Czechoslovak Mathematical Journal

Teo Sturm

Verbände von Kernen isotoner Abbildungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), No. 1, 126–144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101081

Czechoslovak Mathematical Journal, 22 (97) 1972, Praha

VERBÄNDE VON KERNEN ISOTONER ABBILDUNGEN

TEO STURM, Praha

(Eingegangen am 3. September 1970)

Das Ziel dieser Abhandlung ist die Darlegung von Grundlagen der Kerntheorie isotoner Abbildungen und zwar womöglich in Analogie zur Theorie der Kerne von Homomorphismen universaler Algebren. Offenbar ist hier kein geeignetes Äquivalent des Gruppenideals mit Multioperatoren als Grundbegriff zu finden. Unsere Theorie wird daher wesentlich inhaltsärmer, abgesehen davon, dass man isotone Abbildungen nur als „schwache Relationshomomorphismen" betrachten kann.

Die vorliegende Arbeit entstand in einem, von Herrn Doz. JIŘÍ FÁBERA geführten Seminar über Boolesche Algebren. Weitere, an diese Arbeit angeknüpfende Ergebnisse sind zu erwarten.

Bei der Abfassung dieser Abhandlung habe ich von Herrn Prof. MIROSLAV NOVOTNÝ wertvolle Ratschläge erhalten. Ich möchte Herrn Professor Novotný an dieser Stelle meinen herzlichen Dank ausdrücken.

Teiläquivalenzen

1. Symbolik und grundlegende Definitionen. Es wird vorausgesetzt, dass eine nichtleere Menge A und eine zweistellige Relation $\leqq \subseteq A \times A$, die eine Ordnung auf A ist, gegeben sind. Es werden nur zweistellige Relationen in Betracht gezogen. Mit N wird die Menge aller natürlichen Zahlen einschliesslich der Zahl Null bezeichnet.

Ist X eine Menge und ϱ eine Relation, so wird mit (X, ϱ) die Menge X mit der Relation $\varrho \cap (X \times X)$ bezeichnet. Wenn kein Missverständnis droht, schreiben wir einfach ϱ statt $\varrho \cap (X \times X)$. Mit id_X wird die Identität auf X bezeichnet. Sind ϱ, σ Relationen, bezeichnet $\operatorname{dom} \varrho$ den linken Bereich ϱ, $\varrho . \sigma$ die Komposition von ϱ und σ.

Die zu ϱ inverse Relation ϱ^{-1} ist definitionsgemäss $\varrho^{-1} =_{\mathrm{Df}} \{(x, y) \mid (y, x) \in \varrho\}$.

Wir definieren weiterhin:

$$\varrho^0 =_{\mathrm{Df}} \mathrm{id}_{\operatorname{dom} \varrho \cup \operatorname{dom} \varrho^{-1}}, \quad \varrho^{n+1} =_{\mathrm{Df}} \varrho . \varrho^n, \quad n \in N .$$

Mit $B(X)$ bezeichnen wir das System aller Teilmengen von X.

Es seien $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ zwei Mengensysteme. Dann definieren wir

$$\mathscr{A} \Subset \mathscr{B} \Leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \forall Y \in \mathscr{A}\ \exists Z \in \mathscr{B}(Y \subseteq Z) .$$

Die Relation $\Subset$ ist offenbar reflexiv und transitiv, also eine Quasiordnung.

Gegeben sei eine Menge X. Ein Mengensystem $\mathscr{A}$ wird *eine Zerlegung in X* genau dann genannt, wenn $\mathscr{A}$ nicht leer ist, aus paarweise elementfremden Teilmengen der Menge X besteht, und wenn aus $\emptyset \in \mathscr{A}$ folgt $\mathscr{A} = \{\emptyset\}$. Ein Mengensystem $\mathscr{A}$ heisst *eine Zerlegung auf X* genau dann, wenn $\mathscr{A}$ eine Zerlegung in X und $\bigcup\mathscr{A} = X$ ist.

Im Gegensatz zu [2] ist also $\{\emptyset\}$ eine Zerlegung in jeder Menge. Mit $R(X)$ wollen wir die Menge aller Zerlegungen in X, mit $S(X)$ die Menge aller Zerlegungen auf X bezeichnen. Die Relation $\Subset$ auf $R(X)$ ist die wohlbekannte Relation „ist Verfeinerung von“ und für jedes $\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \subseteq R(X)$ ist $(\mathfrak{A}, \Subset)$ eine geordnete Menge (s. [2], Kap. 2).

2. Hilfssatz. *Es seien α, β, γ Relationen, $\alpha \subseteq \beta$, $n \in N$. Dann gilt $(\gamma \, . \, \alpha)^n \subseteq$ $\subseteq (\gamma \, . \, \beta)^n$.*

Beweis. Für $n = 0$ ist die Behauptung offenbar richtig.

Es sei also $(\gamma \, . \, \alpha)^m \subseteq (\gamma \, . \, \beta)^m$ und $(x, y) \in (\gamma \, . \, \alpha)^{m+1}$ für $m \in N$. Dann existieren s, t derart, dass $(x, s) \in (\gamma \, . \, \alpha)^m \subseteq (\gamma \, . \, \beta)^m$, $(s, y) \in \gamma \, . \, \alpha$, $(s, t) \in \gamma$, $(t, y) \in \alpha \subseteq \beta$. Es ist also $(s, y) \in \gamma \, . \, \beta$, woraus $(x, y) \in (\gamma \, . \, \beta)^{m+1}$ folgt.

3. Definition. Die Relation ϱ heisst *Teiläquivalenz in A*, (kurz: *Äquivalenz in A*) genau dann, wenn $\varrho \subseteq A \times A$ und wenn ϱ symmetrisch und transitiv in A ist. Die Relation ϱ heisst *Äquivalenz auf A* genau dann, wenn ϱ Äquivalenz in A ist und $\operatorname{dom} \varrho = A$.

Die Menge aller Teiläquivalenzen in A wollen wir mit $D(A)$, die Menge aller Äquivalenzen auf A mit $E(A)$ bezeichnen.

4. Bemerkung. Es sei $\varrho \in D(A)$. Dann:

a) Ist $x \in \operatorname{dom} \varrho$, setzen wir $A(x, \varrho) =_{\mathrm{Df}} \{y \mid y \in A,\ (x, y) \in \varrho\}$. Ist $\operatorname{dom} \varrho \neq \emptyset$, setzen wir $A/\varrho =_{\mathrm{Df}} \{A(x, \varrho) \mid x \in \operatorname{dom} \varrho\}$. Ist $\operatorname{dom} \varrho = \emptyset$, setzen wir $A/\varrho =_{\mathrm{Df}} \{\emptyset\}$.

b) Ist $x, y \in \operatorname{dom} \varrho \subseteq A$, $(x, y) \in \varrho$, so ist $(y, x) \in \varrho$ (Symmetrie), also auch (x, x), $(y, y) \in \varrho$ (Transitivität). Die Teiläquivalenz ist daher eine reflexive Relation auf $\operatorname{dom} \varrho$ und aus der Symmetrie folgt $\operatorname{dom} \varrho = \operatorname{dom} \varrho^{-1}$; ϱ ist eine Äquivalenz auf $\operatorname{dom} \varrho$. Nach [2], Kap. I, § 9.3 ist also A/ϱ für $\varrho \neq \emptyset$ eine Zerlegung in A und eine Zerlegung auf $\operatorname{dom} \varrho$. Für $\varrho = \emptyset$ ist $A/\varrho = \{\emptyset\}$ ebenfalls eine Zerlegung in A (s. Nr. 1).

Das Mengensystem A/ϱ kann also als eine durch die Teiläquivalenz ϱ erzeugte Zerlegung in A betrachtet werden; s. auch Hilfssatz der Nr. 10.

c) $E(A) \subseteq D(A) \subseteq B(A \times A)$; $(B(A \times A), \subseteq)$ ist eine geordnete Menge, also auch $D(A)$ und $E(A)$ sind $\subseteq$-geordnete Mengen.

5. Hilfssatz. *Es sei* $\emptyset \neq \mathfrak{M} \subseteq D(A)$. *Dann gilt*

$$\inf_{(D(A),\subseteq)} \mathfrak{M} = \bigcap \mathfrak{M} \in D(A)\,.$$

Beweis. Offenbar ist $\alpha =_{\mathrm{Df}} \bigcap \mathfrak{M} \subseteq A \times A$. Aus $(x, y) \in \alpha$ folgt $(x, y) \in \varrho$ für jedes $\varrho \in \mathfrak{M}$, also auch $(y, x) \in \varrho$ (Symmetrie), d. h. $(y, x) \in \alpha$. Ebenso einfach kann die Transitivität von α bewiesen werden. Die Beziehung $\alpha = \inf_{(D(A),\subseteq)} \mathfrak{M}$ ist evident.

6. Hilfssatz. *Es sei* $\mathfrak{M} \subseteq D(A)$. *Dann gilt*

$$\sup_{(D(A),\subseteq)} \mathfrak{M} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\varrho_1 \ldots \varrho_n \mid \varrho_1, \ldots, \varrho_n \in \mathfrak{M}\} \in D(A)\,.$$

Beweis. Offensichtlich ist $\alpha =_{\mathrm{Df}} \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\varrho_1 \ldots \varrho_n \mid \varrho_1, \ldots, \varrho_n \in \mathfrak{M}\} \subseteq A \times A$. Ist $(x, y) \in \alpha$, so existieren $\varrho_1, \ldots, \varrho_n \in \mathfrak{M}$ derart, dass $(x, y) \in \varrho_1 \ldots \varrho_n$ ist. Es gibt also $t_0, \ldots, t_n \in A$, $t_0 = x$, $t_n = y$, $(t_i, t_{i+1}) \in \varrho_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. Es ist $(t_{i+1}, t_i) \in \in \varrho_{i+1}$ (Symmetrie von ϱ_{i+1}), also $(y, x) \in (\varrho_n \ldots \varrho_1) \subseteq \alpha$. Die Relation α ist daher symmetrisch in A. Es sei

$$(x, y) \in (\varrho_1 \ldots \varrho_m) \subseteq \alpha\,, \quad (y, z) \in (\varrho_{m+1} \ldots \varrho_{m+n}) \subseteq \alpha\,, \quad \varrho_1, \ldots, \varrho_{m+n} \in \mathfrak{M}\,.$$

Dann ist $(x, z) \in (\varrho_1 \ldots \varrho_m) \cdot (\varrho_{m+1} \ldots \varrho_{m+n}) \in \alpha$, also α ist eine transitive Relation in A, woraus $\alpha \in D(A)$ folgt.

Nun sei $\varrho \subseteq \tau \in D(A)$ für jedes $\varrho \in \mathfrak{M}$. Aus $\varrho_1, \ldots, \varrho_n \in \mathfrak{M}$ folgt dann $\varrho_1 \ldots \varrho_n \subseteq \subseteq \tau^n \subseteq \tau$ (Transitivität von τ) und nach Definition von α gilt dann $\alpha \subseteq \tau$. Offenbar ist $\varrho \subseteq \alpha$ für jedes $\varrho \in \mathfrak{M}$, also $\alpha = \sup_{(D(A),\subseteq)} \mathfrak{M}$.

7. Hilfssatz. *Es sei* $\mathfrak{M} \subseteq D(A)$ *und* $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ *sei eine Kette. Dann ist* $\sup_{(D(A),\subseteq)} \mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{M}$.

Beweis. Angenommen $(x, y) \in \alpha =_{\mathrm{Df}} \bigcup \mathfrak{M}$. Dann existiert $\varrho \in \mathfrak{M}$ mit $(x, y) \in \varrho$, also $(y, x) \in \varrho \subseteq \alpha$ (Symmetrie von ϱ). Es sei $(x, y) \in \alpha$, $(y, z) \in \alpha$, dann existieren $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathfrak{M}$ derart, dass $(x, y) \in \varrho_1$, $(y, z) \in \varrho_2$ ist. Ist $\varrho_1 \subseteq \varrho_2$, ist auch $(x, y) \in \varrho_2$, woraus (Transitivität von ϱ_2) $(x, z) \in \varrho_2 \subseteq \alpha$ folgt. Auf dieselbe Weise wird die Transitivität im Falle $\varrho_2 \subseteq \varrho_1$ nachgewiesen. ϱ_1, ϱ_2 sind $\subseteq$-vergleichbar, da $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ eine

Kette ist. Also ist $\alpha \in D(A)$. Für jedes $\varrho \in \mathfrak{M}$ ist $\varrho \subseteq \alpha$, deshalb $\sup\limits_{(D(A),\subseteq)} \mathfrak{M} \subseteq \alpha$. Die Beziehung $\alpha \subseteq \sup\limits_{(D(A),\subseteq)} \mathfrak{M}$ folgt aus dem Hilfssatz der Nr. 6.

8. Hilfssatz. *Aus* $\emptyset \neq \mathfrak{M} \subseteq E(A)$ *folgt* $\bigcap\mathfrak{M} \in E(A)$. *Aus* $\varrho \in E(A)$, $\varrho \subseteq \sigma$, $\sigma \in D(A)$ *folgt* $\sigma \in E(A)$.

Beweis. Nach Hilfssatz der Nr. 5 ist $\bigcap\mathfrak{M} \in D(A)$. Ist $x \in A$, so gilt $(x, x) \in \mathrm{id}_A \subseteq \varrho$ für jedes $\varrho \in \mathfrak{M}$ und deshalb $(x, x) \in \bigcap\mathfrak{M}$, d. h. $\operatorname{dom} \bigcap\mathfrak{M} = A$.

Aus $x \in A$ folgt $(x, x) \in \varrho \subseteq \sigma$, d. h. $\operatorname{dom} \sigma = A$.

8′. Korollar. $E(A) = \{\varrho \mid \varrho \in D(A), \mathrm{id}_A \subseteq \varrho\}$.

9. Satz. $(D(A), \subseteq)$ *ist ein vollständiger Verband, in dem* $E(A)$ *ein Hauptfilter ist.*

Beweis folgt aus der Tatsache, dass $A \times A$ das grösste Element in $(D(A), \subseteq)$ ist, und aus den Nrn. 5, 8, 8′.

10. Hilfssatz. *Das Mengensystem* $\mathscr{A}$ *ist eine Zerlegung in* A *(auf* A*) genau dann, wenn es ein* $\varrho \in D(A)$ $(\varrho \in E(A))$ *derart gibt, dass* $A/\varrho = \mathscr{A}$ *ist. Ist* $\varrho, \sigma \in D(A)$, *gilt* $\varrho \subseteq \sigma$ *genau dann, wenn* $A/\varrho \Subset A/\sigma$, *und* $\varrho \neq \sigma$ *genau dann, wenn* $A/\varrho \neq A/\sigma$.

Beweis. $\mathscr{A}$ sei eine Zerlegung in A. Dann definieren wir: $(x, y) \in \varrho_{\mathscr{A}}$ genau dann, wenn $x, y \in A$ und wenn es eine $X \in \mathscr{A}$ mit $x, y \in X$ gibt. Offenbar ist $\varrho_{\mathscr{A}} \in D(A)$ und $\mathscr{A} = A/\varrho_{\mathscr{A}}$. Ist $\mathscr{A}$ eine Zerlegung auf A so ist $\varrho_{\mathscr{A}} \in D(A)$ und $\mathrm{id}_A \subseteq \varrho_{\mathscr{A}}$, d. h. $\varrho_{\mathscr{A}} \in E(A)$ (Hilfssatz der Nr. 8). Ist $\varrho \in D(A)$, ist A/ϱ eine Zerlegung auf $\operatorname{dom} \varrho$ (für den Fall $\varrho \neq \emptyset$ siehe [2], § 9.3; $\varrho = \emptyset$ genau dann, wenn $A/\varrho = \{\emptyset\}$).

Ist $\varrho, \sigma \in D(A)$ und $\varrho \subseteq \sigma$, gilt $A(x, \varrho) \subseteq A(x, \sigma)$ für jedes $x \in \operatorname{dom} \varrho$ (s. Nr. 4a), d. h. $A/\varrho \Subset A/\sigma$. Ist umgekehrt $A/\varrho \Subset A/\sigma$ und $(x, y) \in \varrho$, so gilt $y \in A(x, \varrho) \subseteq A(x, \sigma)$, also $(x, y) \in \sigma$, d. h. $\varrho \subseteq \sigma$.

Die letzte Behauptung folgt aus der vorletzten und daraus, dass $(R(A), \Subset)$ eine geordnete Menge ist.

11. Bemerkung. Durch den Hilfssatz 10 wird ein vollständiger Parallelismus in Untersuchungen von $(D(A), \subseteq)$ und $(R(A), \Subset)$, bzw. $(E(A), \subseteq)$ und $(S(A)\ \Subset)$ festgesetzt. Wir ziehen daher für Untersuchungen je nach Bedarf entweder die Theorie der Teiläquivalenzen oder die Theorie der Zerlegungen in Mengen heran, ohne die bezüglichen "isomorphen" Sätzen zu formulieren. So kann z. B. der Satz 9 folgendermassen umgeformt werden:

9_1. Satz. $(R(A), \Subset)$ *ist ein vollständiger Verband, in dem* $S(A)$ *ein Hauptfilter ist.*

12. Hilfssatz. *Es sei* $\varrho \in D(A)$. *Wir definieren*

$$\leqq_\varrho =_{\mathrm{Df}} \bigcup_{n=0}^{+\infty} \varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^n .$$

Dann ist $\varrho \subseteq \leqq_\varrho$, $\operatorname{dom} \varrho = \operatorname{dom} \leqq_\varrho = \operatorname{dom} (\leqq_\varrho)^{-1}$ *und* $\leqq_\varrho$ *ist eine Quasiordnung auf* $\operatorname{dom} \varrho$.

Beweis. Es ist $(\leqq \cdot \varrho)^0 \supseteq \mathrm{id}_{\operatorname{dom} \varrho}$, daher $\varrho \subseteq \varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^0 \subseteq \leqq_\varrho$, also auch $\operatorname{dom} \varrho \subseteq \subseteq \operatorname{dom} \leqq_\varrho$. Ist $x \in \operatorname{dom} \leqq_\varrho$, so existiert $n \in N$ und $y \in A$ derart, dass $(x, y) \in \varrho \,.\, (\leqq \cdot \varrho)^n$ ist, woraus $x \in \operatorname{dom} \varrho$ folgt. Also $\operatorname{dom} \varrho = \operatorname{dom} \leqq_\varrho$. Analogisch wird $\operatorname{dom} \varrho = \operatorname{dom} (\leqq_\varrho)^{-1}$ bewiesen. Es ist nämlich $(\leqq_\varrho)^{-1} = \bigcup_{n \in N} (\leqq \cdot \varrho)^{-n} \cdot \varrho^{-1}$ und $\varrho^{-1} = \varrho$, $(\leqq \cdot \varrho)^{-n} = (\varrho^{-1} \cdot \leqq^{-1})^n = (\varrho \cdot \leqq^{-1})^n$. ϱ ist reflexiv auf $\operatorname{dom} \varrho$, $\varrho \subseteq \leqq_\varrho$, also auch $\leqq_\varrho$ ist reflexiv auf $\operatorname{dom} \varrho = \operatorname{dom} \leqq_\varrho$. Es sei $(x, y), (y, z) \in \leqq_\varrho$. Dann existieren $m, n \in N$, so dass $(x, y) \in \varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^m$, $(y, z) \in \varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^n$ ist, woraus $(x, z) \in \varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^m \cdot \varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^n$ folgt. Ist $m = 0$, so ist

$$\varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^0 \cdot \varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^n = \varrho^2 \cdot (\leqq \cdot \varrho)^n \subseteq \varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^n \subseteq \leqq_\varrho .$$

Ist $m \neq 0$, gilt

$$\varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^m \cdot \varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^n =$$
$$= \varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^{m-1} \cdot (\leqq \cdot \varrho^2) \cdot (\leqq \cdot \varrho)^n \subseteq \varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^{m+n} \subseteq \leqq_\varrho .$$

13. Hilfssatz. *Es sei* $\varrho, \sigma \in D(A)$, $\varrho \subseteq \sigma$. *Dann ist* $\leqq_\varrho \subseteq \leqq_\sigma$.

Beweis. Es gilt $(\leqq \cdot \varrho)^n \subseteq (\leqq \cdot \sigma)^n$ für jedes $n \in N$ (s. Nr. 2), also $\varrho \cdot (\leqq \cdot \varrho)^n \subseteq \subseteq \sigma \cdot (\leqq \cdot \sigma)^n$, d. h. $\leqq_\varrho \subseteq \leqq_\sigma$.

14. Hilfssatz. *Für* $\varrho \in D(A)$ *sei definitionsgemäss* $\equiv_\varrho =_{\mathrm{Df}} \leqq_\varrho \cap (\leqq_\varrho)^{-1}$. *Dann gilt* $\equiv_\varrho \in D(A)$, $\operatorname{dom} \equiv_\varrho = \operatorname{dom} \varrho$, $\varrho \subseteq \equiv_\varrho$. *Ist* $\varrho, \sigma \in D(A)$, $\varrho \subseteq \sigma$, *so ist* $\equiv_\varrho \subseteq \equiv_\sigma$.

Beweis. $\equiv_\varrho \in D(A)$ folgt aus dem bekannten Satz über die durch Quasiordnungen induzierten Äquivalenzen (s. [1], § 4, Kap. I., S. 21 der russischen Übersetzung). Nach Nr. 12 ist $\operatorname{dom} \varrho = \operatorname{dom} \equiv_\varrho$ und $\varrho \subseteq \leqq_\varrho$. Aus $\varrho = \varrho^{-1} = \mathrm{id}_{\operatorname{dom} \varrho} \cdot \varrho^{-1} = (\leqq \cdot \varrho)^0 \cdot \varrho^{-1} \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\leqq \cdot \varrho)^{-n} \cdot \varrho^{-1} = (\leqq_\varrho)^{-1}$ folgt $\varrho \subseteq (\leqq_\varrho)^{-1}$, also $\varrho \subseteq \equiv_\varrho$. Die Behauptung $\equiv_\varrho \subseteq \equiv_\sigma$ folgt aus der Definition von $\equiv$ und aus Nr. 13.

15. Hilfssatz. *Es sei* $\varrho \in D(A)$, $x, x', y, y' \in \operatorname{dom} \varrho$, $(x, x') \in \varrho$, $(y, y') \in \varrho$, $(x, y) \in \leqq_\varrho$. *Dann ist* $(x', y') \in \leqq_\varrho$.

Beweis. Es gibt ein $n \in N$ derart, dass $(x, y) \in \varrho \,.\, (\leqq \,.\, \varrho)^n$ ist. Für $n = 0$ ergibt sich $(x', y') \in \varrho \subseteq \leqq_\varrho$. Ist $n \neq 0$, gilt $(x', y') \in \varrho \,.\, (\varrho \,.\, (\leqq \,.\, \varrho)^n) \,.\, \varrho = \varrho^2 \,.\, (\leqq \,.\, \varrho)^{n-1} \,.\, (\leqq \,.\, \varrho^2) \subseteq \varrho \,.\, (\leqq \,.\, \varrho)^n \subseteq \leqq_\varrho$.

16. Hilfssatz. *Es sei $\varrho \in D(A)$ und $X, Y \in A/\varrho$. Weiter sei definitionsgemäss $(X, Y) \in \leqq_{A/\varrho} \Leftrightarrow_{\mathrm{Df}} X = Y = \emptyset$, oder $(x, y) \in \leqq_\varrho$ für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$. Dann ist $\leqq_{A/\varrho}$ eine Quasiordnung auf A/ϱ.*

Beweis. Im Falle $\varrho = \emptyset$ ist $A/\varrho = \{\emptyset\}$ und die Behauptung ist evident.

Wir betrachten nun den Fall $\varrho \neq \emptyset$. Für jedes $X \in A/\varrho$ ist dann $X \neq \emptyset$, also nach Nr. 15 ist $\leqq_{A/\varrho}$ reflexiv. Es sei $X, Y, Z \in A/\varrho$, $(X, Y), (Y, Z) \in \leqq_{A/\varrho}$. Für alle $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ gilt dann $(x, y) \in \leqq_\varrho$, $(y, z) \in \leqq_\varrho$, also $(x, z) \in \leqq_\varrho$ ($\leqq_\varrho$ ist transitiv). Dann ist allerdings $(X, Z) \in \leqq_{A/\varrho}$.

17. Bemerkung. Wir definieren: Für $X, Y \in B(A)$ sei $(X, Y) \in {}^\bullet\!\leqq$ genau dann, wenn entweder $X = Y = \emptyset$ ist, oder wenn $x \in X$ und $y \in Y$ mit $(x, y) \in \leqq$ existiert. Die Relation ${}^\bullet\!\leqq$ ist offensichtlich reflexiv auf $B(A)$. Wir wählen ein $\mathscr{A} \in R(A)$. Dann gibt es (s. Nr. 10) genau eine Äquivalenz $\varrho \in D(A)$ mit $\mathscr{A} = A/\varrho$. Das Symbol $\lessapprox_{\mathscr{A}}$ oder $\lessapprox_{A/\varrho}$ soll die $\subseteq$-kleinste transitive Hülle der Relation ${}^\bullet\!\leqq \cap (\mathscr{A} \times \mathscr{A})$ in $\mathscr{A}$ bezeichnen. Definitionsgemäss ist $\lessapprox_{\mathscr{A}}$ eine Quasiordnung auf $\mathscr{A}$. Es gilt

$$\lessapprox_{A/\varrho} = \leqq_{A/\varrho} \,.$$

Nach Nr. 16 ist nämlich ${}^\bullet\!\leqq \cap (\mathscr{A} \times \mathscr{A}) \subseteq \leqq_{A/\varrho}$, also auch $\lessapprox_{A/\varrho} \subseteq \leqq_{A/\varrho}$ ($\lessapprox_{A/\varrho}$ ist die $\subseteq$-kleinste transitive Hülle der Relation ${}^\bullet\!\leqq \cap (\mathscr{A} \times \mathscr{A})$ in $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} = A/\varrho$).

Aus $(X, Y) \in \leqq_{A/\varrho}$ folgt erstens $X, Y \in A/\varrho$ und zweitens, dass $(x, y) \in \leqq_\varrho$ für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$ gilt. Dann gibt es ein $n \in N$ derart, dass $(x, y) \in \varrho \,.\, (\leqq \,.\, \varrho)^n$ ist. Es existieren also $X_0, \dots, X_n \in A/\varrho$, $X_0 = X$, $X_n = Y$, $t_0, t_1 \in X_0, \dots, t_{2n}, t_{2n+1} \in X_n$, $x = t_0$, $y = t_{2n+1}$, $(t_0, t_1) \in \varrho, \dots, (t_{2n}, t_{2n+1}) \in \varrho$, $(t_1, t_2) \in \leqq, \dots, (t_{2n-1}, t_{2n}) \in \leqq$ (sofern t_2, t_{2n-1} sinnvoll sind). Es ist also $(X_0, X_1), \dots, (X_{n-1}, X_n) \in {}^\bullet\!\leqq$ (sofern X_1, X_{n-1} sinnvoll sind). Daher ist $(X, Y) = (X_0, X_n) \in \lessapprox_{A/\varrho}$. Somit ist die Behauptung $\lessapprox_{A/\varrho} = \leqq_{A/\varrho}$ bewiesen.

18. Definition. Die Relation $\varrho \in D(A)$ heisst eine *$\leqq$-schwach faktorisierende Äquivalenz in A* (kurz: *$\leqq$ sf-Äquivalenz*) genau dann, wenn $\varrho = \equiv_\varrho$ ist.

Die Menge aller $\leqq$ sf-Äquivalenzen in A bezeichnen wir mit $F(A, \leqq)$. Wir definieren weiter: $G(A, \leqq) =_{\mathrm{Df}} F(A, \leqq) \cap E(A)$.

19. Satz. Ist $\varrho \in D(A)$, so ist $\varrho \in F(A, \leqq)$ genau dann, wenn $(A/\varrho, \leqq_{A/\varrho})$ eine geordnete Menge ist.

Beweis. Erstens sei $\varrho = \emptyset$. Dann ist $A/\varrho = \{\emptyset\}$, $\leqq_{A/\varrho} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ und der Satz gilt. Zweitens setzen wir $\varrho \neq \emptyset$ voraus. Ist $\varrho \in F(A, \leqq)$, so ist $\varrho = \equiv_\varrho = \leqq_\varrho \cap$

$\cap (\leqq_\varrho)^{-1}$. Ist also $(X, Y), (Y, X) \in \leqq_{A/\varrho}$, so gilt $(x, y) \in \leqq_\varrho \cap (\leqq_\varrho)^{-1} = \equiv_\varrho = \varrho$ für alle $x, y,\ x \in X,\ y \in Y$. Es ist also $X = Y$ und die Quasiordnung $\leqq_{A/\varrho}$ ist auf A/ϱ antisymmetrisch.

Umgekehrt sei $\leqq_{A/\varrho}$ eine Ordnung auf A/ϱ und $(x, y) \in \equiv_\varrho$. Dann ist $(x, y) \in \leqq_\varrho \cap (\leqq_\varrho)^{-1}$. Ist $x, x' \in X \in A/\varrho,\ y, y' \in Y \in A/\varrho$, so folgt aus dem Hilfssatz der Nr. 15 $(x', y') \in \equiv_\varrho$, d. h. $(X, Y) \in \leqq_{A/\varrho} \cap (\leqq_{A/\varrho})^{-1} = \mathrm{id}_{A/\varrho}$. Es ist also $X = Y$, d. h. $(x, y) \in \varrho$. Somit haben wir $\equiv_\varrho \subseteq \varrho$ bewiesen. Ziehen wir noch die Nr. 14 heran, gelangen wir sofort zu $\equiv_\varrho = \varrho$, also zu $\varrho \in F(A, \leqq)$.

Der Verband schwach faktorisierender Äquivalenzen

20. Satz. *Es sei $\emptyset \neq \mathfrak{M} \subseteq F(A, \leqq)$. Dann ist*

$$\inf_{(F(A, \leqq), \subseteq)} \mathfrak{M} = \bigcap \mathfrak{M} \in F(A, \leqq)\,.$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{M} \subseteq F(A, \leqq) \subseteq D(A)$, woraus nach Hilfssatz der Nr. 5 $\alpha =_{\mathrm{Df}} \bigcap \mathfrak{M} \in D(A)$ folgt. Nach Nr. 14 ist $\alpha \subseteq \equiv_\alpha$. Es sei $(x, y) \in \equiv_\alpha$, d. h. $(x, y), (y, x) \in \leqq_\alpha$. Dann existiert $n \in N$ derart, dass $(x, y) \in \alpha \,.\, (\leqq \,.\, \alpha)^n$ ist. Für jedes $\varrho \in \mathfrak{M}$ gilt $\alpha \subseteq \varrho$. Nach Hilfssatz der Nr. 2 ist also $(x, y) \in \varrho \,.\, (\leqq \,.\, \varrho)^n$, d. h. $(x, y) \in \leqq_\varrho$. Auf ähnliche Weise schliessen wir, dass für jedes $\varrho \in \mathfrak{M}$ aus $(y, x) \in \leqq_\alpha$ folgt $(y, x) \in \leqq_\varrho$. Für jedes $\varrho \in \mathfrak{M}$ ist daher $(x, y) \in \equiv_\varrho = \varrho$, also $\equiv_\alpha \subseteq \bigcap_{\varrho \in \mathfrak{M}} \varrho = \alpha$.

21. Satz. *$(F(A, \leqq), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband und $G(A, \leqq) = \{\varrho \mid \varrho \in F(A, \leqq),\ \mathrm{id}_A \subseteq \varrho\}$ ist der Hauptfilter dieses Verbandes.*

Beweis. $A \times A$ ist offensichtlich das grösste Element in $(F(A, \leqq), \subseteq)$ denn $A/(A \times A) = \{A\}$ und $\leqq_{\{A\}}$ ist eine triviale Ordnung auf $\{A\}$. Das System $(F(A, \leqq), \subseteq)$ ist nach Satz der Nr. 20 ein vollständiger Verband.

Die Identität id_A auf A ist offensichtlich eine $\leqq$sf-Äquivalenz auf A, und weiterhin ist sie das kleinste Element in $(G(A, \leqq), \subseteq)$. Folglich ist $G(A, \leqq) = \{\varrho \mid \varrho \in F(A, \leqq),\ \mathrm{id}_A \subseteq \varrho\}$ ein Hauptfilter in $(F(A, \leqq), \subseteq)$.

22. Satz. *Es sei $\mathfrak{M} \subseteq F(A, \leqq)$ und $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ eine Kette. Dann ist*

$$\sup_{(F(A, \leqq), \subseteq)} \mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{M} \in F(A, \leqq)\,.$$

Beweis. Auf Grund Nr. 7 genügt es zu beweisen, dass $\alpha =_{\mathrm{Df}} \bigcup \mathfrak{M}$ eine $\leqq$sf-Äquivalenz in A, d. h., dass $\equiv_\alpha \subseteq \alpha$ ist.

Es sei $(x, y) \in \equiv_\alpha$, d. h. $(x, y), (y, x) \in \leqq_\alpha$. Dann existieren $m \in N$, $x = t_0, z_0, t_1, z_1, \ldots, t_m, z_m,\ t_{m+1} = y$ derart, dass $(t_i, z_i) \in \alpha,\ (z_i, t_{i+1}) \in \leqq,\ i = 0, 1, \ldots, m$ gilt. Es existieren also solche $\varrho_i \in \mathfrak{M}$, für die $(t_i, z_i) \in \varrho_i$ ist. Es sei β das $\subseteq$-grösste

Element in $\{\varrho_0, \ldots, \varrho_m\}$. Es ist $\beta \in \mathfrak{M}$. Dann gilt $(t_i, z_i) \in \beta$, $(z_i, t_{i+1}) \in \leqq$, woraus $(x, y) \in \beta . (\leqq . \beta)^m \subseteq \leqq_\beta$. Nehmen wir nun $(y, x) \in \leqq_\alpha$ in Betracht, gelangen wir auf ähnliche Weise zu $(y, x) \in \leqq_\gamma$, $\gamma \in \mathfrak{M}$. Es sei δ das $\subseteq$-grösste Element in $\{\beta, \gamma\}$. Dann ist $\delta \in \mathfrak{M}$ und $(x, y) \in \leqq_\delta \cap (\leqq_\delta)^{-1} = \equiv_\delta = \delta \subseteq \alpha$, also $\equiv_\alpha \subseteq \alpha$.

22'. Korollar. *$F(A, \leqq)$ ist ein algebraisches System abgeschlossener Elemente im vollständigen Verband $(D(A), \subseteq)$ und die Abbildung*

$$\equiv : D(A) \to F(A, \leqq) \subseteq D(A)$$

ist die algebraische Hüllenoperation.

Insbesondere aus $\varrho \in D(A)$ folgt $\equiv_\varrho = \equiv_{\equiv_\varrho}$.

Beweis. $F(A, \leqq)$ ist ein System abgeschlossener Elemente in $(D(A), \subseteq)$, nach Satz der Nr. 20, und Satz der Nr. 22 ist $F(A, \leqq)$ ein algebraisches System. Die Abbildung $\equiv : D(A) \to F(A, \leqq)$ ist eine dem System $F(A, \leqq)$ entsprechende Hüllenoperation. Für $\varrho \in D(A)$ (s. oben und [3] S. 55–60) ist $\equiv_\varrho = \equiv_{\equiv_\varrho}$.

23. Hilfssatz. *Es sei $\sigma \in F(A, \leqq)$, $B \in A/\sigma$, $\varrho \in F(B, \leqq)$. Weiter sei definitionsgemäss $\alpha =_{\mathrm{Df}} \sigma \cap ((A - B) \times (A - B))$ und $\tau =_{\mathrm{Df}} \alpha \cup \varrho$. Dann gilt $\tau \in F(A, \leqq)$ und $\alpha \in F(A - B, \leqq)$.*

Beweis. Die Relation $(\alpha \cup \varrho) \in D(A)$ folgt aus $\alpha, \varrho \in D(A)$ und aus $\mathrm{dom}\, \alpha \cap \cap\, \mathrm{dom}\, \varrho = \emptyset : (\alpha \cup \varrho)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \varrho^{-1} = \alpha \cup \varrho$, $(\alpha \cup \varrho) . (\alpha \cup \varrho) = (\alpha . \alpha) \cup \cup (\varrho . \alpha) \cup (\alpha . \varrho) \cup (\varrho . \varrho) = (\alpha . \alpha) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (\varrho . \varrho) \subseteq \alpha \cup \varrho = \tau$. Die Relation τ ist somit symmetrisch und transitiv und offenbar gilt $\tau \subseteq A \times A$.

Für $\alpha = \emptyset$ oder $\varrho = \emptyset$ ist die Behauptung evident. Es sei also $\alpha \neq \emptyset$, $\varrho \neq \emptyset$. Die kleinste transitive Hülle β der Relation $^\bullet\!\leqq \cap ((A/\sigma - \{B\}) \times (A/\sigma - \{B\}))$ auf $A/\sigma - \{B\}$ ist eine Teilmenge von $\leqq_{A/\sigma}$ (s. Nr. 17), also antisymmetrisch. $(A/\sigma - \{B\}, \beta)$ ist daher eine geordnete Menge. Auf Grund der Wahl von α ist $A/\alpha = A/\sigma - \{B\}$ somit also $\alpha \in F(A - B, \leqq)$. Nach Voraussetzung ist auch die Menge $(B/\varrho, \leqq_{B/\varrho})$ geordnet und aus $\mathrm{dom}\, \alpha \cap \mathrm{dom}\, \varrho = \emptyset$ folgt $\leqq_{A/(\alpha \cup \varrho)} = \leqq_{A/\alpha} \cup \leqq_{A/\varrho}$, $\leqq_{A/\varrho} \cap \cap \leqq_{A/\varrho} = \mathrm{dom} \leqq_{A/\varrho}^{\pm 1} \cap \mathrm{dom} \leqq_{A/\alpha} = \mathrm{dom} \leqq_{A/\varrho}^{\pm 1} \cap \mathrm{dom} \leqq_{A/\alpha}^{-1} = \emptyset$. Hieraus ergibt sich, dass $\leqq_{A/(\alpha \cup \varrho)}$ eine Ordnung auf $A/\tau = A/\alpha \cup A/\varrho$ ist, also nach Satz der Nr. 19 gilt $\tau \in F(A, \leqq)$.

24. Hilfssatz. *Es sei $\varrho \in F(A, \leqq)$ und* card $A/\varrho \geqq 2$. *Dann existiert ein $\sigma \in F(A, \leqq)$ so, dass* $\mathrm{dom}\, \varrho = \mathrm{dom}\, \sigma$, $\varrho \subseteq \sigma$ *und* card $A/\sigma = 2$ *ist.*

Beweis. $b, c \in \mathrm{dom}\, \varrho$ seien so gewählt, dass $(b, c) \notin \varrho$. Es sei weiter $(c, b) \notin \leqq_\varrho$. Dann setzen wir $B = \{x \mid x \in \mathrm{dom}\, \varrho,\ (x, b) \in \leqq_\varrho\}$, $C = \mathrm{dom}\, \varrho - B$. Es ist $b \in B$, $c \in C$, also $B \neq \emptyset \neq C$, $B \cup C = \mathrm{dom}\, \varrho \subseteq A$. Es sei σ diejenige Äquivalenz in A, für die $\{B, C\} = A/\sigma$ gilt. Es ist $\mathrm{dom}\, \sigma = B \cup C = \mathrm{dom}\, \varrho$ und card $A/\sigma = 2$.

Wir beweisen nun $\varrho \subseteq \sigma$ indirekt. Ist $x, y \in \operatorname{dom} \varrho$, $(x, y) \notin \sigma$, so sei $x \in B$ und $y \in C$, also $(x, b) \in \leqq_\varrho$. Ist $(x, y) \in \varrho$, so ist $(y, x) \in \varrho \subseteq \leqq_\varrho$, also $(y, b) \in \leqq_\varrho$, d. h. $y \in B$, was ein Widerspruch ist.

Es sei $\equiv_\sigma \neq \sigma$. Dann gilt $A/\equiv_\sigma = \{\operatorname{dom} \sigma\}$, also $(c, b) \in \equiv_\sigma$ und es existiert $n \in N$, so dass $(c, b) \in \sigma . (\leqq . \sigma)^n$. Dies hat aber die Existenz von Elementen $x \in C$, $y \in B$, für die $(x, y) \in \leqq$, zur Folge. Es gilt also $(x, y) \in \varrho . (\leqq . \varrho) \subseteq \leqq_\varrho$. Hieraus und aus $y \in B$ erhalten wir $(x, b) \in \leqq_\varrho$, d. h. $x \in B$ und deshalb sind die Mengen B, C inzident. Dieser Widerspruch impliziert $\equiv_\sigma = \sigma$ also $\sigma \in F(A, \leqq)$.

25. Symbolik. Es sei (x, σ) eine geordnete Menge. Dann bezeichnen wir mit $|\sigma$ eine Überdeckungsrelation in (X, σ), d. h. für $x, y \in X$ definieren wir: $(x, y) \in |\sigma$ genau dann, wenn $(x, y) \in \sigma$, $x \neq y$ und wenn kein $z \in X$ gibt, für welches gleichzeitig $(x, z) \in \sigma$, $(z, y) \in \sigma$, $x \neq z \neq y$ gelten würde.

26. Satz. *Es sei $\varrho, \sigma \in G(A, \leqq)$. Dann ist $(\varrho, \sigma) \in |\subseteq$ in $(G(A, \leqq), \subseteq)$ genau dann, wenn $\varrho \subseteq \sigma$ und* card $(A/\varrho - A/\sigma) = 2$ *ist.*

Beweis. Es sei $\varrho \subseteq \sigma$ und card $(A/\varrho - A/\sigma) = 2$. Dann ist nach [9], S. 163 $(\varrho, \sigma) \in |\subseteq$ in $(E(A), \subseteq)$, also erst recht $(\varrho, \sigma) \in |\subseteq$ in $(G(A, \leqq), \subseteq)$.

Umgekehrt sei $(\varrho, \sigma) \in |\subseteq$ in $(G(A, \leqq), \subseteq)$. Dann ist $\varrho \subseteq \sigma$ und es existiert $B \in \in \mathscr{B} =_{\mathrm{Df}} A/\sigma - A/\varrho$. Wir definieren $\alpha =_{\mathrm{Df}} \sigma \cap ((A - B) \times (A - B))$, $\beta =_{\mathrm{Df}} \varrho \cap \cap (B \times B)$. Nach Satz Nr. 19 ist $\beta \in G(B, \leqq)$ und nach Wahl von B ist card $B/\varrho = =$ card $B/\beta \geqq 2$. Nach Hilfssatz der Nr. 24 gibt es ein $\gamma \in G(B, \leqq)$ mit $\beta \subseteq \gamma$ und card $B/\gamma = 2$. Nach Hilfssatz der Nr. 23 ist $\tau =_{\mathrm{Df}} (\alpha \cup \gamma) \in G(A, \leqq)$, hinsichtlich der Wahl von τ ist $\tau \subset \sigma$ und card $(A/\tau - A/\sigma) =$ card $B/\gamma = 2$. Es ist $B \in A/\sigma$, $\varrho \subseteq \sigma$, also $\varrho = \varrho \cap (((A - B) \times (A - B)) \cup (B \times B))$. Ferner gilt $\varrho \cap ((A - B) \times \times (A - B)) \subseteq \alpha$, $\varrho \cap (B \times B) = \beta \subseteq \gamma$, d. h. $\varrho \subseteq \tau$. Aus der Voraussetzung $(\varrho, \sigma) \in |\subseteq$ in $(G(A, \leqq), \subseteq)$ folgt dann $\varrho = \tau$.

27. Korollar. *Ist $\varrho, \sigma \in G(A, \leqq)$, so ist $(\varrho, \sigma) \in |\subseteq$ in $(G(A, \leqq), \subseteq)$ genau dann, wenn $(\varrho, \sigma) \in |\subseteq$ in $(E(A), \subseteq)$ ist.*

Beweis. Folgt direkt aus Satz der Nr. 26 und aus [9], S. 163.

28. Hilfssatz. *Es sei $\varrho, \sigma \in G(A, \leqq)$, $\varrho \subset \sigma$. Dann existiert $\chi \in G(A, \leqq)$ mit $\varrho \subseteq \chi$ und $(\chi, \sigma) \in |\subseteq$ in $(G(A, \leqq), \subseteq)$.*

Der Beweis ist dem Beweis der Notwendigkeit in Satz der Nr. 26 ganz analogisch. Die Konstruktion von τ war nur von der Voraussetzung $\varrho \subset \sigma$ abhängig. Wir wählen also dann $\chi = \tau$, wofür $\varrho \subseteq \tau$, $(\tau, \sigma) \in |\subseteq$ in $(G(A, \leqq), \subseteq)$, ist.

29. Satz. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine maximale Kette in $(G(A, \leqq), \subseteq)$. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine maximale Kette in $(E(A), \subseteq)$.*

Beweis. Es sei $\alpha \in E(A)$ und $\varrho \subseteq \alpha$ oder $\alpha \subseteq \varrho$ für jedes $\varrho \in \mathfrak{A}$. Wir setzen $\mathfrak{A}_1(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \{\varrho \mid \varrho \in \mathfrak{A},\ \varrho \subseteq \alpha\}$, $\mathfrak{A}_2(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \{\varrho \mid \varrho \in \mathfrak{A},\ \alpha \subseteq \varrho\}$, $\beta =_{\mathrm{Df}} \sup\limits_{(F(A,\leqq),\subseteq)} \mathfrak{A}_1(\alpha)$, $\gamma =_{\mathrm{Df}} \inf\limits_{(F(A,\leqq),\subseteq)} \mathfrak{A}_2(\alpha)$. Es ist $\mathrm{id}_A \in \mathfrak{A}_1(\alpha)$, also $(\mathfrak{A}_1(\alpha), \subseteq)$ ist eine nichtleere Kette in $(G(A, \leqq), \subseteq)$. Demnach ist nach Satz der Nr. 22 $\beta = \bigcup \mathfrak{A}_1(\alpha) \in G(A, \leqq)$. Nach Definition von $\mathfrak{A}_1(\alpha)$ ist ferner $\beta \in \mathfrak{A}_1(\alpha)$, denn $\beta \subseteq \alpha$ und $(\mathfrak{A} \cup \{\beta\}, \subseteq)$ ist eine Kette. Ähnlich, mit Berücksichtigung des Satzes Nr. 20, kann nachgewiesen werden, dass $\alpha \subseteq \gamma \in \mathfrak{A}_2(\alpha)$ ist. Offenbar ist $\beta \subseteq \gamma$. Ist $\gamma \neq \alpha$, so existiert nach Hilfssatz der Nr. 28 ein $\delta \in G(A, \leqq)$ mit $\beta \subseteq \delta$ und $(\delta, \gamma) \in |\subseteq$ in $(G(A, \leqq), \subseteq)$. Wegen der Maximalität der Kette $\mathfrak{A}$ in $(G(A, \leqq), \subseteq)$ ist $\delta \in \mathfrak{A}$ und aus $\delta \subset \gamma$ folgt $\delta \in \mathfrak{A}_1(\alpha)$, d. h. $\delta \subseteq \alpha$. Nach Korollar der Nr. 27 und wegen den Eigenschaften von δ ist dann $\alpha = \delta \in \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A}$ ist eine maximale Kette in $(E(A), \subseteq)$.

30. Hilfssatz. *Die geordnete Menge (X, σ) sei ein vollständiger Verband, in dem zu beliebigen zwei $x, y \in X$, $x \neq y$, $(x, y) \in \sigma$ ein $z = z(x, y) \in X$ mit $(x, z) \in |\sigma$ in (X, σ) und $(z, y) \in \sigma$ existiert. Es sei $a, b \in X$, $(a, b) \in \sigma$. Dann gibt es in*

$$\langle a, b\rangle =_{\mathrm{Df}} \{x \mid x \in X,\ (a, x) \in \sigma,\ (x, b) \in \sigma\}$$

eine $\subseteq$-maximale σ-wohlgeordnete Kette.

Beweis. Für $a = b$ ist die Behauptung offenbar richtig. Es sei denn $a \neq b$. Es sei λ die erste aller Ordnungszahlen ξ, für die $\mathrm{card}\,\langle a, b\rangle < \aleph_\xi$ ist. Wir setzen $c_0 = a$. Es sei η eine Ordnungszahl und $\eta < \omega_\lambda$. Wir setzen nun voraus, dass für jede Ordnungszahl ξ, $\xi < \eta$ das Element c_ξ definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $c_\xi \in \langle a, b\rangle$; $c_\xi \neq b$; für $\xi_1 < \xi_2 < \eta$ ist $(c_{\xi_1}, c_{\xi_2}) \in \sigma$ und $c_{\xi_1} \neq c_{\xi_2}$; $(C_\eta, \sigma) =_{\mathrm{Df}} (\{c_\xi \mid \xi < \eta\}, \sigma)$ ist eine wohlgeordnete Kette und für $\zeta, \zeta < \eta$ ist $(C_\zeta \cup \{c_\zeta\}, \sigma)$ eine $\subseteq$-maximale Kette in $(\langle c_0, c_\zeta\rangle, \sigma)$.

Ist η eine Limeszahl, so setzen wir $c_\eta = \sup\limits_{(X,\sigma)} C_\eta$. Ist $\eta = \zeta + 1$, so wählen wir c_η so, dass $(c_\zeta, c_\eta) \in |\sigma$ in (X, σ) und $(c_\eta, b) \in \sigma$. Aus der Definition der Ordnungszahl λ folgt, dass eine Ordnungszahl ν, $\nu < \omega_\lambda$, für die $c_\nu = b$, existiert. Aus der Konstruktion folgt, dass $(Y, \sigma) =_{\mathrm{Df}} (\{c_\xi \mid \xi < \nu + 1\}, \sigma)$ die Bedingungen (a) erfüllt mit der einzigen Ausnahme $c_\nu = b$; insbesondere ist (Y, σ) eine σ-wohlgeordnete Kette in $\langle a, b\rangle$.

Es sei $d \in \langle a, b\rangle$ ein mit allen $x \in Y$ σ-vergleichbares Element. Mit $\eta(d)$ wollen wir die erste aller Ordnungszahlen ξ, $\xi < \nu + 1$, für die $(d, c_\xi) \in \sigma$ ist, bezeichnen. Wegen $(d, b) \in \sigma$ und $b = c_\nu$ ist $\eta(d) < \nu + 1$ tatsächlich definiert. Ist $\eta(d)$ eine Limeszahl, so gilt $d = c_{\eta(d)} \in Y$; für jedes $\xi < \eta(d)$ ist nämlich $(c_\xi, d) \in \sigma$, $(d, c_{\eta(d)}) \in \sigma$ und $c_{\eta(d)} = \sup\limits_{(X,\sigma)} C_{\eta(d)}$, also auch $(c_{\eta(d)}, d) \in \sigma$. Ist $\eta(d) = \zeta + 1$, so ist $(c_\zeta, c_{\zeta(d)}) \in |\sigma$ in (X, σ), $(c_\zeta, d) \in \sigma$, $(d, c_{\eta(d)}) \in \sigma$, also wiederum $d = c_{\eta(d)} \in Y$. Ist $\eta(d) = 0$, so ist

$d = a = c_0 \in Y$. Somit haben wir also bewiesen, dass (Y, σ) eine $\subseteq$-maximale und σ-wohlgeordnete Kette in $(\langle a, b\rangle, \sigma)$ bildet.

31. Hilfssatz. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz der Nr.* 30 *erfüllt. Ferner sei $Y \subseteq X$ und (Y, σ) sei eine wohlgeordnete Menge. Dann existiert eine wohlgeordnete Menge (Z, σ) mit $Y \subseteq Z \subseteq X$, die eine maximale Kette in (X, σ) bildet.*

Beweis. Gemäss Voraussetzung ((Y, σ) ist wohlgeordnet) kann aus den Elementen von Y eine σ-zunehmende Folge $(x_{\xi+1})_{\xi+1<\lambda}$ gebildet werden, wobei mit λ und ξ Ordnungszahlen bezeichnet wurden. Ist $\eta, \eta < \lambda + 1$ eine Limeszahl, setzen wir $x_\eta = \sup_{(X,\sigma)} \{x_{\xi+1} \mid \xi + 1 < \lambda\}$ und wählen $x_0 = \inf_{(X,\sigma)} X$. Ist λ eine isolierte Ordnungszahl[1]), setzen wir $x_\lambda = x_{\lambda+1} = \sup_{(X,\sigma)} X$; im Falle, dass λ eine Limeszahl ist, wählen wir $x_\lambda = \sup_{(X,\sigma)} X$. Aus jeder der Mengen $\langle x_\xi, x_{\xi+1}\rangle$ $(\xi < \lambda + 1)$ wählen wir (s. Hilfssatz der Nr. 30) eine in $(\langle x_\xi, x_{\xi+1}\rangle, \sigma)$ $\subseteq$-maximale wohlgeordnete Menge (Z_ξ, σ). Als (Z, σ) wählen wir alsdann die Ordnungssumme $\left(\sum_{\xi<\lambda+1} (Z_\xi - \{x_{\xi+1}\}, \sigma)\right) \oplus (\{x_{\lambda+1}\}, \sigma)$ mit $\{x_{\lambda+1}\} =_{\mathrm{Df}} \emptyset$ falls $x_{\lambda+1}$ nicht definiert ist (d. h. falls λ eine Limeszahl ist).

32. Satz. *Es sei $\mathfrak{A} \subseteq G(A, \leqq)$. Ferner sei $(\mathfrak{A}, \supseteq)$ eine wohlgeordnete Menge. Dann existiert $\mathfrak{M} \subseteq G(A, \leqq)$ derart, dass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ und $(\mathfrak{M}, \supseteq)$ eine wohlgeordnete in $(G(A, \leqq), \supseteq)$ maximale Kette ist.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus Nr. 28 und 31.

33. Korollar. *Der vollständige Verband $(G(A, \leqq), \subseteq)$ ist $\downarrow$-atomar.*

34. Bemerkung. Weiter wird die Problematik der maximalen Ketten in $(G(A, \leqq), \subseteq)$ nicht erläutert, obwohl die erreichten Ergebnisse bei weitem nicht als endgültig betrachtet werden können. Es wurde z. B. die Frage der Mächtigkeit und des Ordnungstypus maximaler Ketten ganz beiseite gelassen. Ist z. B. $A = R$ die gewöhnlich geordnete Menge aller reellen Zahlen, existieren maximale Ketten sowohl von der Mächtigkeit des Kontinuums, als auch der Mächtigkeit $\aleph_0$. Als Ordnungszahlen $\supseteq$-wohlgeordneter maximaler Ketten können alle ξ, $\omega_0 \leqq \xi < \omega_1$ auftreten u. ä. Einfach steht die Frage im Falle endlicher Mengen. Ist nämlich A eine endliche Menge, sind alle maximalen Kett enin $(G(A, \leqq), \subseteq)$ isoton isomorph. Dies folgt aus Satz der Nr. 29 und aus den evidenten Eigenschaften von $(S(A), \Subset)$, die man leicht aus den in [9], S. 163 angeführten Ergebnissen herleiten kann.

[1]) d. h. die Ordnungszahl λ ist keine Limeszahl.

35. Definition. Es sei $B \subseteq A$ und $X \subseteq B$. Die Menge X heisst *konvex in* $(B, \leqq)$ genau dann, wenn für zwei beliebige $x, y \in X$, $(x, y) \in \leqq$ die Beziehung $\langle x, y \rangle \cap \cap B \subseteq X$ gilt. Die Zerlegung $\mathscr{A}$ in A nennen wir *konvex in* $(B, \leqq)$ genau dann, wenn jede $X \in \mathscr{A}$ eine konvexe Menge in $(B, \leqq)$ ist. Die Äquivalenz $\varrho \in D(A)$ wird *konvex* in $(B, \leqq)$ genau dann genannt, wenn A/ϱ eine konvexe Zerlegung in $(B, \leqq)$ ist. Die Menge aller in $(B, \leqq)$ konvexen ϱ, $\varrho \in D(A)$ wollen wir mit $K(B, \leqq)$ bezeichnen. Ist $B = A$, sprechen wir einfach von der „*Menge aller konvexen* $\varrho \in D(A)$", statt von der „Menge aller in $(B, \leqq)$ konvexen $\varrho \in D(A)$."

36. Satz. *Es sei* $\sigma \in F(A, \leqq)$. *Dann ist* $\sigma \in K(\text{dom } \sigma, \leqq)$.

Beweis. Es sei $(a, b) \in \sigma \cap \leqq$, $x \in \text{dom } \sigma$, $(a, x) \in \leqq$, $(x, b) \in \leqq$. Dann ist $(a, x) \in \in \sigma . (\leqq . \sigma) \subseteq \leqq_\sigma$. Es ist $(b, a) \in \sigma$, daher $(x, a) \in \sigma . (\leqq . \sigma) \subseteq \leqq_\sigma$, also $(x, a) \in \in \leqq_\sigma \cap (\leqq_\sigma)^{-1} = \equiv_\sigma = \sigma$. Der Satz ist somit bewiesen.

37. Bemerkung. Die Konvexität tritt in dieser Abhandlung nur als Hilfsbegriff auf. Die folgenden Behauptungen werden deshalb ohne Beweis aufgestellt. Übrigens sind die Beweise einfach. Vorausgesetzt wird $B \subseteq A$.

a) Es sei $X \subseteq B$. Dann definieren wir als *konvexe Hülle* $k_B(X)$ der Menge X in $(B, \leqq)$ die Menge genau derjenigen $z \in B$, für die zwei $x, y \in X$ derart existieren, dass $(x, z) \in \leqq$ und $(z, y) \in \leqq$ ist. Wir bezeichnen $k(X) =_{\text{Df}} k_A(X)$.

Die Menge $k_B(X)$ ist konvex in $(B, \leqq)$. Die Menge X ist konvex in $(B, \leqq)$ genau dann, wenn $X = k_B(X)$ ist.

b) Es sei $\mathscr{B}$ ein nicht leeres System von in $(B, \leqq)$ konvexen Mengen. Dann ist $\bigcap \mathscr{B}$ eine in $(B, \leqq)$ konvexe Menge. Ist $X \subseteq B$, so ist $k_B(X) = \bigcap\{Y \mid X \subseteq Y \subseteq B, Y \text{ konvex in } (B, \leqq)\}$.

c) Die geordnete Menge $(K(B, \leqq), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband. (Wir nehmen b) und die Tatsache, dass B konvex in $(B, \leqq)$ ist, in Betracht).

d) Es sei $\sigma \in D(B)$, dann existiert $k_B(\sigma) =_{\text{Df}} \inf\limits_{(K(B, \leqq), \subseteq)} \{\varrho \mid \varrho \in K(B, \leqq), \sigma \subseteq \varrho\}$. Wir bezeichnen $k(\sigma) =_{\text{Df}} k_A(\sigma)$. Es ist $k_B(\sigma) \in K(B, \leqq)$.

38. Hilfssatz. *Es sei* $\varrho \in F(A, \leqq)$. *Dann ist* $A/k(\varrho) = \{k(X) \mid X \in A/\varrho\}$ *und für* $X, Y \in A/\varrho$, $X \neq Y$ *gilt* $k(X) \neq k(Y)$.

Beweis. Es sei $X, Y \in A/\varrho$. Gibt es ein $z \in k(X) \cap k(Y)$, so existieren $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ derart, dass $(x_1, z), (z, x_2), (y_1, z), (z, y_2) \in \leqq$ und $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \varrho$ sind. Dann ist $(x_1, y_2), (y_1, x_2) \in \leqq$, d. h. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \varrho . (\leqq . \varrho) \subseteq \leqq_\varrho$. Ebenso zeigen wir, dass $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (\leqq_\varrho)^{-1}$ und daher $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \in \equiv_\varrho = \varrho$, d. h. $X = Y$ ist. Hieraus folgt, dass $\mathscr{S} = \{k(X) \mid X \in A/\varrho\}$ ein disjunktes System, das eine Zerlegung in A ist. Es ist nämlich $X \subseteq k(X) \subseteq A$ für jedes $X \in A/\varrho$. Zugleich ist nachgewiesen, dass aus $X, Y \in A/\varrho$, $X \neq Y$ folgt $k(X) \neq k(Y)$.

Ist $\sigma \in D(A)$ und $\mathscr{S} = A/\sigma$, so ist nach Nr. 37a $\sigma \in K(A, \leqq)$. Für jedes $\tau \in K(A, \leqq)$, $\varrho \subseteq \tau$ ist nach Nr. 37b $\mathscr{S} \Subset A/\tau$, d. h. $\sigma \subseteq \tau$, also $\sigma = k(\varrho)$.

39. Hilfssatz. *Es sei $\varrho \in F(A, \leqq)$. Dann ist $k(\varrho) \in F(A, \leqq)$.*

Beweis. Es sei $(x, y) \in \equiv_{k(\varrho)}$. Dann gibt es zwei $m, n \in N$ derart, dass $(x, y) \in \in k(\varrho) . (\leqq . k(\varrho))^m$, $(y, x) \in k(\varrho) . (\leqq . k(\varrho))^n$ gilt. Es existieren also $x_0, x_1, \ldots, x_{2m+1}, x_{2m+2}, y_0, y_1, \ldots, y_{2n+1}, y_{2n+2} \in \operatorname{dom} k(\varrho)$ derart, dass $x_0 = x = y_{2n+2}$, $y_0 = y = = x_{2m+1} = x_{2m+2}$ ist, und für jedes $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ und jedes $j = 1, 2, \ldots, n$ $(x_{2i}, x_{2i+1}), (y_{2j}, y_{2j+1}) \in k(\varrho)$, $(x_{2i+1}, x_{2i+2}), (y_{2j+1}, y_{2j+2}) \in \leqq$, gilt.

Nach Definition von $k(\varrho)$ und nach Hilfssatz der Nr. 38 existieren solche $a_i, b_i, c_i, d_i \in \operatorname{dom} \varrho$, dass (a_i, b_i), (b_i, c_i), $(c_i, d_i) \in \varrho$ und (a_i, x_{2i}), (x_{2i}, b_i), (c_i, x_{2i+1}), $(x_{2i+1}, d_i) \in \leqq$ gilt.

Es ist $(x_{2i+1}, x_{2i+2}) \in \leqq$, woraus $(c_i, b_{i+1}) \in \leqq$ für $i \neq m$ folgt. Es ist also z. B. $(c_0, c_1) \in \leqq . \varrho$ und durch Induktion ist leicht nachzuweisen, dass $(c_0, c_i) \in (\leqq . \varrho)^i$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ ist. Insbesondere ist $(c_0, c_m) \in (\leqq . \varrho)^m$.

Aus denselben Gründen existieren $a'_j, b'_j, c'_j, d'_j \in \operatorname{dom} \varrho$ mit (a'_j, b'_j), (b'_j, c'_j), $(c'_j, d'_j) \in \varrho$ und (a'_j, y_{2j}), (y_{2j}, b_j), (c'_j, y_{2j+1}), $(y_{2j+1}, d'_j) \in \leqq$.

Ähnlich dem vorigen Verfahren beweisen wir $(c'_0, c'_n) \in (\leqq . \varrho)^n$. Es ist $x_0 = x = = y_{2n+1}$, $y_0 = y = x_{2m+1}$, also (c'_0, c_m), $(c_0, c'_n) \in \varrho$, woraus $(c_m, c_0) \in \varrho . (\leqq . \varrho)^m \subseteq \subseteq \leqq_\varrho$ folgt. Es ist also $(c_0, c_m) \in \equiv_\varrho = \varrho$, womit auch (a_0, a_m), (b_0, b_m), (c_0, c_m), $(d_0, d_m) \in \varrho$ nachgewiesen ist. Es ist (a_0, x), (x, b_0), (c_m, y), $(y, d_m) \in \leqq$, also $(x, y) \in \in k(\varrho)$. Es gilt daher $k(\varrho) = \equiv_{k(\varrho)}$, d. h. $k(\varrho) \in F(A, \leqq)$.

40. Hilfssatz. *Es sei $\varrho \in F(A, \leqq)$. Dann ist $\varrho \subseteq k(\varrho)$ und für $x, y \in \operatorname{dom} \varrho$ ist $(x, y) \in \varrho$ genau dann, wenn $(x, y) \in k(\varrho)$ ist.*

Beweis. Für jedes $X \in A/\varrho$ ist $X \subseteq k(X)$ (s. Nr. 37a, b). Dies und Hilfssatz der Nr. 38 liefert die zu beweisende Behauptung.

41. Hilfssatz. *Es sei $\varrho \in F(A, \leqq)$; weiter sei definitionsgemäss $\bar{\varrho} =_{\mathrm{Df}} k(\varrho) \cup \cup \operatorname{id}_{A\text{-}\operatorname{dom} k(\varrho)}$. Dann gilt $\varrho \subseteq \bar{\varrho}$, $\bar{\varrho} \in G(A, \leqq)$ und für $x, y \in \operatorname{dom} \varrho$ ist $(x, y) \in \varrho$ genau dann, wenn $(x, y) \in \bar{\varrho}$ ist.*

Beweis. Offenbar ist $\operatorname{dom} \bar{\varrho} = \operatorname{dom} k(\varrho) \cup (A - \operatorname{dom} k(\varrho)) = A$ und $(\bar{\varrho})^{-1} = = (k(\varrho))^{-1} \cup (\operatorname{id}_{A\text{-}\operatorname{dom} k(\varrho)})^{-1} = \bar{\varrho}$, $\bar{\varrho}$ ist also eine symmetrische Relation. Die Mengen $k(\varrho)$ und $\operatorname{id}_{A\text{-}\operatorname{dom} k(\varrho)}$ sind elementenfremde Äquivalenzen, daher ist $\bar{\varrho} . \bar{\varrho} = (k(\varrho) \cup \cup \operatorname{id}_{A\text{-}\operatorname{dom} k(\varrho)})^2 = (k(\varrho))^2 \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (\operatorname{id}_{A\text{-}\operatorname{dom} k(\varrho)})^2 \subseteq k(\varrho) \cup \operatorname{id}_{A\text{-}\operatorname{dom} k(\varrho)} = \bar{\varrho}$, $\bar{\varrho}$ ist also eine transitive Relation. Hieraus folgt $\bar{\varrho} \in E(A)$.

Es sei $m \in N$ und $X_0, \ldots, X_{m+2} \in A/\bar{\varrho}$. Ferner sei $(X_i, X_{i+1}) \in {}^{\bullet}\!\leqq$, $(X_{m+2}, X_0) \in {}^{\bullet}\!\leqq$, $i = 0, \ldots, m + 1$. Aus $X_0, \ldots, X_{m+2}$ greifen wir die Teilfolge genau derjenigen Glieder $Y_1, \ldots, Y_n$, die in $A/k(\varrho)$ liegen, heraus. Aus der Form der Elemente von

$A/\mathrm{id}_{A\text{-}\mathrm{dom}\,k(\varrho)}$, aus der Definition von $^{\bullet}\leqq$, aus der Tatsache, dass $\leqq_{A/k(\varrho)} = \lessapprox_{A/k(\varrho)}$ (s. Nr. 17) ist, folgt nach Nr. 39 und 19, dass $\leqq_{A/k(\varrho)}$ eine Ordnung darstellt und deswegen gilt $Y_0 = \ldots = Y_n$. Dies hat $X_0 = \ldots = X_{m+2}$ zur Folge, also $(A/k(\varrho), \leqq_{A/k(\varrho)})$ ist eine geordnete Menge. Nach Satz der Nr. 19 ist alsdann $\bar{\varrho} \in G(A, \leqq)$.

Die Richtigkeit der letzten Behauptung des Hilfssatzes folgt unmittelbar aus der Definition von $\bar{\varrho}$ und aus Hilfssatz der Nr. 40. Aus derselben Definition und aus der Nr. 37d folgt $\varrho \subseteq \bar{\varrho}$.

42. Symbolik. Es sei $\varrho \in F(A, \leqq)$. Mit $G_\varrho(A, \leqq)$ bezeichnen wir die Menge genau derjenigen $\sigma \in G(A, \leqq)$, die den Forderungen

a) $\varrho \subseteq \sigma$,

b) ist $X, Y \in A/\varrho$, $X \neq Y$, $X \subseteq V$, $Y \subseteq W$, $V, W \in A/\sigma$, so ist $V \neq W$,

genügen.

Nach Hilfssatz der Nr. 41. ist $\bar{\varrho} \in G_\varrho(A, \leqq)$.

43. Satz. *Es sei $\varrho \in F(A, \leqq)$. Dann enthält die geordnete Menge $(G_\varrho(A, \leqq), \subseteq)$ ein kleinstes Element $\bar{\varrho}$. Ist $\mathfrak{A} \subseteq G_\varrho(A, \leqq)$ eine nichtleere Menge, so existiert*

$$\inf_{(G_\varrho(A,\leqq),\subseteq)} \mathfrak{A} = \inf_{(F(A,\leqq),\subseteq)} \mathfrak{A} \in G_\varrho(A, \leqq).$$

Ist $\sigma \in G_\varrho(A, \leqq)$, so gibt es in $(G_\varrho(A, \leqq), \subseteq)$ ein maximales Element τ mit $\sigma \subseteq \tau$.

Insbesondere ist $G_\varrho(A, \leqq)$ ein algebraisches System abgeschlossener Elemente auf dem vollständigem Verband $(F(A, \leqq), \subseteq)$; also $G(A, \leqq) = G_{id_A}(A, \leqq)$ ist auch ein algebraisches System abgeschlossener Elemente auf dem vollständigem Verband $(F(A, \leqq), \subseteq)$ und die Abbildung $^{-}\colon F(A, \leqq) \to G(A, \leqq)$ ist die zugehörige algebraische Hüllenoperation.

Beweis. Die Existenz und Form des Infimums der nichtleeren Menge $\mathfrak{A} \subseteq G_\varrho(A, \leqq)$ in $(G_\varrho(A, \leqq), \subseteq)$ ist durch die Sätze der Nrn. 20, 21 und durch die Definition des Systems $G_\varrho(A, \leqq)$ gesichert. Der extremale Charakter des Elementes $\bar{\varrho}$ in $(G_\varrho(A, \leqq), \subseteq)$ folgt aus Hilfssatz der Nr. 41, aus der Definition von $G_\varrho(A, \leqq)$ und aus der Nr. 36.

Nach Satz der Nr. 22 erfüllt die geordnete Menge $G_\varrho(A, \leqq)$, die Voraussetzungen des Lemmas von Zorn, woraus dann die Existenz des Elementes τ mit den genannten Eigenschaften folgt.

Die Richtigkeit der letzten Behauptung folgt aus dem Vorangehenden und aus Satz der Nr. 22.

Isotone Abbildungen.[2])

44. Symbolik. Die Symbole nat, ker haben die gewöhnliche Bedeutung (s. z. B. [3]). Ist $f : X \to Y$, wird $\hat{f} : X/\ker f \to Y$ durch

$$Z \in X/\ker f\,, \quad z \in Z \Rightarrow \hat{f}(Z) =_{\mathrm{Df}} f(z)$$

definiert.

Die Bezeichnungsweise $f : (X, \varrho) \nearrow (Y, \sigma)$ bedeutet, dass (X, ϱ) und (Y, σ) geordnete Mengen und f eine isotone Abbildung von (X, ϱ) in (Y, σ) ist (d. h. $f : X \to Y$ und für $x, y \in X$, $(x, y) \in \varrho$, gilt $(f(x), f(y)) \in \sigma$).

45. Satz. *Es sei $B \subseteq A$ und $f : (B, \leqq) \nearrow (C, \prec)$. Dann ist* $\ker f \in F(A, \leqq) \cap$ $\cap\, G(B, \leqq)$.

Beweis. Es sei $(x, y) \in \equiv_{\ker f}$. Dann existieren $m, n \in N$ derart, dass $(x, y) \in$ $\in \ker f\,.\,(\leqq\,.\,\ker f)^m$, $(y, x) \in \ker f\,.\,(\leqq\,.\,\ker f)^n$. Es existieren also $x_0, \ldots, x_{2m+1} \in B$ mit $x_0 = x$, $x_{2m+1} = x_{2m+2} = y$ und $(x_{2i}, x_{2i+1}) \in \ker f$, $(x_{2i+1}, x_{2i+2}) \in \leqq$, $i =$ $= 0, \ldots, m$. Die Isotonie von f hat $(f(x_{2i+1}), f(x_{2i+2})) \in \prec$ zur Folge, die Relation $\prec$ ist auf C transitiv, also $(f(x), f(y)) \in \prec$. Ähnlich wird $(f(y), f(x)) \in \prec$ nachgewiesen. Es ist also $f(x) = f(y)$, d. h. $(x, y) \in \ker f$. Offenbar ist dom $\ker f = B$, also $\ker f \in$ $\in F(A, \leqq) \cap G(B, \leqq)$.

46. Satz. *Es sei $\varrho \in D(A)$ und $(A/\varrho, \prec)$ sei eine geordnete Menge. Dann*

(b) $$\operatorname{nat} \varrho : (\operatorname{dom} \varrho, \leqq) \nearrow (A/\varrho, \prec)$$

genau dann, wenn $\leqq_{A/\varrho} \subseteq \prec$.

Beweis. Für $\varrho = \emptyset$ ist der Satz offenbar gültig. Es sei also $\varrho \neq \emptyset$. Es gelte (b) und $(X, Y) \in \leqq_{A/\varrho}$, $X, Y \in A/\varrho$. Nach Nr. 17 existieren $n \in N$, $X_0, \ldots, X_{n+1} \in A/\varrho$, $X_0 = X$, $X_{n+1} = Y$ derart, dass $x_i \in X_i$, $x_{n+1} \in X_{n+1}$, $(x_i, x_{i+1}) \in \leqq$, $i = 0, \ldots, n$, ist. Aus der Isotonie von nat ϱ folgt $(\operatorname{nat} \varrho(x_i), \operatorname{nat} \varrho(x_{i+1})) \in \prec$, d. h. $(X_i, X_{i+1}) \in \prec$. Die Transitivität von $\prec$ auf A/ϱ hat $(X, Y) \in \prec$, d. h. $\leqq_{A/\varrho} \subseteq \prec$ zur Folge.

Umgekehrt sei $\leqq_{A/\varrho} \subseteq \prec$. Ist $x \in X \in A/\varrho$, $y \in Y \in A/\varrho$, $(x, y) \in \leqq$, so gilt $(X, Y) \in$ $\in {}^{\bullet}\!\leqq \cap (A/\varrho \times A/\varrho) \subseteq \leqq_{A/\varrho} \subseteq \prec$, also $(\operatorname{nat} \varrho(x), \operatorname{nat} \varrho(y)) \in \prec$. Es gilt also (b).

47. Satz. *Es sei $\varrho \in F(A, \leqq)$. Dann existiert eine geordnete Menge $(C, \prec)$ und eine surjektive Abbildung $f : (\operatorname{dom} \varrho, \leqq) \nearrow (C, \prec)$ derart, dass $\varrho = \ker f$ ist.*

---

[2]) Siehe z. B. [1], [6], [7], [8]. Die Bezeichnungsweise „*Isotone Abbildung*" ist bereits mehr oder weniger stabilisiert. Aus diesem Grund wird sie auch in dieser Abhandlung benutzt, obwohl ich der Meinung bin, dass die Bezeichnung „*schwach isotoner (monotoner) Homomorphismus*" zutreffender wäre.

Beweis. Wir wählen $C = A/\varrho$, $\prec\, = \,\leqq_{A/\varrho}$, $f = \operatorname{nat} \varrho$. Nach Satz der Nr. 19 ist $\leqq_{A/\varrho}$ eine Ordnung auf A/ϱ. Nach Satz der Nr. 46 gilt dann $\operatorname{nat} \varrho : (\operatorname{dom} \varrho, \leqq) \nearrow$ $\nearrow (A/\varrho, \leqq_{A/\varrho})$. Die Abbildung $\operatorname{nat} \varrho : \operatorname{dom} \varrho \to A/\varrho$ ist offensichtlich surjektiv.

48. Hilfssatz. *Es sei $\mathscr{A} \subseteq B(A)$, $\mathscr{A} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathscr{A}$. $\prec$ sei eine Ordnung auf $\mathscr{A}$ mit $^{\bullet}\!\leqq \cap (\mathscr{A} \times \mathscr{A}) \subseteq \prec$. Dann ist $\mathscr{A}$ eine Zerlegung in A, $\leqq_{\mathscr{A}}$ eine Ordnung auf $\mathscr{A}$ und $\leqq_{\mathscr{A}} \subseteq \prec$.*

Beweis. Ist $B, C \in \mathscr{A}$, $B \cap C \neq \emptyset$, so folgt aus $^{\bullet}\!\leqq \cap (\mathscr{A} \times \mathscr{A}) \subseteq \prec$ und aus der Definition von $^{\bullet}\!\leqq$ (s. Nr. 17) $(B, C), (C, B) \in \prec$, d. h. $B = C$. Somit ist also $\mathscr{A}$ eine Zerlegung in A. Die Relation $\prec$ ist transitiv auf $\mathscr{A}$ und $\leqq_{\mathscr{A}}$ ist die kleinste transitive Hülle der Relation $^{\bullet}\!\leqq \cap (\mathscr{A} \times \mathscr{A})$ auf $\mathscr{A}$ (s. Nr. 17). Es gilt also $\leqq_{\mathscr{A}} \subseteq \prec$ und wegen der Antisymmetrie von $\prec$ auf $\mathscr{A}$ ist $\leqq_{\mathscr{A}}$ antisymmetrisch, d. h. $(\mathscr{A}, \leqq_{\mathscr{A}})$ ist eine geordnete Menge.

49. Korollar. *Ist $\varrho \in D(A)$, so ist $\varrho \in F(A, \leqq)$ genau dann, wenn es eine solche Ordnung $\prec$ auf A/ϱ gibt, für die* $\operatorname{nat} \varrho : (\operatorname{dom} \varrho, \leqq) \nearrow (A/\varrho, \prec)$ *ist.*

Beweis. Für $\varrho = \emptyset$ ist die Behauptung offenbar richtig. Es sei also $\varrho \neq \emptyset$. Ist $\varrho \in F(A, \leqq)$, so wählen wir auf A/ϱ als Ordnung $\prec\, =_{\mathrm{Df}} \,\leqq_{A/\varrho}$ (s. Nr. 17 und 19). Dann folgt $\operatorname{nat} \varrho : (\operatorname{dom} \varrho, \leqq) \nearrow (A/\varrho, \prec)$ aus Satz der Nr. 46.

Ist umgekehrt $\operatorname{nat} \varrho : (\operatorname{dom} \varrho, \leqq) \nearrow (A/\varrho, \prec)$, so ist $\leqq_{A/\varrho} \subseteq \prec$ nach Nr. 46. Nach Hilfssatz der Nr. 48 ist $(A/\varrho, \leqq_{A/\varrho})$ eine geordnete Menge, woraus nach Satz der Nr. 19 $\varrho \in F(A, \leqq)$ folgt.

50. Bemerkung. Ist $\varrho \in F(A, \leqq)$, so ist $\leqq_{A/\varrho}$ im Sinne der Mengeninklusion die kleinste Ordnung $\prec$, für die $\operatorname{nat} \varrho : (\operatorname{dom} \varrho, \leqq) \nearrow (A/\varrho, \prec)$ gilt. Dies folgt aus Nr. 46 und Nr. 19. Eine andere Ordnung $\prec$ auf A/ϱ, für die $\operatorname{nat} \varrho : (\operatorname{dom} \varrho, \leqq) \nearrow (A/\varrho, \prec)$ ist, wird in [4] von H. Prof. Čulík erörtert; in [4] handelt es sich eher um eine Modifikation der Relation $\leqq$ auf A.

51. Satz. *Gegeben sei eine geordnete Menge $(C, \prec)$, eine Abbildung $f : (A, \leqq) \nearrow$ $\nearrow (C, \prec)$ und eine Äquivalenz $\sigma \in F(C, \prec)$. Wir setzen $\mathscr{A} =_{\mathrm{Df}} \{f^{-1}(Y) \mid Y \in C/\sigma$, $f(A) \cap Y \neq \emptyset\}$. Ist $\mathscr{A} \neq \emptyset$, so existieren $\varrho \in F(A, \leqq)$, $\mathscr{A} = A/\varrho$ und eine Abbildung $g : (\mathscr{A}, \leqq_{\mathscr{A}}) \nearrow (C/\sigma, \prec_{C/\sigma})$.*

(Der Satz der Nr. 45 ist ein Sonderfall dieses Satzes.)

Beweis. Nach Nr. 19 ist die Relation $\prec_{C/\sigma}$ eine Ordnung auf C/σ und $\leqq_{\mathscr{A}}$ ist eine Quasiordnung auf $\mathscr{A}$. Die Existenz von $\varrho \in D(A)$ mit $\mathscr{A} = A/\varrho$ folgt nach Nr. 10 aus den Voraussetzungen des Satzes. Es sei $X_1, X_2 \in \mathscr{A}$, (X_1, X_2), $(X_2, X_1) \in \leqq_{\mathscr{A}}$. Mit $Y_1, Y_2 \in C/\varrho$ bezeichnen wir diejenigen Elemente, für die $f(X_1) \subseteq$

$\subseteq Y_1, f(X_2) \subseteq Y_2$ gilt. Nach Definition von $\leqq_{\mathscr{A}}$ gilt dann wegen $^{\bullet}\leqq \cap (\mathscr{A} \times \mathscr{A}) \subseteq$ $\subseteq \leqq_{\mathscr{A}}$ und da f isoton ist $(Y_1, Y_2), (Y_2, Y_1) \in \prec_{C/\sigma}$, woraus $Y_1 = Y_2$ folgt. Es ist also auch $X_1 = X_2$, womit die Antisymmetrie von $\leqq_{\mathscr{A}}$ auf $\mathscr{A}$ nachgewiesen ist. Nach Satz der Nr. 19 ist also $\varrho \in F(A, \leqq)$.

52. Satz. *Es sei* $f : (A, \leqq) \nearrow (C, \prec)$. *Dann existieren:*

1. *eine isotone surjektive Abbildung* g,

$$g = \operatorname{nat} \ker f : (A, \leqq) \nearrow (A/\ker f, \leqq_{A/\ker f});$$

2. *eine isotone bijektive Abbildung* h,

$$h = \hat{f} : (A/\ker f, \leqq_{A/\ker f}) \nearrow (f(A), \prec);$$

3. *eine isotone Einbettung* i,

$$i = \mathrm{id}_{f(A)} : (f(A), \prec) \nearrow (C, \prec)$$

derart, dass $f = i \,.\, h \,.\, g$ *ist.*

(Der Satz der Nr. 52 ist eine Analogie der Sätze über kanonische Zerlegungen von Homomorphismen).

Beweis. Die Abbildung g ist isoton nach Nr. 45 und Nr. 46. Nach Definition von $\leqq_{A/\ker f}$ und wegen der vorausgesetzten Isotonie von f ist auch $h = \hat{f}$ isoton. Die übrigen Behauptungen sind evident.

53. Satz. *Es sei eine Abbildung* $f : (A, \leqq) \nearrow (C, \prec)$ *und eine Äquivalenz* $\varrho \in$ $\in F(A, \leqq)$, $\emptyset \neq \varrho \subseteq \ker f$ *gegeben. Dann existiert genau eine Abbildung* $g :$ $: (A/\varrho, \leqq_{A/\varrho}) \nearrow (C, \prec)$ *so, dass* $f \mid \operatorname{dom} \varrho = g \,.\, \operatorname{nat} \varrho$.

Beweis. Für $X \in A/\varrho$, $x \in X$ definieren wir $g(X) = f(X)$. Aus $\varrho \subseteq \ker f$ folgt, dass g wirklich eine Abbildung $g : A/\varrho \to C$ darstellt und aus der Forderung $f \mid \operatorname{dom} \varrho = g \,.\, \operatorname{nat} \varrho$ folgt die Eindeutigkeit dieser Abbildung g (s. [3], Satz der Nr. 3.3, Kap. I, S. 29 der russischen Übersetzung, angewandt auf $f \mid \operatorname{dom} \varrho$). Es sei $X, Y \in A/\varrho$, $(X, Y) \in \leqq_{A/\varrho}$. Nach Nr. 17 existieren $n \in N$, $n \geqq 1$ und $U_1, \ldots, U_n \in$ $\in A/\varrho$ mit $X = U_0$, $Y = U_n$ $(U_i, U_{i+1}) \in {}^{\bullet}\leqq$, $i = 0, \ldots, n-1$. Aus $\varrho \subseteq \ker f$ folgt die Existenz solcher $V_0, \ldots, V_n \in A/\ker f$, für die $U_0 \subseteq V_0, \ldots, U_n \subseteq V_n$ ist. Es ist also $(V_i, V_{i+1}) \in {}^{\bullet}\leqq$. Beachten wir noch die Isotonie von f so erhalten wir $(\hat{f}(V_i), \hat{f}(V_{i+1})) \in$ $\in \prec$, also $(g(X), g(Y)) \in \prec$. Die Abbildung g ist somit isoton.

54. Symbolik. Es sei $\varrho, \sigma \in E(A)$, $\varrho \subseteq \sigma$. Mit σ/ϱ bezeichnen wir diejenige Äquivalenz auf A/ϱ, für die $(X, Y) \in \sigma/\varrho$ genau dann ist, wenn $X, Y \in A/\varrho$ und für $x \in X$, $y \in Y$ $(x, y) \in \sigma$ ist.

55. Satz. *Es sei $\varrho, \sigma \in G(A, \leqq)$, $\varrho \subseteq \sigma$. Dann gibt es genau eine surjektive Abbildung $f_1 : (A/\varrho, \leqq_{A/\varrho}) \nearrow (A/\sigma, \leqq_{A/\sigma})$ und genau eine bijektive Abbildung*

$$f_1' : ((A/\varrho)/(\sigma/\varrho), (\leqq_{A/\varrho})_{(A/\varrho)/(\sigma/\varrho)}) \nearrow (A/\sigma, \leqq_{A/\sigma})$$

derart, dass das Diagramm in Fig. 1 *kommutativ ist.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{nat}\ \varrho"] \arrow[dr, "\mathrm{nat}\ \sigma"'] & A/\varrho \arrow[r, "\mathrm{nat}\ (\sigma/\varrho)"] \arrow[d, "f_1"] & (A/\varrho)/(\sigma/\varrho) \arrow[dl, "f'_1"] \\
 & A/\sigma &
\end{tikzcd}$$

Fig. 1

Beweis. Nach Nr. 17, Satz der Nr. 19 und nach den Voraussetzungen $\varrho, \sigma \in$ $\in G(A, \leqq)$, $\varrho \subseteq \sigma$ ist $((A/\varrho)/(\sigma/\varrho), (\leqq_{A/\varrho})_{(A/\varrho)/(\sigma/\varrho)})$ eine geordnete Menge. Die Beziehung $f_1 : (A/\varrho, \leqq_{A/\varrho}) \nearrow (A/\sigma, \leqq_{A/\sigma})$ folgt aus Satz der Nr. 53, falls $(A/\sigma, \leqq_{A/\sigma}) =$ $= (C, \prec)$, nat $\sigma = f$ (s. Satz der Nr. 46) und $f_1 = g$ gewählt wird. Die Beziehung

$$f_1' : ((A/\varrho)/(\sigma/\varrho), (\leqq_{A/\varrho})_{(A/\varrho)/(\sigma/\varrho)}) \nearrow (A/\sigma, \leqq_{A/\sigma})$$

folgt wiederum aus Satz der Nr. 53, wenn man $f_1 = f$, $f_1' = g$ wählt und $\ker f_1 =$ $= \sigma/\varrho$ berücksichtigt.

Den Beweis der übrigen Behauptungen findet man in [3], Kap. I, Satz Nr. 3·4 (S. 30 der russichen Übersetzung).

56. Bemerkung. Die Sätze der Nr. 45–55 wurden durch die Homomorphiesätze der Nr. 3.1–3.4 in [3], Kap. I angeregt. Die Sätze der Nr. 45–55 sind deren Analogien.

Zum Schluss möge beachtet werden, wie die Theorie der $\leqq$sf-Äquivalenzen auf die Theorie der isotonen Erweiterungen isotoner Abbildungen angewandt werden kann. (Über isotone Erweiterungen isotoner Abbildungen siehe z. B. [8], wo andere Existenzkriterien für isotone Erweiterungen erörtert werden.)

57. Satz. *Gegeben sei B, $B \subseteq A$, und $f : (B, \leqq) \nearrow (C, \prec)$. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent:*

a) *Es gibt eine Abbildung*

$$g : (A, \prec) \nearrow (C, \leqq), \quad g \mid B = f .$$

b) *Es gibt ein* $\varrho \in G_{\ker f}(A, \leqq)$ (s. Nr. 42) *und eine injektive Abbildung*

$$h : (A/\varrho, \leqq_{A/\varrho}) \nearrow (C, \prec)$$

derart, dass $(h \,.\, \mathrm{nat}\, \varrho) \mid B = f$ *ist.*

Beweis. Gilt a), so genügt es $\varrho = \ker g$, $h = \hat{g}$ zu wählen. Gilt b), so genügt es $g = h \,.\, \mathrm{nat}\, \varrho$ zu wählen.

Literatur

[1] *Birkoff, G.:* Lattice Theory. New York 1948.

[2] *Borůvka, O.:* Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie. Berlin, VEB deutscher Verlag der Wissenschaften, 1960.

[3] *Cohn, P. M.:* Universal Algebra. New York—London, Harper & Row., 1965.

[4] *Čulík, K.:* O lexikografickém součtu částečně uspořádaných množin. Čas. pro pěst. mat. *84* (1959), 16—30.

[5] *Kuroš, A. G.:* Лекции по общей алгебре, Москва, Физматгиз, 1962.

[6] *Novotný, M.:* Über isotone Funktionale geordneter Mengen. Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen d. Math. *5* (1959), 9—28.

[7] *Novotný, M.:* Isotone Funktionale geordneter Mengen. Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen d. Math. *6* (1960), 109—133.

[8] *Sturm, T.:* Isotonní rozšíření isotonních zobrazení. Čas. pro pěst. mat. *92* (1967), 318—331.

[9] *Szász, G.:* Einführung in die Verbandstheorie. Leipzig, Teubner Verlag, 1962.

Anschrifts des Verfassers: Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 1902, ČSSR (České vysoké učení technické, elektrotechnická fakulta).