

Leo Boček

Untermannigfaltigkeiten von homogenen Räumen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 21 (1971), No. 1, 1–4

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100998>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1971

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

UNTERMANNIGFALTIGKEITEN VON HOMOGENEN RÄUMEN*)

LEO BOČEK, Praha

(Eingegangen am 8. Mai 1968)

Unter einer differenzierbaren Abbildung werden wir immer eine C^∞ -differenzierbare Abbildung verstehen.

Definition. Eine differenzierbare Funktion f auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M heisst k -horizontal im Punkte $q \in M$, wenn in lokalen Koordinaten alle partiellen Ableitungen der Funktion f bis zur k -ten Ordnung einschliesslich im Punkte q verschwinden.

Definition. Ein lineares Funktional, das auf der Menge aller differenzierbaren Funktionen auf M definiert ist, nennen wir einen k -Jet im Punkte $q \in M$, wenn er allen k -horizontalen Funktionen im Punkte q die Null zuordnet. Den Vektorraum aller k -Jets der Mannigfaltigkeit M im Punkte q bezeichnen wir $T_q^k(M)$, das Faserbündel aller k -Jets der Mannigfaltigkeit M bezeichnen wir $T^k(M)$.

Jede differenzierbare Abbildung φ von M in die differenzierbare Mannigfaltigkeit N induziert in naheliegender Weise eine Abbildung von $T^k(M)$ nach $T^k(N)$, die wir φ^k bezeichnen. (Statt φ^1 bzw. $T^1(M)$ werden wir auch die gewöhnliche Bezeichnung φ' bzw. $T(M)$ benutzen.)

1. Es sei G eine Liesche Gruppe, \mathfrak{G} ihr Tangentialraum im Einheitselement e , $A, B \in \mathfrak{G}$. Das Liesche Produkt der linksinvarianten Vektorfelder, deren Werte in e gerade A und B sind, bezeichnen wir $[A, B] \in \mathfrak{G}$. Es sei weiter U eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit und ω eine differenzierbare 1-Form auf U mit Werten in \mathfrak{G} . Wir definieren auf $U \times G$ eine Distribution Δ wie folgt: Für jeden Punkt $(u, g) \in U \times G$ gehören zu Δ in diesem Punkt genau alle Vektoren der Gestalt $(A, g \omega(A))$, wo $A \in T_u(U)$ und $g \omega(A)$ ist der Vektor, der aus dem Vektor $\omega(A)$ durch Links-Translation mittels des Elementes g entsteht. Man kann leicht das folgende Lemma beweisen.

*) Diese Arbeit wurde durch die Alexander von Humboldt-Stiftung gefördert.

Lemma 1. Die Distribution Δ ist genau dann involutiv, wenn

$$d\omega(X, Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)].$$

Aus der Einführung der Distribution Δ folgt unmittelbar

Lemma 2. Wenn die Distribution Δ involutiv ist, dann gibt es für jeden Punkt $(u, g) \in U \times G$ eine einzige maximale zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit V , die diesen Punkt enthält und die bei der natürlichen Projektion $\pi_1 : U \times G \rightarrow U$ eine Überlagerungsmannigfaltigkeit der Mannigfaltigkeit U ist. Für jeden ihrer Tangentialvektoren $Z \in T_{(\bar{u}, \bar{g})}(V)$ gilt $\pi_2' Z = \bar{g}(\omega(\pi_1' Z))$, wo π_2 die Projektion $U \times G \rightarrow G$ bezeichnet. Jede Integralmannigfaltigkeit der Distribution Δ ist dann von der Gestalt $g_0 V$, wo wir die Aktion von G auf $U \times G$ durch $g_0(u, g) = (u, g_0 g)$ definiert haben.

2. Es sei H eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe G und $M = G/H$. Wir setzen voraus, dass G auf M effektiv operiert, d. h. $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$. Es gibt eine natürliche Abbildung von $T(T^k(M))$ in $T^{k+1}(M)$. Bezeichnen wir diese Abbildung mit ϱ^k , so ist $\varrho^k A$ für $A \in T(T^k(M))$ durch $(\varrho^k A)f = AF$ definiert, wo $F(Y) = Yf$ für jede differenzierbare Funktion f auf M und $Y \in T^k(M)$.

Ist B ein Feld von k -Jets auf der Mannigfaltigkeit M und A Tangentialvektor von M , ist $B'(A) \in T(T^k(M))$. Statt $\varrho^k B'(A)$ werden wir kurz AB schreiben. Wir bezeichnen noch mit α die natürliche Projektion $G \rightarrow M = G/H$ und $p = \alpha(e)$.

Die Aktion von G auf M induziert erstens eine Aktion von G auf $T^k(M)$ für jedes k und diese dann eine bilineare Abbildung

$$\mathfrak{G} \times T_p^k(M) \rightarrow T(T^k(M)) \xrightarrow{\varrho^k} T_p^{k+1}(M),$$

die wir mit β^k bezeichnen. Weil $\beta^{k+1}/\mathfrak{G} \times T_p^k(M) = \beta^k$ ist, können wir kurz β schreiben.

Definition. Wir sagen, dass ein Unterraum $W \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_p^k(M)$ die Eigenschaft \mathcal{V} besitzt, wenn aus den Bedingungen $\beta(\gamma, x) = 0$ für alle $x \in W$ und $\alpha'(\gamma) = 0$ folgt, dass $\gamma = 0$ ist.

Jedes Element $h \in H$ gibt eine Abbildung $h : T_p^k(M) \rightarrow T_p^k(M)$.

Lemma 3. Was die Eigenschaft \mathcal{V} genau dann, wenn der Raum hW diese Eigenschaft besitzt, wo $h \in H$ ist.

Beweis. Der Definition von β zufolge ist für jedes $v \in T_p^k(M)$, $\gamma \in \mathfrak{G}$ und differenzierbare Funktion f auf M , $\beta(\gamma, v)f = \gamma[vf(gx)]$, wo der Ausdruck in eckigen Klammern als Funktion von g zu verstehen ist, also ist $\beta(\gamma, hv) = h\beta(\text{ad}(h^{-1})\gamma, v)$, woraus die Gültigkeit des Lemmas folgt.

3. Es sei jetzt φ eine differenzierbare Abbildung von U nach M . Ist B ein Feld von k -Jets auf U und $A \in T_u(U)$, so ist $\varphi^{k+1}(AB) = A \varphi^k(B)$. Zu jedem $u \in U$ gibt es ein $g(u) \in G$ so, dass $g^{-1}(u) \varphi(u) = p$ ist und lokal kann man die Abbildung g differenzierbar wählen. Sind g, g_1 zwei solche differenzierbare Abbildungen, so ist $g_1(u) = g(u) h(u)$, wo h eine lokale differenzierbare Abbildung von U nach H ist. Mittels der Abbildung g , bzw. g_1 , bekommen wir für jedes k eine Abbildung $g^{-1} \circ \varphi^k = \psi^k : T^k(U) \rightarrow T_p^k(M)$, bzw. $\psi_1^k = h^{-1}(u) \circ \psi^k$. Die Abbildungen ψ^k besitzen die folgenden Eigenschaften $g \psi^1(A) = \alpha'(g'(A))$, $A[g \psi^k(B)] = g \psi^{k+1}(AB)$. Bezeichnen wir mit ω die Abbildung $A \mapsto g^{-1}(u) g'(A)$, so können wir diese Bedingungen in folgender Form schreiben

$$(1) \quad \alpha'(\omega(A)) = \psi^1(A), \quad \beta(\omega(A), \psi^k(B)) = \psi^{k+1}(AB) - A \psi^k(B).$$

Wählen wir statt g die Abbildung g_1 und schreiben wir $\omega_1(A) = g_1^{-1}(u) g_1'(A)$, so ist $\omega_1(A) = \text{ad}(h^{-1}) \omega(A) + h^{-1}(u) h'(A)$ und für ω_1 sind auch die Gleichungen (1) erfüllt, wenn wir statt ψ^k die Abbildungen ψ_1^k verwenden.

4. Es seien zwei lineare Abbildungen $\psi, \psi_1 : T_u^1(U) \rightarrow T_p^1(M)$ gegeben. Wir sagen, dass diese Abbildungen äquivalent sind, wenn es ein $h \in H$ so gibt, dass $\psi_1 = h\psi$ ist. Die Äquivalenzklasse, die durch das Element ψ bestimmt ist, bezeichnen wir $\{\psi\}$.

Satz 1. Es sei für jedes $u \in U$ und ein festes k ein Element $\{\psi_u\}$ gegeben, wo $\psi_u : T_u^{k+1}(U) \rightarrow T_p^{k+1}(M)$ lineare Abbildungen sind mit den Eigenschaften

- a) lokal ist es möglich, die Repräsentanten ψ_u differenzierbar zu wählen;
- b) für jedes Feld B von k -Jets auf U und $A \in T_u(U)$ gibt es genau ein Element $\omega(A) \in \mathfrak{G}$, so dass die Gleichungen (1) erfüllt sind (die Eindeutigkeit ist genau dann erfüllt, wenn $\psi_u(T_u^k(U))$ für jedes u die Eigenschaft \mathcal{V} besitzt);
- c) für in dieser Weise entstandene Form ω gilt $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]$.

Dann gibt es eine Überlagerungsmannigfaltigkeit V der Mannigfaltigkeit U mit der Projektion π und eine Abbildung $\varphi : V \rightarrow M$, so dass für jedes $B \in T_v^{k+1}(V)$, $v \in V$ gilt

$$(2) \quad \{g^{-1} \varphi^{k+1}\} = \{\psi_{\pi v} \circ \pi^{k+1}\}, \quad \text{wo} \quad g^{-1} \varphi(v) = p.$$

Sind $\varphi, \bar{\varphi}$ zwei solche Abbildungen, dann gibt es ein $\bar{g} \in G$ so, dass $\bar{\varphi} = \bar{g}\varphi$.

Beweis. Erwähnen wir zuerst, dass die Erfüllung der Voraussetzungen nicht von der Wahl der Repräsentanten ψ_u abhängt. Wenn wir lokal andere Repräsentanten $\bar{\psi}_u = h^{-1}(u) \psi_u$ wählen, bekommen wir statt ω die Form ω_1 , $\omega_1(A) = \text{ad}(h^{-1}) \omega(A) + h^{-1}(u) h'(A)$. Weiter benutzen wir für Umgebungen, auf denen wir die Repräsentanten ψ_u differenzierbar wählen können, dass Lemma 2. Auf dem Durchschnitt zweier solcher Umgebungen bleibt eine Unbestimmtheit, die durch die

Uneindeutigkeit bei der Wahl der Form ω gegeben ist, die aber bei der Projektion α wegfällt. Die Erfüllung der Gleichungen (2) folgt aus (1) und daraus, dass man jeden $(l + 1)$ -Jet als Linearkombination von Gliedern der Gestalt AB schreiben kann, wo A ein Tangentialvektor und B ein Feld von l -Jets ist.

Aus dem vorhergehenden Satz folgt unmittelbar

Satz 2. Wenn $\varphi_1, \varphi_2 : U \rightarrow M$ zwei differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des homogenen Raumes G/H sind, die in Deformation $(k + 1)$ -ter Ordnung sind, d. h. für jedes $u_0 \in U$ gibt es ein $g_0 \in G$ so, dass $g_0\varphi_1^{k+1}|T_{u_0}^{k+1}(M) = \varphi_2^{k+1}|T_{u_0}^{k+1}(M)$, und wenn für jedes $u \in U$ $g\varphi_1^k(T_u^k(U))$ die Eigenschaft \mathcal{V} besitzt (g ist so gewählt, dass $g\varphi_1(u) = p$ ist), dann sind φ_1 und φ_2 äquivalent.

Literatur

- R. Hermann: Equivalence invariants for submanifolds of homogeneous spaces, Math. Ann. 158 (1965), 284—289.
- M. Kočandrl: Differential geometry of submanifolds in affine space with tensor structure, Czech. Math. Journal 92 (1967), 434—446.
- K. Nomizu: Lie groups and differential geometry, Publ. Math. Soc. Japan, 1956.
- J. T. Schwartz: Differential geometry and topology, 1965—66, New York University.
- A. Švec: On the geometry of submanifolds in homogeneous spaces, Matem. časopis 17 (1967), 146—166.
- A. Švec: Deformations of submanifolds of homogeneous spaces, Čas. pro pěst. mat. 93 (1968), 22—29.

Anschrift des Verfassers: Praha 8-Karlín, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta KU).