g-structure non singulière sur V s'appelle *presque-metrique* (p.m.) ou *presque-symplectique* (p.s.) lorsqu'elle satisfait respectivement à la condition

$$(64) \qquad {}^tg^{-1} \circ g = I \quad \text{ou} \quad {}^tg^{-1} \circ g = -I$$

qui est équivalente à

$$(65) \qquad g = {}^tg \quad \text{ou} \quad g = -{}^tg\,.$$

Dans ce cas les opérateurs O_g et $*O_g$ satisfont aux conditions

$$(66) \quad O_g^2 = O_g\,, \quad O_g + *O_g = id\,, \quad *O_g^2 = *O_g\,, \quad O_g \circ *O_g = *O_g \circ O_g = 0$$

et par suite

Théorème 3.8. *Pour une g-structure p.m. ou p.s. les opérateurs O_g et $*O_g$ sont des projecteurs supplémentaires de l'$\mathfrak{F}(M)$-module linéaire $C^\infty(\mathfrak{L}(TM, V; V))$.*

Par suite,

$$(67) \qquad \mathrm{Ker}\, O_g = \mathrm{Im}\, *O_g\,, \quad \mathrm{Ker}\, *O_g = \mathrm{Im}\, O_g\,.$$

Pour ces structures nous avons encore de (60) et (62)

$$(68) \qquad \Psi_g(\nabla)_X\, g = \mathfrak{D}_X^m g = 0$$

c'est-à-dire l'image de la connexion ∇ par l'application Ψ_g est une g-connexion. Par un raisonnement analogue avec celui utilisé dans le théorème 2.9 on obtient

Théorème 3.9. *Dans le case d'une g-structure p.m. ou p.s. l'opérateur Ψ_g est la projection du module affine $\mathfrak{A}(V)$ sur le sous-module $\mathfrak{A}_g(V)$, faite parallèlement à la direction définie par* Ker O_g.

Dans ce cas nous avons donc,

$$(69) \qquad \mathfrak{A}_g(V) = \mathrm{Im}\, \Psi_g\,.$$

En considerant encore sur $\mathfrak{A}(V)$ l'opérateur de conjugaison par rapport à g défini par

$$(70) \qquad C_g(\nabla)_X = g^{-1} \circ {}^t\nabla_X \circ g = \nabla_X + g^{-1} \circ \mathfrak{D}_X g \quad \forall X \in C^\infty(TM)$$

on obtient

$$(71) \qquad \Psi_g(\nabla) = \tfrac{1}{2}(\nabla + C_g(\nabla))$$

et par suite

Théorème 3.10. *Pour une g-structure p.m. ou p.s. l'opérateur de conjugaison par rapport à g est la symétrie affine de* $\mathfrak{A}(V)$ *relative au sous-module* $\mathfrak{A}_g(V)$, *faite parallèlement à la direction de* Ker O_g.

Il en résulte que la relation de conjugaison par rapport à g est, dans ce cas, symétrique.

Par des raisonnements analogues avec ceux utilisés dans la démonstration des théorèmes 2.11 et 2.12 on obtient:

Théorème 3.11. *Dans le cas d'une g-structure p.m. ou p.s. l'ensemble* $\mathfrak{A}_g(V)$ *des g-connexions est donné par l'équation*

$$\nabla = \Psi_g(\nabla^\circ) + O_g(\sigma) \tag{72}$$

où ∇° *est une connexion quelconque fixée sur* V *et* σ *est un élément arbitraire de* $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$.

Théorème 3.12. *L'ensemble des couples* (∇^1, ∇^2) *des connexions sur V compatibles à une g-structure p.m. ou p.c. est donné par les équations*

$$\begin{aligned} \nabla^1 &= \Psi_g(\nabla^\circ) + O_g(\sigma) + {}^*O_g(\tau), \\ \nabla^2 &= \Psi_g(\nabla^\circ) + O_g(\sigma) - {}^*O_g(\tau) \end{aligned} \tag{73}$$

où ∇° *est une connexion quelconque fixée de* V *et* σ, τ *sont des éléments arbitraires de* $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$.

4. CONNEXIONS ET COUPLES DES CONNEXIONS COMPATIBLES À UNE (F, g)-STRUCTURE

Définition 4.1. Nous appelons (F, g)-structure sur le f.v.b. V un couple formé par une F et une g-structure. Une (F, g)-structure sera dite non singulière si les structures F et g seront non singulières.

Définition 4.2. Une connexion ∇ sur V sera appelée *compatible* à une (F, g)-structure donnée, ou (F, g)-*compatible*, lorsqu'elle sera dans le même temp une F et une g-connexion, c'est à dire satisfaira aux conditions

$$\nabla_X F = o\,, \quad \nabla_X g = o \quad \forall X \in C^\infty(TM)\,. \tag{74}$$

Par suite, l'ensemble $\mathfrak{A}_{(F,g)}(V)$ des (F, g)-connexions sur V est le sous-module affine de $\mathfrak{A}(V)$ donné par

$$\mathfrak{A}_{(F,g)}(V) = \mathfrak{A}_F(V) \cap \mathfrak{A}_g(V)\,. \tag{75}$$

Si le couple (F, g) est non singulièr, alors les opérateurs Φ_F et Ψ_g étant des applications $\mathfrak{F}(M)$-affines de $\mathfrak{A}(V)$, associées respectivement aux applications $\mathfrak{F}(M)$-linéaires Ω_F et O_g de $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$, il résulte que $\Phi_F \circ \Psi_g$ est une application $\mathfrak{F}(M)$-affine associée à l'application $\mathfrak{F}(M)$-linéaire $\Omega_F \circ O_g$, c'est-à-dire on a

$$\Phi_F \circ \Psi_g(\nabla + \tau) = \Phi_F \circ \Psi_g(\nabla) + \Omega_F \circ O_g(\tau)\,, \tag{76}$$

relation qui s'obtient aussi directement de (34) et (63). Dans ce cas on a encore

$$\Phi_F \circ \Psi_g - \Psi_g \circ \Phi_F = \tfrac{1}{4}(C_F \circ C_g - C_g \circ C_F) \tag{77}$$

et

$$\Omega_F \circ O_g - O_g \circ \Omega_F = {}^*\Omega_F \circ {}^*O_g - {}^*O_g \circ {}^*\Omega_F\,. \tag{78}$$

Il en résulte

Théorème 4.1. *Pour une (F, g)-structure non singulière qui satisfait à la condition*

$$g \circ F = \varepsilon\, {}^tF^{-1} \circ g \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{79}$$

les opérateurs des couples (Φ_F, Ψ_g), (C_F, C_g) sur $\mathfrak{A}(V)$ et (Ω_F, O_g), $({}^*\Omega_F, {}^*O_g)$ sur $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$ sont permutables.

Soit, en particulier, F une structure p.p. ou p.c. et g une structure p.m. ou p.s. Dans ce cas la relation (79) est équivalente à

$$g \circ F = \varepsilon'\, {}^tF \circ g \quad (\varepsilon' = \pm 1) \tag{80}$$

c'est à dire la g-structure $g \circ F$ est p.m. ou p.s. Alors, si ∇ est une (F, g)-connexion il y a les connexions ∇^1 et ∇^2 telles que $\nabla = \Phi_F(\nabla^1) = \Psi_g(\nabla^2)$. En appliquant Φ_F on obtient $\Phi_F(\nabla) = \nabla = \Phi_F \circ \Psi_g(\nabla^2)$, c'est-à-dire $\nabla \in \operatorname{Im}(\Phi_F \circ \Psi_g)$. Réciproquement s'il existe ∇^2 telle que $\nabla = \Phi_F \circ \Psi_g(\nabla^2)$ alors il résulte que ∇ est une (F, g)-connexion. Par suite, on a la relation

$$\mathfrak{A}_{(F,g)}(V) = \operatorname{Im}(\Phi_F \circ \Psi_g)\,. \tag{81}$$

Compte tenu de (76) il résulte

Théorème 4.2. *Pour une (F, g)-structure nonsingulière sur V qui satisfait aux conditions*

$$F^2 = \varepsilon_1 I\,, \quad g = \varepsilon_2\, {}^tg\,, \quad g \circ F = \varepsilon_3\, {}^tF \circ g \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1) \tag{82}$$

l'ensemble $\mathfrak{A}_{(F,g)}(V)$ des (F, g)-connexions est donné par

$$\nabla = \Phi_F \circ \Psi_g(\nabla^\circ) + \Omega_F \circ O_g(\sigma) \tag{83}$$

où ∇° *est une connexion quelconque fixée sur* V *et* σ *set un élément arbitraire de* $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$.

En prenant dans les relations (82) $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = -1$ et g positivement définie, on obtient une structure presque-hermitienne sur V.

Définition 4.3. Nous disons que le couple ordonné des connexions (∇^1, ∇^2) sur V est compatible avec une (F, g)-structure donnée, s'il satisfait aux conditions

$$\mathfrak{D}_X^{12} F = 0\,, \quad \mathfrak{D}_X^{12} g = 0 \quad \forall X \in C^\infty(TM)\,. \tag{84}$$

Pour une (F, g)-structure non singulière sur V, on obtient de théorèmes 2.4 et 3.4 le

Théorème 4.3. *Les couples des connexions* (∇^1, ∇^2) *et* (∇^2, ∇^1) *sont en même temps* (F, g)*-compatibles avec une* (F, g)*-structure non singulière si et seulement si la connexion moyenne est une* (F, g)*-connexion et le tenseur de déformation appartient à* $\operatorname{Ker} {}^*\Omega_F \cap \operatorname{Ker} {}^*O_g$.

Remarquons que, même dans le cas des (F, g)-structures non singulière, pour une connexion ∇^1 donnée, il n'existe pas en général une connexion ∇^2 telle que le couple (∇^1, ∇^2) soit (F, g)-compatible.

Pour ce problème on a le

Théorème 4.4 *Dans le cas d'une* (F, g)*-structure non singulière qui satisfait à la condition* (79), *pour une connexion* ∇^1 *donnée, il y a une connexion* ∇^2 *telle que le couple* (∇^1, ∇^2) *soit* (F, g)*-compatible si et seulement si* ∇^1 *est une* $g \circ F$*-connexion.*

En effet, pour toute (F, g)-structure non-singulière on obtient

$$C_F \circ C_g = C_{g \circ F}\,. \tag{86}$$

Supposons que F et g sont non singulières et satisfont à (79). Dans ce cas pour une connexion ∇^1 il y a une connexion ∇^2 telle que le couple (∇^1, ∇^2) soit (F, g)-compatible si et seulement si $C_F(\nabla^1) = C_g(\nabla^1)$ ce qui, compte tenu de (86), équivaut à $\nabla^1 = C_{g \circ F}(\nabla^1)$, c'est-à-dire au fait que ∇^1 est une $g \circ F$-connexion.

Pour déterminer tous les couples des connexions (∇^1, ∇^2) compatible à une (F, g)-structure non singulière qui vérifie (82), nous établissons la relation

$$\operatorname{Ker} {}^*\Omega_F \cap \operatorname{Ker} {}^*O_g = \operatorname{Im}(\Omega_F \circ O_g)\,. \tag{87}$$

En effet, dans ce cas, $\operatorname{Ker} {}^*\Omega_F = \operatorname{Im} \Omega_F$ et $\operatorname{Ker} {}^*O_g = \operatorname{Im} O_g$ et vue que Ω_F et O_g sont des projecteurs permutables on a aussi

$$\operatorname{Im} \Omega_F \cap \operatorname{Im} O_g = \operatorname{Im}(\Omega_F \circ O_g)$$

c'est-à-dire la relation (87) est vérifiée.

Des théorèmes 2.12, 3.12 et des relations (83), (87) il résulte

Théorème 4.5. *L'ensemble des couples des connexions sur V compatibles avec une (F, g)-structure non singulière qui satisfait aux conditions (82) est donné par les équations*

$$(88) \qquad \begin{aligned} \nabla^1 &= \Phi_F \circ \Psi_g(\nabla^\circ) + \Omega_F \circ O_g(\sigma) + {}^*\Omega_F \circ {}^*O_g(\tau)\,, \\ \nabla^2 &= \Phi_F \circ \Psi_g(\nabla^\circ) + \Omega_F \circ O_g(\sigma) - {}^*\Omega_F \circ {}^*O_g(\tau)\,, \end{aligned}$$

où ∇° *est une connexion quelconque fixée sur* V *et* σ, τ *sont des éléments arbitraires de* $C^\infty(\mathfrak{C}(TM, V; V))$.

Enfin, nous remarquons que, dans le cas $V = TM$ et M de dimension finie, on retrouve beaucoup des resultats des travaux [2, 3, 7, 8, 9].

Bibliographie

[1] *Bourbaki, N.:* Eléments de mathématique. Variétés différentielles et analitiques. Fascicule de résultats. Hermann, Paris.

[2] *Cruceanu, V.* et *Miron, R.:* Sur les couples de connexions compatibles avec les structures presque-complexe. Ann. St. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, Sect. I, *XIII*, 1, 79—88 (1967).

[3] *Cruceanu, V.* et *Miron, R.:* Sur les connexions compatibles a une structure metrique ou presque symplectique. Mathematica, vol. *9* (*32*), 1967, pp. 245—252.

[4] *Cruceanu, V.:* Sur la définition d'une connexion affine. C. R. Acad. Sci. Paris, t. *266*, p. 532—534.

[5] *Cruceanu, V.:* Asupra modulelor afine. St. cerc. mat. t. *21*, nr. 9, p. 1271—1278, Bucuresti 1969.

[6] *Flaschel, P., Klingenberg W.:* Riemannische Hilbertmannigfaltigkeiten. Periodische Geodätische. Lectures Notes in Mathematics, *282*, Springer-Verlag, 1972.

[7] *Norden, A. P.:* Пространства аффиной свиазности. Москва-Ленинград 1950.

[8] *Obata, M.:* Affine connexions on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure. Jap. Journ. Math. *26*, 43—47 (1956).

[9] *Tondeur, Ph.:* Affine Zusammenhänge auf Mannigfattigkeiten mit fast-symplektischer Struktur. Comment. Math. Helv. *36*, 243—244 (1961).

Adresse de l'auteur: Université de Jassy, Jassy, Roumanie.