

Jerzy Muszyński

Поведение решений некоторой смешанной задачи с нелинейными граничными условиями

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), No. 3, 500–508

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101192>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

JERZY MUSZYŃSKI (Ежи Мушинский), Warszawa

(Поступило в редакцию 18/IX 1972)

Рассматривается асимптотическое поведение решений некоторой гиперболической смешанной задачи. Пусть $I = [0, l]$, $T = [0, \infty)$, где l — некоторая положительная постоянная. Предположим, что

П 1. $\alpha[\cdot]$ является оператором из $C^2(I \times T)$ в $C^0(I \times T)$ и что существуют постоянные a, A такие, что для всех $u \in C^2(I \times T)$

$$0 < a \leq \alpha[u](x, t) \leq A.$$

П 2. β является положительной функцией из $C^0(I)$. Поэтому существуют постоянные b, B такие что для всех $x \in I$

$$0 < b \leq \beta(x) \leq B.$$

П 3. $\varphi \in C^2(I)$, $\psi \in C^1(I)$.

П 4. $f, g \in C^1(-\infty, \infty)$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$; для всех $u \in (-\infty, \infty)$ $f'(u) \geq 0$, $g'(u) \geq 0$.

При этих предположениях рассмотрим в начале следующую однородную задачу:

- (1) $u_{tt} + \alpha[u] u_t + \beta u = u_{xx}$,
- (2) $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$,
- (3) $u_x(0, t) - f(u(0, t)) = 0$, $u_x(l, t) + g(u(l, t)) = 0$.

В наших исследованиях ограничимся поведением решения, предполагая что

П 5. Рассматриваемая задача имеет классическое решение из $C^2(I \times T)$.

Вопросы существования решений и их единственности не являются предметом этой статьи.

Теорема 1. Если выполнены предположения П 1–П 5, то решение задачи (1)–(3) ограничено в $I \times T$ и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно для $x \in I$.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ является решением задачи (1)–(3). Рассмотрим вдоль него следующую функцию:

$$(4) \quad \phi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [u_t^2(x, t) + 2\epsilon u_t(x, t) u(x, t) + \beta(x) u^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx + \int_0^{u(0,t)} f(s) ds + \int_0^{u(l,t)} g(s) ds,$$

где ϵ – любая постоянная, такая что

$$(5) \quad 0 < \epsilon < \min \left(\sqrt{b}, \frac{4ab}{A + 4b} \right).$$

Из П 2 вытекает, что

$$(6) \quad u_t^2 + 2\epsilon |u_t| |u| + Bu^2 \geq u_t^2 + 2\epsilon u_t u + \beta u^2 \geq u_t^2 - 2\epsilon |u_t| |u| + bu^2$$

и ввиду (5) выражение $u_t^2 - 2\epsilon |u_t| |u| + bu^2$ является положительно определенной квадратичной формой относительно u_t, u . Из П 4 вытекает, что интегралы $\int_0^u f(s) ds, \int_0^u g(s) ds$ неотрицательны. Отсюда для $t \in T$

$$\phi(t) \geq 0.$$

Из П 5 вытекает, что $\phi(t) \in C^1(T)$. Ввиду (4) ее производная равна

$$(7) \quad \dot{\phi}(t) = \int_0^l [u_t u_{tt} + \epsilon u u_{tt} + \epsilon u_t^2 + \beta u u_t + u_x u_{xt}] dx + f(u(0, t)) u_t(0, t) + g(u(l, t)) u_t(l, t).$$

Здесь для сокращения записи пишем u вместо $u(x, t)$ итд. Так как u является решением уравнения (1), то $u_{tt} = u_{xx} - \alpha u_t - \beta u$ и поэтому из (7) имеем

$$(8) \quad \dot{\phi}(t) = \int_0^l (u_t u_{xx} + u_x u_{xt}) dx + \epsilon \int_0^l u u_{xx} dx - \int_0^l [(\alpha - \epsilon) u_t^2 + \epsilon \alpha u_t u + \epsilon \beta u^2] dx + f(u) u_t|_{x=0} + g(u) u_t|_{x=l}$$

Отсюда

$$(9) \quad \dot{\phi}(t) = u_t u_x|_0^l + \epsilon u u_x|_0^l - \int_0^l \epsilon u_x^2 dx - \int_0^l [(\alpha - \epsilon) u_t^2 + \epsilon \alpha u_t u + \epsilon \beta u^2] dx + f(u) u_t|_{x=0} + g(u) u_t|_{x=l}.$$

Из (3) вытекает, что

$$(10) \quad \begin{aligned} u_t u_x|_0^l + f(u) u_t|_{x=0} + g(u) u_t|_{x=l} = \\ = -g(u) u_t|_{x=l} - f(u) u_t|_{x=0} + f(u) u_t|_{x=0} + g(u) u_t|_{x=l} = 0 \end{aligned}$$

и

$$(11) \quad \varepsilon u u_x|_0^l = \varepsilon(-g(u) u|_{x=l} - f(u) u|_{x=0}).$$

Ввиду этого

$$(12) \quad \begin{aligned} \phi(t) = -\varepsilon(g(u) u|_{x=l} + f(u) u|_{x=0}) - \\ - \int_0^l [(\alpha - \varepsilon) u_t^2 + \varepsilon \chi u_t u + \varepsilon \beta u^2 + \varepsilon u_x^2] dx. \end{aligned}$$

Из П 1, П 2 вытекает, что

$$(13) \quad (\alpha - \varepsilon) u_t^2 + \varepsilon \chi u_t u + \varepsilon \beta u^2 \geq (a - \varepsilon) u_t^2 - \varepsilon A |u_t| |u| + \varepsilon b u^2.$$

Ввиду (5) и П 2 имеем $\varepsilon b > 0$, детерминант квадратичной формы в правой части неравенства равен $\varepsilon^2 A^2 - 4(a - \varepsilon) \varepsilon b = \varepsilon[\varepsilon(A + 4b) - 4ab]$. Учитывая (5) отсюда вытекает, что эта квадратичная форма положительно определена. Поэтому существует такая положительная постоянная k , что

$$(14) \quad (a - \varepsilon) u_t^2 - \varepsilon A |u_t| |u| + \varepsilon b u^2 \geq k(u_t^2 + 2\varepsilon |u_t| |u| + B u^2)$$

и ввиду (6), (13) отсюда получаем

$$(15) \quad (\alpha - \varepsilon) u_t^2 + \varepsilon \chi u_t u + \varepsilon \beta u^2 \geq k(u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2).$$

Очевидно, что постоянная k может быть выбрана достаточно малой, выберём ее так, чтобы

$$(16) \quad k \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^l [(\alpha - \varepsilon) u_t^2 + \varepsilon \chi u_t u + \varepsilon \beta u^2 + \varepsilon u_x^2] dx \geq \\ \geq \int_0^l [k(u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2) + \varepsilon u_x^2] dx \end{aligned}$$

и ввиду (16)

$$(17) \quad \begin{aligned} \int_0^l [(\alpha - \varepsilon) u_t^2 + \varepsilon \chi u_t u + \varepsilon \beta u^2 + \varepsilon u_x^2] dx \geq \\ \geq k \int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2) dx. \end{aligned}$$

Из-за (12), (4) имеем

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{\phi}(t) &\leq -\varepsilon(g(u)u|_{x=l} + f(u)u|_{x=0}) - k \int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2) dx = \\ &= -\varepsilon(g(u)u|_{x=l} + f(u)u|_{x=0}) - \\ &\quad - k \left[2\phi(t) - 2 \int_0^{u(0,t)} f(s) ds - 2 \int_0^{u(l,t)} g(s) ds \right]. \end{aligned}$$

После интегрирования по частям получаем

$$(19) \quad \begin{aligned} \dot{\phi}(t) &\leq -2k \phi(t) - \varepsilon[g(u)u|_{x=l} + f(u)u|_{x=0}] + \\ &\quad + 2k[f(s)s|_0^{u(0,t)} + g(s)s|_0^{u(l,t)}] - 2k \left[\int_0^{u(0,t)} f'(s)s ds + \int_0^{u(l,t)} g'(s)s ds \right] \end{aligned}$$

и

$$(20) \quad \begin{aligned} \dot{\phi}(t) &\leq -2k \phi(t) - (\varepsilon - 2k) [g(u)u|_{x=l} + f(u)u|_{x=0}] - \\ &\quad - 2k \left[\int_0^{u(0,t)} f'(s)s ds + \int_0^{u(l,t)} g'(s)s ds \right]. \end{aligned}$$

Из П 4 вытекает, что $\text{sign } f(u) = \text{sign } u$, $\text{sign } g(u) = \text{sign } u$ и поэтому $f(u)u \geq 0$, $g(u)u \geq 0$, а так как $\varepsilon \geq 2k$, то $(\varepsilon - 2k) [g(u)u|_{x=l} + f(u)u|_{x=0}] \geq 0$. По теореме о среднем для некоторых $\xi, \eta \in (0, u)$

$$(21) \quad \int_0^u f'(s)s ds = f'(\xi) \int_0^u s ds = \frac{1}{2} f'(\xi) u^2; \quad \int_0^u g'(s)s ds = \frac{1}{2} g'(\eta) u^2$$

и ввиду П 4 имеем для любого u

$$(22) \quad \int_0^u f'(s)s ds \geq 0, \quad \int_0^u g'(s)s ds \geq 0.$$

Учитывая предыдущее получаем из (20)

$$(23) \quad \dot{\phi}(t) + 2k \phi(t) \leq 0$$

то есть

$$(24) \quad e^{-2kt} \frac{d}{dt} (\phi e^{2kt}) \leq 0$$

и отсюда

$$\phi(t) e^{2kt} \leq \phi(0)$$

и

$$(25) \quad \phi(t) \leq \phi(0) e^{-2kt}.$$

Как мы показали выше, квадратичные формы в (6) положительно определены, поэтому существует такая положительная постоянная m , что

$$(26) \quad u^2 \leq m(u_t^2 - 2\varepsilon|u_t||u| + bu^2)$$

и учитывая (6)

$$(27) \quad u^2 \leq m(u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2) \leq m(u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2).$$

Аналогично

$$(28) \quad u_x^2 \leq u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2.$$

Интегрируя неравенства (27), (28) по x от 0 до l и учитывая то, что, как это было выше сказано, интегралы $\int_0^u f(s) ds$, $\int_0^u g(s) ds$ неотрицательны, получаем

$$(29) \quad \begin{aligned} \int_0^l u^2 dx &\leq m \int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2) dx \leq \\ &\leq m \int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2) dx + \\ &+ 2m \left(\int_0^{u(0,t)} f(s) ds + \int_0^{u(l,t)} g(s) ds \right) = 2m \phi(t) \end{aligned}$$

и

$$(30) \quad \begin{aligned} \int_0^l u_x^2 dx &\leq \int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2) dx \leq \\ &\leq \int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2) dx + \\ &+ 2 \left(\int_0^{u(0,t)} f(s) ds + \int_0^{u(l,t)} g(s) ds \right) = 2\phi(t). \end{aligned}$$

С учётом (25) отсюда вытекает, что

$$(31) \quad \int_0^l u^2 dx \leq 2m \phi(0) e^{-2kt}, \quad \int_0^l u_x^2 dx \leq 2\phi(0) e^{-2kt}.$$

Применяя неравенство Буняковского-Шварца имеем

$$(32) \quad \left(\int_0^l u dx \right)^2 \leq \int_0^l 1^2 dx \int_0^l u^2 dx = l \int_0^l u^2 dx \leq 2ml \phi(0) e^{-2kt}$$

и для $x \in I$

$$(33) \quad \begin{aligned} (u(x, t) - u(0, t))^2 &= \\ &= \left(\int_0^x u_x(x, t) dx \right)^2 \leq \int_0^x dx \int_0^x u_x^2 dx \leq l \int_0^l u_x^2 dx \leq 2l \phi(0) e^{-2kt}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(34) \quad |u(x, t) - u(0, t)| \leq \sqrt{(2l \phi(0))} e^{-kt}.$$

и

$$(35) \quad \left| \int_0^l u(x, t) dx - lu(0, t) \right| = \left| \int_0^l (u(x, t) - u(0, t)) dx \right| \leq l \sqrt{(2l \phi(0))} e^{-kt}.$$

Так как

$$(36) \quad |u(x, t)| \leq \\ \leq |u(x, t) - u(0, t)| + \frac{1}{l} \left| lu(0, t) - \int_0^l u(x, t) dx \right| + \frac{1}{l} \left| \int_0^l u(x, t) dx \right|$$

то ввиду (34), (35) и (32) получаем

$$(37) \quad |u(x, t)| \leq \sqrt{(2l \phi(0))} e^{-kt} + \sqrt{(2l \phi(0))} e^{-kt} + \frac{1}{l} \sqrt{(2ml \phi(0))} e^{-kt}.$$

Итак, существует положительная постоянная M , не зависящая от x , такая что

$$(38) \quad |u(x, t)| \leq M e^{-kt}$$

где k — некоторая положительная постоянная. Это доказывает теорему.

Для задачи (1)–(3) можно дополнительно доказать следующее:

Теорема 2. В случае выполнения предположений П 1–П 5 тривиальное решение $u(x, t) \equiv 0$ задачи (1)–(3) (при $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$) асимптотически устойчиво.

Здесь приняты следующие определения: решение $u(x, t) \equiv 0$ называется *устойчивым* если для любого $\eta > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|\varphi(x)| \leq \delta$, $|\varphi'(x)| \leq \delta$, $|\psi(x)| \leq \delta$, то решение $v(x, t)$ задачи (1)–(3) с рассматриваемыми $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяет неравенству $|v(x, t)| \leq \eta$ для любых $(x, t) \in I \times T$. Тривиальное решение называется *асимптотически устойчивым* если оно устойчиво и кроме этого (применяя обозначения предыдущего предложения) $v(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любого $x \in I$.

Доказательство. Пусть дано $\eta > 0$, δ определим как положительное решение уравнения

$$(39) \quad \eta^2 l^2 = (2l \sqrt{(2l)} + \sqrt{2(ml)})^2 \left[l \left(1 + \varepsilon + \frac{B}{2} \right) \delta^2 + \int_0^\delta (f(s) + g(s)) ds \right],$$

где ε, m определены в доказательстве теоремы 1. Уравнение (39) имеет такое решение, причем единственное, так как правая сторона его как функция δ при изменении δ от 0 к ∞ монотонно возрастает ($f(s) \geq 0, g(s) \geq 0$ для $s \geq 0$ ввиду П 4) от 0 к ∞ , а левая сторона постоянна.

Если $|\varphi(x)| \leq \delta, |\varphi'(x)| \leq \delta, |\psi(x)| \leq \delta$ то ввиду (37) имеем

$$(40) \quad |u(x, t)| \leq \left(2\sqrt{(2l)} + \frac{1}{l}\sqrt{(2ml)} \right) \sqrt{(\phi(0))} e^{-kt}$$

и ввиду (4) и (2)

$$(41) \quad \begin{aligned} \phi(0) &= \frac{1}{2} \int_0^l [\psi^2 + 2\varepsilon\psi\varphi + \beta\varphi^2 + \varphi'^2] dx + \int_0^{\varphi(0)} f(s) ds + \int_0^{\varphi(1)} g(s) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^l [\delta^2 + 2\varepsilon\delta^2 + B\delta^2 + \delta^2] dx + \int_0^\delta f(s) ds + \int_0^\delta g(s) ds = \\ &= \frac{l}{2} \delta^2 (2 + 2\varepsilon + B) + \int_0^\delta (f(s) + g(s)) ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(42) \quad \begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \\ &\leq \left(2\sqrt{(2l)} + \frac{1}{l}\sqrt{(2ml)} \right) \left[\frac{l}{2} \delta^2 (2 + 2\varepsilon + B) + \int_0^\delta (f(s) + g(s)) ds \right]^{1/2} e^{-kt} \end{aligned}$$

и ввиду (39)

$$(43) \quad |u(x, t)| \leq \eta e^{-kt}$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

Обобщим предыдущие результаты на неоднородную задачу. Пусть

П 6. $\gamma[\cdot]$ является оператором из $C^2(I \times T)$ в $C^0(I \times T)$ и пусть существует некоторая положительная постоянная G такая, что для всех $u \in C^2(I \times T)$

$$|\gamma[u](x, t)| \leq G.$$

Вместо уравнения (1) рассмотрим неоднородное уравнение

$$(1') \quad u_{tt} + \alpha[u] u_t + \beta u = u_{xx} + \gamma[u].$$

Теорема 3. Если выполнены предположения П 1–П 6 то решение задачи (1'), (2), (3) ограничено.

Доказательство. Будем поступать аналогично доказательству теоремы 1, рассматривая функцию $\phi(t)$ по формуле (4). Ее производная в силу уравнения

(1') имеет вид (проводятся здесь те-же преобразования, как и в доказательстве теоремы 1)

$$(44) \quad \begin{aligned} \phi(t) = & -\varepsilon(g(u)|_{x=l} + f(u)|_{x=0}) - \\ & - \int_0^l [(\alpha - \varepsilon)u_t^2 + \varepsilon\alpha u_t u + \varepsilon\beta u^2 + \varepsilon u_x^2] dx + \int_0^l \gamma(u_t + \varepsilon u) dx. \end{aligned}$$

Оценим последний интеграл

$$(45) \quad \int_0^l \gamma(u_t + \varepsilon u) dx \leq G \int_0^l |u_t| dx + G\varepsilon \int_0^l |u| dx.$$

Из неравенства Буняковского-Шварца вытекает, что

$$(46) \quad \left(\int_0^l |u_t| dx \right)^2 \leq \int_0^l dx \int_0^l u_t^2 dx = l \int_0^l u_t^2 dx; \quad \left(\int_0^l |u| dx \right)^2 \leq l \int_0^l u^2 dx.$$

Поэтому

$$(47) \quad \int_0^l \gamma(u_t + \varepsilon u) dx \leq G \sqrt{l} \left(\int_0^l u_t^2 dx \right)^{1/2} + G\varepsilon \sqrt{l} \left(\int_0^l u^2 dx \right)^{1/2}.$$

Рассуждения аналогичные тем, которые проведены в доказательстве теоремы 1 показывают, что существует некоторая постоянная $\bar{m} > 0$, такая что

$$(48) \quad \int_0^l u_t^2 dx \leq 2\bar{m} \phi(t), \quad \int_0^l u^2 dx \leq 2\bar{m} \phi(t)$$

и поэтому

$$(49) \quad \int_0^l \gamma(u_t + \varepsilon u) dx \leq G \sqrt{[2\bar{m}l \phi(t)]} (1 + \varepsilon).$$

Обозначая

$$(50) \quad M = \sqrt{(2\bar{m}l)} (1 + \varepsilon)$$

получаем

$$(51) \quad \int_0^l \gamma(u_t + \varepsilon u) dx \leq MG \sqrt{\phi(t)}.$$

Учитывая выводы из доказательства теоремы 1, находим, что

$$(52) \quad \dot{\phi} \leq -2k \phi(t) + MG \sqrt{\phi(t)}.$$

Рассуждая как в [1] имеем

$$(53) \quad \phi(t) \leq \max \left(\phi(0), \frac{MG}{2k} \right) \stackrel{\text{df}}{=} N^2.$$

Рассуждая аналогично тому как в доказательстве теоремы 1 получаем отсюда неравенство

$$(54) \quad |u(x, t)| \leq N \sqrt{(2l)} + N \sqrt{(2l)} + \frac{1}{l} N \sqrt{(ml)}$$

что заканчивает доказательство.

Литература

- [1] *J. Muszyński*: Badania jakościowe rozwiązań niektórych równań typu hiperbolicznego, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Matematyka, Nr 13, Warszawa 1967, 5—68, стр. 52.

Адрес автора: Politechnika Warszawska, Inst. Matematyki, Pl. Jedności Robotniczej 1, Warszawa, Polska.