

Štefan Schwabik

Verallgemeinerte gewöhnliche Differentialgleichungen; Systeme mit Impulsen auf Flächen. I

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 20 (1970), No. 3, 468–490

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100976>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1970

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VERALLGEMEINERTE GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN;  
SYSTEME MIT IMPULSEN AUF FLÄCHEN I

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha  
(Eingelangt am 19. Mai 1969)

1. EINLEITUNG UND GRUNDBEGRIFFE

Es sei  $E_n$  der  $n$ -dimensionale euklidische Raum mit der Norm  $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$  für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n$ ;  $M \subset E_n$  sei eine offene Menge in  $E_n$  und sei  $G = M \times E_1 = \{(x, t); x \in M, t \in E_1\}$ .

Weiter soll  $h(t)$  eine stetige, nichtfallende auf  $E_1$  definierte reelle Funktion bedeuten und  $\varphi(x)$  sei eine auf  $M$  definierte Funktion deren Werte in  $E_1$  liegen und die Lipschitzbedingung mit der Konstante  $L$  genügt d. h. es gilt

$$(1,1) \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| < L\|x - y\| \quad \text{für } x, y \in M.$$

Sei noch  $\Phi(x)$  eine Abbildung von  $M$  in den Raum  $E_n$ , welche in der Menge  $M$  stetig ist.

Ferner werden die Funktionen  $h, \varphi, \Phi$  auch mit einem Index versehen auftreten. Es wird dabei vorausgesetzt, dass diese Funktionen den obigen Bedingungen genügen. Die Funktion  $\varphi$  und die Abbildung  $\Phi$  werden weiterhin immer gemeinsam auftreten.

Setzen wir noch voraus, dass

$$(V 1) \quad x + \Phi(x) \in M \quad \text{für alle } x \in M$$

gilt. Die Voraussetzung (V 1) ist, wie es weiter zu sehen sein wird, nicht wesentlich, sie sichert nur die Anwendbarkeit des lokalen Existenzsatzes für alle in  $G$  liegenden Ausgangspunkte für die ferner untersuchte verallgemeinerte Differentialgleichung.

Wir werden noch fordern, dass folgendes gilt:

$$(V 2) \quad \text{Zu jedem } x \in M \text{ gibt es ein } \sigma > 0 \text{ sodass, wenn } \|y - x\| \leq h(t) - h(\varphi(x)), \\ \varphi(x) < t \leq \varphi(x) + \sigma \text{ ist, dann ist } \varphi(y) \neq t.$$

Im Zusammenhang mit dieser letzten Voraussetzung deuten wir noch auf einige Tatsachen hin. Wenn  $L = 0$  ist, d. h. wenn  $\varphi(x) = \text{const.}$  ist, dann ist die Voraussetzung (V2) automatisch erfüllt, nachdem dann  $\varphi(y) = \varphi(x) < t$  ist und also auch  $\varphi(y) \neq t$  sogar für alle  $y \in M$ . Wenn man über die Funktion  $h$  voraussetzt, dass  $|h(t_2) - h(t_1)| \leq K |t_2 - t_1|$  ist für alle  $t_2, t_1 \in E_1$ , wobei  $K$  eine Konstante ist, für welche die Ungleichung  $0 \leq K < 1/L$  mit der in (1, 1) auftretenden Konstante  $L$  gilt, dann ist die Voraussetzung (V 2) ebenfalls erfüllt, nachdem dann  $|h(t) - h(\varphi(x))| \leq \leq K|t - \varphi(x)|$  ist und also gilt für jedes  $\sigma > 0$  wenn  $\|y - x\| \leq h(t) - h(\varphi(x))$ ,  $\varphi(x) < t \leq \varphi(x) + \sigma$  ist die Ungleichung  $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq L\|y - x\| \leq LK(t - \varphi(x)) < t - \varphi(x)$  und demnach muss notwendig  $\varphi(y) \neq t$  sein.

Die eben angeführte Voraussetzung (V 2) wird zum Beweis des lokalen Existenzsatzes für die im weiteren betrachteten verallgemeinerten Differentialgleichungen benötigt. Wenn es bekannt ist, dass  $\varphi(x + \Phi(x)) \neq \varphi(x)$  für alle  $x \in M$  gilt, dann kann die Voraussetzung (V 2) einfach weggelassen werden.

Für eine Abbildung  $F(x, t)$  welche  $E_{n+1}$  in  $E_n$  abbildet ( $F(x, t) : E_{n+1} \rightarrow E_n$ ) bezeichne man  $\Delta_t^\sigma F(x, \tau) = F(x, \tau + \sigma) - F(x, \tau)$  und  $\Delta_x^y F(z, t) = F(z + y, t) - F(z, t)$  die Differenzen in den Variablen  $t$  bzw.  $x$ .

In [2] bzw. [4] wurde eine Funktionenklasse  $\mathcal{F}(G, h)$  von Funktionen  $F(x, t) : G \rightarrow E_n$  folgenderweise gebildet:

Eine Funktion  $F(x, t) : G \rightarrow E_n$  gehört zu der Klasse  $\mathcal{F}(G, h)$  wenn

$$(1,2) \quad \|\Delta_t^{t_2-t_1} F(x, t_1)\| \leq |h(t_2) - h(t_1)|$$

für  $(x, t_i) \in G, i = 1, 2$  und

$$(1,3) \quad \|\Delta_t^{t_2-t_1} \Delta_x^y F(x, t_1)\| \leq \|y\| \cdot |h(t_2) - h(t_1)|$$

für  $(x, t_i), (x + y, t_i) \in G; i = 1, 2$  gilt.

Wenn  $G_1 \subset E_n \times E_1$  eine offene Menge ist, dann kann man eine Funktionenklasse  $\mathcal{F}(G_1, h)$  folgenderweise definieren:

$F(x, t) : G_1 \rightarrow E_n$  gehört zu  $\mathcal{F}(G_1, h)$  wenn  $F(x, t)$  die Ungleichung (1,2) für alle  $(x, t_i) \in G_1, i = 1, 2$  und die Ungleichung (1,3) für alle  $(x, t_i), (x + y, t_i) \in G_1, i = 1, 2$  erfüllt.

Offenbar gilt: Wenn  $G_1 \subset G$  ist,  $G_1$  offen, dann wenn  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$  ist, ist auch  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G_1, h)$ .

Bezeichnen wir nun

$$(1,4) \quad \begin{aligned} G^- &= \{(x, t); x \in M, t < \varphi(x)\}, \\ G^+ &= \{(x, t); x \in M, \varphi(x) < t\}, \\ P &= \{(x, t); x \in M, \varphi(x) = t\}. \end{aligned}$$

Offenbar ist  $G^- \cup G^+ \cup P = G$ . Der Graph  $P$  der Funktion  $\varphi$  gibt in der Menge  $G$  eine Fläche an, welche die Menge  $G$  teilt.

Definieren wir nun für  $\varphi$  und  $\Phi$  eine Funktion  $\tilde{F}(x, t) : G \rightarrow E_n$  folgenderweise

$$(1,5) \quad \begin{aligned} \tilde{F}(x, t) &= 0 & \text{für } (x, t) \in G^- \cup P, \\ \tilde{F}(x, t) &= \Phi(x) & \text{für } (x, t) \in G^+. \end{aligned}$$

Die Funktion  $\tilde{F}(x, t)$  ist für jedes feste  $x \in M$  in der Variablen  $t$  von links stetig; es gilt  $\tilde{F}(x, t+) - \tilde{F}(x, t) = 0$  für  $t \neq \varphi(x)$  und  $\tilde{F}(x, \varphi(x)+) - \tilde{F}(x, \varphi(x)) = \Phi(x)$ .

Wir bestimmen nun eine weitere Funktionenklasse  $\mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$ :

Eine Funktion  $F(x, t) : G \rightarrow E_n$  gehört genau dann zu der Klasse  $\mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  wenn  $F(x, t) - \tilde{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$  ist ( $\tilde{F}(x, t)$  ist die Funktion von (1,5)) d. h.

$$(1,6) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi) &= \\ &= \{F(x, t) : G \rightarrow E_n; F(x, t) = \tilde{F}(x, t) + \hat{F}(x, t), \hat{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)\}. \end{aligned}$$

Nach (1,2) ist also für  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  die Gleichung  $F(x, t+) - F(x, t) = 0$  für  $t \neq \varphi(x)$  und die Gleichung  $F(x, \varphi(x)+) - F(x, \varphi(x)) = \Phi(x)$  erfüllt. Für ein festes  $x \in M$  ist die Funktion  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  in den Intervallen  $(-\infty, \varphi(x))$  und  $(\varphi(x), +\infty)$  stetig und hat für  $t = \varphi(x)$  eine Unstetigkeit, die die Funktion  $\Phi(x)$  angibt.

Wir wollen in dieser Arbeit unser Interesse zu der verallgemeinerten Differentialgleichung

$$(1,7) \quad \frac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$$

wenden.

Der Begriff der Verallgemeinerung einer Differentialgleichung stammt von J. KURZWEIL ab (siehe [1] und eine Reihe von weiteren Arbeiten). Da werden wir uns meistens auf die Arbeit [2] berufen. In [3] ist ein ausführliches Verzeichniss der Arbeiten gegeben, welche diesen Problembereich berühren. Es zeigt sich, dass für die verallgemeinerte Differentialgleichung (1,7), bei passenden Voraussetzungen über deren rechte Seite, Funktionen endlicher Variation als Lösungen zulässig sind und also können die Lösungen der Gleichung (1,7) auch unstetig sein. Man kann also mit Hilfe des verallgemeinerten Differentialgleichungsbegriffes Systeme mit Impulsen beschreiben. In [4] wurde der Fall untersucht, wenn auf das System Impulse in vorgegebenen Zeitpunkten einwirken. Da wird mit Hilfe der verallgemeinerten Gleichung (1,7) der Fall untersucht, wo auf ein System Impulse einwirken, die nicht nur vom Zeitpunkt sondern auch von der Lage abhängen. Es wird uns der Fall interessieren, wo die Impulse auf der durch  $\varphi(x)$  bestimmten Fläche  $P$  (siehe (1,4)) wirken und deren Grösse die Funktion  $\Phi(x)$  angibt. Wir zeigen, dass die verallgemeinerte Gleichung (1,7) mit  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  die Eigenschaft hat, dass deren Lösungen in allen Zeitpunkten, in denen  $t = \varphi(x(t))$  ist ( $x(t)$  ist die Lösung der Gleichung (1,7)), eine Unstetigkeit haben, deren Grösse durch den Wert  $\Phi(x(t))$  angegeben ist. Ebenso

wenden wir uns dann dem Falle zu, wenn ein abzählbares System von Flächen und auf denen vorgegebene Impulse vorhanden sind.

## 2. DIE EXISTENZ DES INTEGRALES $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$

Sei  $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty$ . Sei  $x(\tau)$  eine auf  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  definierte Funktion deren Werte in  $E_n$  liegen; für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  gelte  $(x(\tau), \tau) \in G$ . Bezeichnen wir

$$(2,1) \quad N = \{ \tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle; (x(\tau), \tau) \in P \} = \{ \tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle; \varphi(x(\tau)) = \tau \}$$

und setzen voraus, dass die Menge  $N$  endlich ist.

Wir untersuchen zuerst das Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(x(\tau), t)$ , wo  $\tilde{F}(x, t)$  die Beziehung (1,5) angibt. Nachdem die Menge  $N$  endlich ist, kann man offenbar das Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  derartig in Intervalle  $\langle \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \rangle$  zerlegen, dass in  $\langle \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \rangle$  höchstens ein Punkt  $\tau_0 \in N$  liegt. Nachdem das Integral Intervalladitiv ist (siehe Satz 1, 3, 4 in [1]), genügt es die Existenz des Integrales  $\int_{\bar{\sigma}_1}^{\bar{\sigma}_2} D\tilde{F}(x(\tau), t)$  zu zeigen, wo  $\langle \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \rangle$  höchstens einen Punkt der Menge  $N$  enthält. Setzen wir zuerst voraus, dass  $\tau_0 \in N$  ist d. h.  $(x(\tau_0), \tau_0) \in P$  und für  $\tau \in \langle \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \rangle$ ,  $\tau \neq \tau_0$  ist  $(x(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$ . Definieren wir in  $\langle \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \rangle$  eine Funktion  $M_j(\tau) = 0$  für  $\bar{\sigma}_1 \leq \tau \leq \tau_0$ ,  $M_j(\tau) = \Phi_j(x(\tau_0))$  für  $\tau_0 < \tau \leq \bar{\sigma}_2$ . Wenn  $(x(t_0), t_0) \in G^-$  (bzw.  $(x(t_0), t_0) \in G^+$ ) ist, dann gibt es ein  $\delta(t_0) > 0$  sodass  $(x(t_0), t) \in G^-$  (bzw.  $(x(t_0), t) \in G^+$ ) für  $t_0 - \delta(t_0) \leq t \leq t_0 + \delta(t_0)$  gilt. Es existiert also für jedes  $t_0 \in \langle \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \rangle$  ein  $\delta(t_0) > 0$  sodass

$$(t - t_0) [\tilde{F}_j(x(t_0), t) - \tilde{F}_j(x(t_0), t_0)] = (t - t_0) [M_j(t) - M_j(t_0)]$$

für  $t_0 - \delta(t_0) \leq t \leq t_0 + \delta(t_0)$  ist. Die Funktion  $M_j(t)$  ist also in  $\langle \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \rangle$  eine Oberfunktion und zugleich auch eine Unterfunktion zu  $\tilde{F}_j(x(\tau), t)$  (siehe Definition 1,1,1 in [1]). Vom Obigen folgt dass für jedes  $j = 1, \dots, n$  das Integral  $\int_{\bar{\sigma}_1}^{\bar{\sigma}_2} DF_j(x(\tau), t)$  existiert und dem Wert  $M_j(\bar{\sigma}_2) - M_j(\bar{\sigma}_1) = \Phi(x(\tau_0))$  gleich ist (siehe Definitionen 1,1,2 und 1,1,4 in [1]). Es existiert also auch das Integral  $\int_{\bar{\sigma}_1}^{\bar{\sigma}_2} D\tilde{F}(x(\tau), t) = \Phi(x(\tau_0))$  (siehe Definition 1,4,1 in [1], wo das Integral einer Vektorfunktion definiert ist).

Im Falle  $N = \emptyset$  d. h.  $(x(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist dann  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(x(\tau), t) = 0$ .

Vom Obigen folgt nun sofort der

**Hilfsatz 2,1.** Sei  $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty$ , die Funktion  $x(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \rightarrow E_n$  sei derartig, dass  $(x(\tau), \tau) \in G$  für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist und sei die Menge  $N$  von (2,1) endlich. Dann existiert das verallgemeinerte Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(x(\tau), t)$  ( $\tilde{F}(x, t)$  ist in (1,5) definiert) und es gilt

$$(2,2) \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(x(\tau), t) = \sum_{\tau \in N} \Phi(x(\tau)).$$

**Bemerkung 2.1.** In der Menge  $N$  von (2,1) muss der Punkt  $\sigma_2$  nicht in Betracht genommen werden, nachdem die Funktion  $\hat{F}(x, t)$  in  $t$  von links stetig ist und also ist nach dem Satz 1, 3, 6 in [1]  $\lim_{\xi \rightarrow \sigma_2, \xi \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle} \int_{\sigma_1}^{\xi} D\hat{F}(x(\tau), t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\hat{F}(x(\tau), t)$ . Diese Tatsache wird auch weiter eine Rolle spielen.

Setzen wir nun weiter voraus, dass für die Funktion  $x(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \rightarrow E_n$  noch folgendes gilt: Sei  $H(\tau)$  eine auf  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  definierte reelle von links stetige Funktion, welche nichtfallend sei und die Funktion  $x(\tau)$  erfülle noch die Ungleichung

$$(2,3) \quad \|x(\tau_2) - x(\tau_1)\| \leq |H(\tau_2) - H(\tau_1)| \quad \text{für alle } \tau_1, \tau_2 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle.$$

Für eine gegebene Zahl  $\xi > 0$  sei  $N(\xi, \sigma_1, \sigma_2, H)$  die Menge aller  $t \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  für welche  $H(t+) - H(t) = \lim_{\tau \rightarrow t+} H(\tau) - H(t) \geq \xi$  ist. Weiter sei noch  $A = A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, H)$  die Menge aller Teilungen  $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \tau_s, \alpha_s\}$  des Intervalles  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  mit folgenden Eigenschaften:

$$\sigma_1 = \alpha_0 \leq \tau_1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{s-1} \leq \tau_s \leq \alpha_s = \sigma_2, \quad \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_s,$$

wenn  $\tau_j \notin N(\xi, \sigma_1, \sigma_2, H)$ , dann sei  $H(\alpha_j) - H(\alpha_{j-1}) < \xi$ , wenn  $\tau_j \in N(\xi, \sigma_1, \sigma_2, H)$  dann sei  $H(\tau_j) - H(\alpha_{j-1}) < \xi$ ,  $H(\alpha_j) - H(\tau_j+) < \xi$  und  $\alpha_j > \tau_j$ . In [4] Absatz 2. wurde mit den Mitteln von [2] folgendes Ergebniss bewiesen:

**Hilfsatz 2.2.** Sei  $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty$ ;  $x(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \rightarrow E_n$  sei eine Funktion, für die  $(x(\tau), \tau) \in G$  für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist und welche (2,3) erfüllt. Wenn  $\hat{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$  ist, dann existiert das Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\hat{F}(x(\tau), t)$ . Für ein beliebiges  $\xi > 0$  und Teilung  $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \tau_s, \alpha_s\} \in A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, H)$  gilt

$$(2,4) \quad \left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\hat{F}(x(\tau), t) - \sum_{i=1}^s \Delta_i \right\| \leq \xi [h(\sigma_2) - h(\sigma_1) + H(\sigma_2) - H(\sigma_1)],$$

wo  $\Delta_i = \hat{F}(x(\tau_i), \alpha_i) - \hat{F}(x(\tau_i), \alpha_{i-1})$  wenn  $\tau_i \notin N(\xi, \sigma_1, \sigma_2, H)$  ist und  $\Delta_i = \hat{F}(x(\tau_i+), \alpha_i) - \hat{F}(x(\tau_i+), \tau_i) + \hat{F}(x(\tau_i), \tau_i) - \hat{F}(x(\tau_i), \alpha_{i-1})$  wenn  $\tau_i \in N(\xi, \sigma_1, \sigma_2, H)$  ist.

Nun ergibt sich schon der folgende

**Satz 2.1.** Sei  $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty$ ;  $x(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \rightarrow E_n$  sei eine Funktion, für die die Menge  $N$  von (2,1) endlich ist, die (2,3) erfüllt und für welche  $(x(\tau), \tau) \in G$  für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  gilt. Wenn  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  ist, dann existiert das verallgemeinerte Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$ . Für ein beliebiges  $\xi > 0$  und eine beliebige Teilung  $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \tau_s, \alpha_s\} \in A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, H)$  gilt

$$(2,5) \quad \left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t) - \sum_{i=1}^s \Delta_i - \sum_{\tau \in N} \Phi(x(\tau)) \right\| \leq \xi [h(\sigma_2) - h(\sigma_1) + H(\sigma_2) - H(\sigma_1)],$$

wobei  $\Delta_i = \hat{F}(x(\tau_i), \alpha_i) - \hat{F}(x(\tau_i), \alpha_{i-1})$  wenn  $\tau_i \notin N(\xi, \sigma_1, \sigma_2, H)$  ist und  $\Delta_i = \hat{F}(x(\tau_i+), \alpha_i) - \hat{F}(x(\tau_i+), \tau_i) + \hat{F}(x(\tau_i), \tau_i) - \hat{F}(x(\tau_i), \alpha_{i-1})$  wenn  $\tau_i \in N(\xi_1, \sigma_1, \sigma_2, H)$  ist;  $\hat{F}(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t)$ , wo  $\tilde{F}(x, t)$  in (1,5) gegeben ist.

Beweis. Nachdem  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  ist, ist die Funktion  $\hat{F}(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$ , wo  $\tilde{F}(x, t)$  die Beziehungen (1,5) angeben. Die Existenz von  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$  folgt also unmittelbar von den Hilfsätzen 2,1 und 2,2 und von der Additivität des verallgemeinerten Integrales (siehe Satz 1, 3, 2 in [1]). Die Ungleichung (2,5) kommt sofort von (2,4), wenn man bedenkt, dass

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t) - \sum_{\tau \in N} \Phi(x(\tau)) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t) - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(x(\tau), t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\hat{F}(x(\tau), t).$$

Wir beweisen noch das folgende

**Lemma 2.1.** Sei  $F(x, t) : G \rightarrow E_n$  eine Funktion sodass  $F(x, t) = \tilde{F}(x, t) + F^*(x, t)$ , wobei  $\tilde{F}(x, t)$  in (1,5) gegeben ist und  $F^*(x, t)$  erfüllt (1,2) (d. h.  $\|F^*(x, t_2) - F^*(x, t_1)\| \leq |h(t_2) - h(t_1)|$ , wenn  $(x, t_1), (x, t_2) \in G$ ). Sei weiter  $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty$ ;  $y(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \rightarrow E_n$ ,  $(y(\tau), \tau) \in G$  für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  und sei die Menge  $N = \{\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \varphi(y(\tau)) = \tau\}$  endlich. Setzen wir noch voraus, dass das Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(y(\tau), t)$  existiert. Dann gilt

$$(2,6) \quad \left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(y(\tau), t) - \sum_{\tau \in N} \Phi(y(\tau)) \right\| \leq h(\sigma_2) - h(\sigma_1).$$

Beweis: Dem Hilfsatz 2,1 nach existiert das Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(y(\tau), t) = \sum_{\tau \in N} \Phi(y(\tau))$  und nachdem  $F^*(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t)$  ist, existiert auch das Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF^*(y(\tau), t)$ . Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dem Satz 1,2,1 und dem Lemma 1,2,1 von [1] nach gibt es zu  $\varepsilon$  soeine Teilung  $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \tau_s, \alpha_s\}$  des Intervalles  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ , dass  $\sigma_1 = \alpha_0 \leq \tau_1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \tau_s \leq \alpha_s = \sigma_2$ ,  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_s$ ,  $N \subset \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s\}$  ist und die Ungleichung

$$\left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF^*(y(\tau), t) - \sum_{i=1}^s [F^*(y(\tau_i), \alpha_i) - F^*(y(\tau_i), \alpha_{i-1})] \right\| < \varepsilon$$

gilt. Es ist also nach (1,2)

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(y(\tau), t) - \sum_{\tau \in N} \Phi(y(\tau)) \right\| = \left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(y(\tau), t) - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(y(\tau), t) \right\| = \\ & = \left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF^*(y(\tau), t) \right\| \leq \left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF^*(y(\tau), t) - \sum_{i=1}^s [F^*(y(\tau_i), \alpha_i) - F^*(y(\tau_i), \alpha_{i-1})] \right\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \sum_{i=1}^s [F^*(y(\tau_i), \alpha_i) - F^*(y(\tau_i), \alpha_{i-1})] \right\| \leq \\
& \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^s \|F^*(y(\tau_i), \alpha_i) - F^*(y(\tau_i), \alpha_{i-1})\| \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^s [h(\alpha_i) - h(\alpha_{i-1})] = \\
& = \varepsilon + h(\sigma_2) - h(\sigma_1).
\end{aligned}$$

Nachdem aber  $\varepsilon > 0$  beliebig klein gewählt werden kann, gilt (2,6).

### 3. DIE VERALLGEMEINERTE DIFFERENTIALGLEICHUNG $dx/d\tau = DF(x, t)$

Wir geben zuerst nach [1] (siehe Definition 2,1,1 in [1]) die folgende

**Definition 3,1.** Sei  $F(x, t) : G \rightarrow E_n$ . Eine Funktion  $x(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \rightarrow E_n$  nennen wir Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung

$$(3,1) \quad \frac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$$

im Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  wenn  $(x(\tau), \tau) \in G$  für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist und wenn für alle  $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_1 \leq \sigma_3 < \sigma_4 \leq \sigma_2$

$$(3,2) \quad x(\sigma_4) = x(\sigma_3) + \int_{\sigma_3}^{\sigma_4} DF(x(\tau), t)$$

gilt.

**Bemerkung 3,1.** Der Sinn der Definition 3,1 bleibt unverändert, wenn die Beziehung (3,2) für alle  $\sigma_4 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  gilt, wobei  $\sigma_3 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  fest gewählt ist. Dieses ist eine unmittelbare Folgerung der Additivität des verallgemeinerten Integrales- vgl. Satz 1,3,4 in [1].

Wenn  $x(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \rightarrow E_n$  eine Lösung der Gleichung (3,1) ist, wobei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  und wenn die Menge  $N = \{\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \varphi(x(\tau)) = \tau\}$  endlich ist, dann ist, wenn man  $N[\sigma_3, \sigma_4] = \langle \sigma_3, \sigma_4 \rangle \cap N$  für  $\sigma_1 \leq \sigma_3 < \sigma_4 \leq \sigma_2$  legt, nach (2,6) (siehe auch Bemerkung 2,1)

$$(3,3) \quad \|x(\sigma_4) - x(\sigma_3)\| \leq h(\sigma_4) - h(\sigma_3) + \left\| \sum_{\tau \in N[\sigma_3, \sigma_4]} \Phi(x(\tau)) \right\|.$$

Für ein beliebiges  $\sigma_4 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  existiert ein  $\delta > 0$  so, dass  $N[\sigma_3, \sigma_4] = \emptyset$  für  $\sigma_3 \in \langle \sigma_4 - \delta, \sigma_4 \rangle$  ist und also ist nach (3,3)  $\|x(\sigma_4) - x(\sigma_4 -)\| = 0$ , wobei  $x(\sigma_4 -) = \lim_{\tau \rightarrow \sigma_4^-} x(\tau)$  d. h. die oben genannte Lösung ist von links stetig in jedem Punkt des Definitionsintervalles. Wenn  $\sigma_3 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle - N$  ist, dann gibt es ein  $\delta > 0$  derartig,



dass für  $\sigma_3 < \sigma_4 \leq \sigma_3 + \delta$  wieder  $N[\sigma_3, \sigma_4] = \emptyset$  sein wird und also auch  $\|x(\sigma_3+) - x(\sigma_3)\| = 0$  wobei  $x(\sigma_3+) = \lim_{\tau \rightarrow \sigma_3+} x(\tau)$  ist. Ist aber  $\sigma_3 \in N$ , dann existiert so ein  $\delta > 0$ ,

dass für alle  $\sigma_4, \sigma_3 < \sigma_4 \leq \sigma_3 + \delta$  die Menge  $N[\sigma_3, \sigma_4] = \{\sigma_3\}$  ist und nach (2,6) ergibt sich dann  $\|x(\sigma_4) - x(\sigma_3) - \Phi(x(\sigma_3))\| \leq h(\sigma_4) - h(\sigma_3)$  und der Stetigkeit der Funktion  $h$  zufolge ist also

$$(3,4) \quad x(\sigma_3+) - x(\sigma_3) = \Phi(x(\sigma_3)).$$

Es ist also zu sehen, dass die Lösung  $x(\tau)$  der Gleichung (3,1) mit den obigen Eigenschaften von links stetig ist und nach (3,3) ist  $x(\tau)$  auch endlicher Variation.

Für  $(x_0, t_0) \in G$  bezeichne man  $x_1 = x_0 + F(x_0, t_0+) - F(x_0, t_0)$ . Nachdem  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  ist, ist offenbar  $F(x_0, t_0+) - F(x_0, t_0) = 0$  wenn  $(x_0, t_0) \in G^- \cup G^+$  und  $F(x_0, t_0+) - F(x_0, t_0) = \Phi(x_0)$  wenn  $(x_0, t_0) \in P$  ist.

Sei nun  $(x_0, t_0) \in G$ . Wähle man weiter eine positive Zahl  $\sigma_0 > 0$  sodass  $(x, t) \in G^- \cup G^+$  ist sobald  $t_0 < t \leq t_0 + \sigma_0$  und  $\|x - x_1\| \leq h(\tau) - h(t_0)$  für  $t_0 < \tau \leq t_0 + \sigma_0$  ist. Wir zeigen, dass so eine Zahl  $\sigma_0 > 0$  tatsächlich gewählt werden kann. Nach der Voraussetzung (V 1) ist  $x_1 \in M$ . Nachdem die Menge  $M$  offen ist, gibt es ein  $\varrho_1 > 0$  sodass  $x \in M$  von  $\|x - x_1\| < \varrho$ ,  $0 < \varrho \leq \varrho_1$  folgt. Es sind zwei Fälle möglich: entweder ist  $(x_1, t_0) \notin P$  oder ist  $(x_1, t_0) \in P$ . Im ersten Fall ist  $|\varphi(x_1) - t_0| = \varrho_2 > 0$ . Sei  $0 < \varrho < \min(\varrho_1, \varrho_2/2L)$  ( $L$  ist die Konstante von (1,1)). Nach (1,1) ist dann für  $x \in E_n$ ,  $\|x - x_1\| < \varrho$  die Ungleichung  $|\varphi(x) - \varphi(x_1)| \leq L\|x - x_1\| < L\varrho < \varrho_2/2$  erfüllt. Sei weiter  $\sigma' > 0$  so eine Zahl, dass  $h(t_0 + \sigma') - h(t_0) < \varrho$  ist. Wenn man nun  $0 < \sigma_0 < \min(\sigma', \varrho_2/2)$  legt, dann ist es sofort zu sehen, dass die Zahl  $\sigma_0 > 0$  die verlangten Eigenschaften hat. Für den zweiten Fall d. h. für  $(x_1, t_0) \in P$  ist die Existenz vom  $\sigma_0 > 0$  durch die Voraussetzung (V 2) gesichert.

Den lokalen Existenzsatz für eine Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung (3,1) beweisen wir in folgender Form:

**Satz 3,1.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  und  $(x_0, t_0)$ . Dann kann man ein  $\sigma > 0$  so finden, dass im Intervall  $\langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$  eine Lösung  $x(\tau)$  der Gleichung (3,1) so existiert, dass  $x(t_0) = x_0$  ist.

**Bemerkung.** Beim Beweis des Satzes 3,1 benützen wir den lokalen Existenzsatz von J. Kurzweil von [2], der dieselbe Form wie unser Satz 3,1 hat, wobei aber man voraussetzen muss, dass  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$  ist.

Beweis des Satzes 3,1. Es ist  $F(x, t) = \tilde{F}(x, t) + \hat{F}(x, t)$ , wobei  $\tilde{F}(x, t)$  die Funktion von (1,5) ist und  $\hat{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$ . Sei  $\sigma_1 > 0$  die positive Zahl, deren Existenz der lokale Existenzsatz von Kurzweil (vgl. [2]) für die verallgemeinerte Differential-

gleichung  $dx/d\tau = D\hat{F}(x, t)$  mit der Anfangsbedingung  $(x_1, t_0)$  sichert und sei  $\bar{x}(\tau)$  die Lösung dieser Gleichung im Intervall  $\langle t_0, t_0 + \sigma_1 \rangle$  d. h. es gilt

$$\bar{x}(\eta_2) = \bar{x}(\eta_1) + \int_{\eta_1}^{\eta_2} D\hat{F}(\bar{x}(\tau), t) \quad \text{für alle } \eta_1, \eta_2, t_0 \leq \eta_1 < \eta_2 \leq t_0 + \sigma_1.$$

Legen wir  $\sigma = \min(\sigma_0, \sigma_1)$ , wobei  $\sigma_0 > 0$  die Zahl ist, welche die vor dem Satz 3,1 beschriebenen Eigenschaften hat. Definieren wir für  $\tau \in \langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$  eine Funktion  $x(\tau)$  folgenderweise:  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(\tau) = \bar{x}(\tau)$  für  $\tau \in (t_0, t_0 + \sigma)$ . Nach dem Lemma 2,1 gilt  $\|\bar{x}(\tau) - x_1\| \leq h(\tau) - h(t_0)$  für alle  $\tau \in \langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$  und also ist der Voraussetzung nach  $(\bar{x}(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  für  $\tau \in (t_0, t_0 + \sigma)$ . Sei nun  $t_0 \leq \eta_1 < \eta_2 \leq t_0 + \sigma$ . Setzen wir zuerst voraus, dass  $t_0 < \eta_1$  ist. Dann gilt offenbar  $\int_{\eta_1}^{\eta_2} D\hat{F}(\bar{x}(\tau), t) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} D\hat{F}(x(\tau), t)$  und nach dem Hilfsatz 2,1 auch  $\int_{\eta_1}^{\eta_2} D\hat{F}(\bar{x}(\tau), t) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} D\hat{F}(x(\tau), t) = 0$ . Daher also ist

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} DF(x(\tau), t) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} D\hat{F}(x(\tau), t) + \int_{\eta_1}^{\eta_2} D\hat{F}(x(\tau), t) = \bar{x}(\eta_2) - \bar{x}(\eta_1) = x(\eta_2) - x(\eta_1).$$

Sei nun  $t_0 = \eta_1$ . Nach dem Hilfsatz 2,1 ist  $\int_{\eta_1}^{\eta_2} D\hat{F}(x(\tau), t) = x_1 - x_0$  (offenbar ist  $x_1 - x_0 = 0$  wenn  $(x_0, t_0) \notin P$  und  $x_1 - x_0 = \Phi(x_0)$  wenn  $(x_0, t_0) \in P$ ). Weiter gilt für jedes  $\delta > 0$  der Definition von  $x(\tau)$  nach

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} D\hat{F}(x(\tau), t) - \int_{t_0}^{\eta_2} D\hat{F}(\bar{x}(\tau), t) = \int_{t_0}^{t_0+\delta} D[\hat{F}(x(\tau), t) - \hat{F}(\bar{x}(\tau), t)].$$

Der Ungleichung (1,3) zufolge ist

$$\begin{aligned} & \|\Delta_t^{t_2-t_1}[\hat{F}(x(\tau), t) - \hat{F}(\bar{x}(\tau), t)]\| \leq \\ & \leq \|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| \cdot |h(t_2) - h(t_1)| \leq \|x_1 - x_0\| \cdot |h(t_2) - h(t_1)|. \end{aligned}$$

Daher und vom Lemma 2,1 in [4] ist so

$$\left\| \int_{t_0}^{\eta_2} D\hat{F}(x(\tau), t) - \int_{t_0}^{\eta_2} D\hat{F}(\bar{x}(\tau), t) \right\| \leq \|x_1 - x_0\| \cdot (h(t_0 + \delta) - h(t_0))$$

für jedes  $\delta > 0$  und also ( $\delta \rightarrow 0+$ ) ist

$$\int_{t_0}^{\eta_2} D\hat{F}(x(\tau), t) = \int_{t_0}^{\eta_2} D\hat{F}(\bar{x}(\tau), t) = \bar{x}(\eta_2) - \bar{x}(t_0) = \bar{x}(\eta_2) - x_1.$$

Diese Gleichungen geben nun

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\eta_2} DF(x(\tau), t) &= \int_{t_0}^{\eta_2} D\hat{F}(x(\tau), t) + \int_{t_0}^{\eta_2} D\hat{F}(x(\tau), t) = \\ &= \bar{x}(\eta_2) - x_1 + x_1 - x_0 = x(\eta_2) - x_0 = x(\eta_2) - x(t_0). \end{aligned}$$

Für alle  $\eta_1, \eta_2, t_0 \leq \eta_1 < \eta_2 \leq t_0 + \sigma$  gilt also  $x(\eta_2) - x(\eta_1) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} DF(x(\tau), t)$  d. h.  $x(\tau)$  ist eine Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung (3,1) im Intervall  $\langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$ .

**Bemerkung 3,2.** Wenn  $(x_0, t_0) \in G^- \cup G^+$  ist, dann kann man auf dem Grund des Kurzweilschen Existenzsatzes von [2] auch beweisen, dass die Lösung  $x(\tau), x(t_0) = x_0$  auch für  $\tau \in \langle t_0 - \sigma, t_0 \rangle$  mit einem  $\sigma > 0$  existieren wird. Ist aber  $(x_0, t_0) \in P$ , dann muss die Lösung  $x(\tau)$  für  $\tau \in \langle t_0 - \sigma, t_0 \rangle$  allgemein nicht existieren. In [2] wurde dieses auf einem auch für unseren Fall passenden Beispiel gezeigt (siehe Bemerkung 2,1 in [2]). Bemerken wir weiter noch, dass die da konstruierte Lösung (nach (3,8) und nach der Wahl von  $\sigma > 0$ ) die Eigenschaft hat, dass  $(x(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  für  $\tau_0 \in (t_0, t_0 + \sigma)$  ist.

Wir untersuchen nun einige weitere Eigenschaften der Lösungen von (3,1).

**Lemma 3,1.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  und sei  $x(\tau)$  so eine Lösung der Gleichung (3,1) im Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  dass  $(x(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist. Dann gilt:

1.  $x(\tau)$  ist in  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  Lösung der Gleichung

$$(3,5) \quad \frac{dx}{d\tau} = D\hat{F}(x, t),$$

wo  $\hat{F}(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t)$  ( $\tilde{F}(x, t)$  von (1,5)),

2.  $x(\tau)$  ist in  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  stetig,

3. wenn für ein  $\tau_0 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ ,  $(x(\tau_0), \tau_0) \in G^-$  (bzw.  $(x(\tau_0), \tau_0) \in G^+$ ) ist, dann ist  $(x(\tau), \tau) \in G^-$  (bzw.  $(x(\tau), \tau) \in G^+$ ) für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ .

4. Sei umgekehrt  $x(\tau)$  eine Lösung der Gleichung (3,5) im Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  so dass  $(x(\tau), \tau) \in G^-$  oder  $(x(\tau), \tau) \in G^+$ ,  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist, dann ist  $x(\tau)$  eine Lösung der Gleichung (3,1) im Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ .

**Beweis.** Nachdem  $x(\tau)$  Lösung von (3,1) ist, gilt

$$x(\tau_2) - x(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} DF(x(\tau), t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} D[\hat{F}(x(\tau), t) + \tilde{F}(x(\tau), t)]$$

für alle  $\sigma_1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \sigma_2$ . Der Voraussetzung nach ist  $\varphi(x(\tau)) \neq \tau$  für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  und also ist nach dem Hilfsatz 2,1  $\int_{\tau_1}^{\tau_2} D\tilde{F}(x(\tau), t) = 0$  für alle  $\sigma_1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \sigma_2$  und also gilt  $x(\tau_2) - x(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} D\hat{F}(x(\tau), t)$  für alle  $\sigma_1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \sigma_1$ . Nach der Definition 3,1 ist  $x(\tau)$  tatsächlich eine Lösung der Gleichung (3,5) und also gilt 1.; 2. folgt unmittelbar von 1. (siehe auch (3,3)). Sei nun  $\tau_0 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  und  $(x(\tau_0), \tau_0) \in G^+$  und es existiere ein  $\tau^0 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  so, dass  $(x(\tau^0), \tau^0) \in G^-$  ist d. h. es

gilt  $\varphi(x(\tau_0)) - \tau_0 > 0$  und  $\varphi(x(\tau^0)) - \tau^0 < 0$ . Die Funktion  $\varphi(x(\tau)) - \tau$  ist nach (1,1) und 2. stetig in  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  also gibt es ein  $\tau_* \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  derartig, dass  $\varphi(x(\tau_*)) - \tau_* = 0$  ist d. h.  $(x(\tau_*), \tau_*) \in P$ ; dieses widerspricht der Voraussetzungen und 3. ist ebenfalls bewiesen.

**Folgerung 3.1.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  und sei  $x(\tau)$  eine Lösung der Gleichung (3,1) in  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  sodass  $(x(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle - N$  ist, wobei  $N = \{\tau_1, \dots, \tau_k\}$ ,  $N \subset \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$   $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$  eine endliche Menge ist. Dann ist  $x(\tau)$  eine Lösung der Gleichung (3,5) in jedem Intervall  $(\tau_l, \tau_{l+1})$   $l = 1, \dots, k-1, (\sigma_1, \tau_1), (\tau_k, \sigma_2)$ ;  $x(\tau)$  ist in jedem von diesen Intervallen stetig und für alle diese Intervalle gilt 3. vom Lemma 3,1.

**Lemma 3.2.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  und seien  $x(\tau), y(\tau)$  derartige Lösungen der Gleichung (3,1) in  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  dass  $(x(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  und  $(y(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  gilt. Dann gilt auch

$$(3,6) \quad \|x(\tau) - y(\tau)\| \leq \|x(\sigma_1) - y(\sigma_1)\| \cdot e^{h(\tau) - h(\sigma_1)}$$

für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ .

Beweis. Nach 1. vom Lemma 3,1 sind die Funktionen  $x(\tau)$  und  $y(\tau)$  Lösungen der Gleichung (3,5) und der Definition von  $\mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  nach ist  $\hat{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$ . Die Ungleichung (3,6) kommt nun schon unmittelbar von [4] Satz 2,1 (Siehe (2,11) in [4]).

**Lemma 3.3.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$ ,  $(x_0, t_0) \in P$ ,  $\sigma > 0$ . Sei  $x(\tau)$  im Intervall  $\langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$  eine Lösung der Gleichung (3,1),  $x(t_0) = x_0$ ,  $(x(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  für  $\tau \in (t_0, t_0 + \sigma)$ . Dann existiert in  $\langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$  eine Lösung  $\bar{x}(\tau)$  der Gleichung (3,5) mit  $\bar{x}(t_0) = x_0 + \Phi(x_0)$  und es gilt  $\bar{x}(\tau) = x(\tau)$  für  $\tau \in (t_0, t_0 + \sigma)$ .

Beweis. Der Definition einer Lösung nach ist für  $\xi \in (t_0, t_0 + \sigma)$

$$\begin{aligned} x(\xi) &= x_0 + \int_{t_0}^{\xi} DF(x(\tau), t) = x_0 + \int_{t_0}^{\xi} D\hat{F}(x(\tau), t) + \int_{t_0}^{\xi} D\hat{\Phi}(x(\tau), t) = \\ &= x_0 + \Phi(x_0) + \int_{t_0}^{\xi} D\hat{F}(x(\tau), t). \end{aligned}$$

Setzen wir  $\bar{x}(\tau) = x(\tau)$  für  $\tau \in (t_0, t_0 + \sigma)$ ,  $\bar{x}(t_0) = x_0 + \Phi(x_0)$ . Für ein beliebiges  $\delta > 0$ ,  $\delta < \sigma$  ist

$$\int_{t_0}^{\xi} D\hat{F}(x(\tau), t) - \int_{t_0}^{\xi} D\hat{F}(\bar{x}(\tau), t) = \int_{t_0}^{t_0 + \delta} D[\hat{F}(x(\tau), t) - \hat{F}(\bar{x}(\tau), t)].$$

Nachdem  $\hat{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$  ist, gilt nach (1,3)

$$\begin{aligned} & \|\Delta_i^{t_2-t_1}[\hat{F}(x(\tau), t_1) - \hat{F}(\bar{x}(\tau), t_1)]\| = \\ & = \|\Delta_i^{t_2-t_1} \Delta_x^{x(\tau)-\bar{x}(\tau)} \hat{F}(\bar{x}(\tau), t_1)\| \leq \|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| \cdot |h(t_2) - h(t_1)|, \end{aligned}$$

für  $t_1, t_2 \in \langle t_0, t_0 + \delta \rangle$  und also ist nach dem Lemma 2,1 von [4] die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^{\xi} D\hat{F}(x(\tau), t) - \int_{t_0}^{\xi} D\hat{F}(\bar{x}(\tau), t) \right\| & \leq \int_{t_0}^{t_0+\delta} \|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| dh(\tau) \leq \\ & \leq \|\Phi(x_0)\| \cdot (h(t_0 + \delta) - h(t_0)) \end{aligned}$$

erfüllt. Nach dem Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0+$  ergibt sich dann

$$\int_{t_0}^{\xi} D\hat{F}(x(\tau), t) = \int_{t_0}^{\xi} D\hat{F}(\bar{x}(\tau), t)$$

für alle  $\xi \in \langle t_0, t_0 + \delta \rangle$  und also gilt

$$x(\xi) = \bar{x}(\xi) = x_0 + \Phi(x_0) + \int_{t_0}^{\xi} D\hat{F}(\bar{x}(\tau), t) = \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{\xi} D\hat{F}(\bar{x}(\tau), t)$$

d. h.  $\bar{x}(\tau)$  ist tatsächlich eine Lösung der Gleichung (3,5).

**Folgerung 3.2.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  und sei  $x(\tau)$  eine Lösung der Gleichung (3,1) in  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  sodass  $(x(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle - N$ , wobei  $N = \{\tau_1, \dots, \tau_k\}$ ,  $N \subset \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ ,  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$ . Dann existiert in jedem Intervall  $= 1, \dots, k-1$ ,  $\langle \tau_k, \sigma_2 \rangle$  eine Lösung  $\bar{x}(\tau)$  der Gleichung (3,5) mit  $\bar{x}(\tau_l) = x(\tau_l) + \Phi(x(\tau_l))$ ,  $l = 1, \dots, k-1$ ,  $\bar{x}(\tau_k) = x(\tau_k) + \Phi(x(\tau_k))$ ,  $\tau \in \langle \sigma_k, \sigma_2 \rangle$  und es gilt  $x(\tau) = \bar{x}(\tau)$  für alle  $\tau \in \langle \tau_l, \tau_{l+1} \rangle$ ,  $l = 1, \dots, k-1$ . Wenn  $\sigma_1 < \tau_1$  ist, dann ist die Lösung  $x(\tau)$  im Intervall  $\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle$  zugleich eine Lösung der Gleichung (3,5) in diesem Intervall.

**Bemerkung 3.3.** Vom Lemma 3,3 ist es klar, dass für die Lösungen der Gleichung (3,1) nicht eine Eindeutigkeit „rückwärts“ vorliegen muss, d. h. wenn  $x(\tau)$  und  $y(\tau)$  auf  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  Lösungen der Gleichung (3,1) sind und wenn für ein  $\tau_0 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  die Gleichung  $x(\tau_0) = y(\tau_0)$  gilt, dann muss  $x(\tau) = y(\tau)$  nicht gelten.

Wir beweisen nun den folgenden Satz, welcher die Eindeutigkeit „vorwärts“ sichert.

**Satz 3.2.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  und sei  $x(\tau)$  im Intervall  $\langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$ ,  $\sigma > 0$  eine Lösung der Gleichung (3,1) sei weiter  $y(\tau)$  eine Lösung der Gleichung (3,1) in  $\langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$ ,  $0 < \alpha \leq \sigma$  und es gelte  $x(t_0) = y(t_0)$ . Dann gilt  $y(\tau) = x(\tau)$  für jedes  $\tau \in \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$ .

Beweis. Sei  $t_1$  das Supremum aller derartigen  $t \in \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$  dass  $y(\tau) = x(\tau)$  für  $\tau \in \langle t_0, t_1 \rangle$  ist. Da  $x(\tau)$  und  $y(\tau)$  von links stetige Funktionen sind, ist  $x(t_1) = y(t_1)$ . Wir wollen zeigen, dass  $t_1 = t_0 + \alpha$  sein muss. Setzen wir voraus, dass dieses nicht gilt d. h.  $t_1 < t_0 + \alpha$ . Nachdem  $(x(t_1), t_1) \in G$  ist, ist entweder  $(x(t_1), t_1) \in G^- \cup G^+$  oder  $(x(t_1), t_1) \in P$ . Im ersten Fall gibt es der Stetigkeit von  $x(\tau)$  (bzw.  $y(\tau)$ ) in  $\tau = t_1$  wegen ein  $\delta > 0$  sodass  $(x(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  und  $(y(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  für  $\tau \in \langle t_1, t_1 + \delta \rangle$  ist und nach (3,6) ist also  $\|x(\tau) - y(\tau)\| \leq \|x(t_1) - y(t_1)\| \cdot e^{h(\tau) - h(t_1)} = 0$  für  $\tau \in \langle t_1, t_1 + \delta \rangle$  und so ist  $x(\tau) = y(\tau)$  für  $\tau \in \langle t_1, t_1 + \delta \rangle$ . Dieses widerspricht aber der Voraussetzung über  $t_1$ . Untersuchen wir noch den Fall  $(x(t_1), t_1) \in P$ . In diesem Fall kann ein  $\delta > 0$  so vorgegeben werden, dass auf  $\langle t_1, t_1 + \delta \rangle$  eine Lösung  $\bar{x}(\tau)$  der Gleichung (3,5) derart existiert, dass  $\bar{x}(t_1) = x(t_1) + \Phi(x(t_1))$  und  $(\bar{x}(\tau), \tau) \in G^- \cup G^+$  für  $\tau \in (t_1, t_1 + \delta)$  ist (siehe Satz 3,1). Nach dem Lemma 3,3 ist  $x(\tau) = \bar{x}(\tau)$  für  $\tau \in (t_1, t_1 + \delta) \cap \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$ . Ebenso kann man auf  $\langle t_1, t_1 + \delta \rangle$  eine Lösung  $\bar{y}(\tau)$  definieren und dann ist für  $\tau \in (t_1, t_1 + \delta) \cap \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$  auch  $\|x(\tau) - y(\tau)\| = \|\bar{x}(\tau) - \bar{y}(\tau)\| \leq \|\bar{x}(t_1) - \bar{y}(t_1)\| \cdot e^{h(\tau) - h(t_1)} = \|x(t_1) + \Phi(x(t_1)) - y(t_1) - \Phi(y(t_1))\| \cdot e^{h(\tau) - h(t_1)} = 0$ . Wir bekommen so wie bevor einen Widerspruch und also auch den Satz.

**Lemma 3,4.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  und sei  $(x_0, t_0) \in G$ . Bezeichnen wir  $T$  das Supremum aller Zahlen  $t > t_0$ , für die auf  $\langle t_0, t \rangle$  soeine Lösung  $x(\tau)$  der Gleichung (3,1) existiert, dass  $x(t_0) = x_0$  ist. Dann existiert im Intervall  $\langle t_0, T \rangle$  eine Lösung  $x(\tau; x_0, t_0)$  der Gleichung (3,1) für die  $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$  ist.

Beweis. Es gibt eine Folge von Zahlen  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T$  und eine Folge von Lösungen  $x_n(\tau)$  der Gleichung (3,1) in  $\langle t_0, t_n \rangle$  sodass  $x_n(t_0) = x_0$  ist. Der Eindeutigkeitsatz 3,2 sichert, dass wenn  $n < m$  ist, dann ist  $x_n(\tau) = x_m(\tau)$  für  $\tau \in \langle t_0, t_n \rangle$ . Für  $\tau \in \langle t_0, T \rangle$  definieren wir  $x(\tau; x_0, t_0) = x_n(\tau)$  für  $\tau \in \langle t_0, t_n \rangle$ . Die Funktion  $x(\tau; x_0, t_0)$  ist auf diese Weise eindeutig bestimmt und ist offenbar eine Lösung der Gleichung (3,1) mit  $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$ .

**Definition 3,2.** Die nach dem Lemma 3,4 in  $\langle t_0, T \rangle$  bestimmte Lösung  $x(\tau; x_0, t_0)$  der Gleichung (3,1) nennen wir Globallösung der Gleichung (3,1) die durch den Punkt  $(x_0, t_0) \in G$  bestimmt ist.

Für eine Globallösung gilt offenbar (soeben wie es in der klassischen Theorie bekannt ist)  $x(\tau; x_0, t_0) = x(\tau; x(t_1; x_0, t_0), t_1)$  für  $t_0 \leq t_1 \leq \tau < T$ .

Eine nähere Festlegung der Eigenschaften von der rechten Seite der verallgemeinerten Differentialgleichung (3,1) liefert die Möglichkeit gründlicher das Verhalten von Lösungen der Gleichung (3,1) zu analysieren. In diesem Absatz untersuchen wir zu der Klasse  $\mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  gehörende rechte Seiten der Gleichung (3,1). Diese Klasse wird durch die Menge  $G$  und die Funktionen  $h, \varphi, \Phi$  bestimmt; wenn man also auf diese bestimmende Elemente der Klasse  $\mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  weitere Bedin-

gungen auflegt, dann kann auch näheres über das Verhalten der Lösungen von (3,1) geschlossen werden. Sei z. B. die Bedingung  $(x + \Phi(x), \varphi(x)) \in G^+ \cup P$  für alle  $x \in M$  erfüllt (dabei verlangt man, so wie im Absatz 1, dass  $x + \Phi(x) \in M$  für alle  $x \in M$  ist). Dann kann man folgendes behaupten:

Für die Globallösung  $x(\tau; x_0, t_0)$  der Gleichung (3,1) ist  $(x(\tau; x_0, t_0), \tau) \in G^+ \cup P$  für alle  $\tau \in \langle t_0, T \rangle$  sobald  $(x_0, t_0) \in G^+ \cup P$  ist; wenn  $(x_0, t_0) \in G^-$  ist, dann ist entweder  $(x(\tau; x_0, t_0), \tau) \in G^-$  für alle  $\tau \in \langle t_0, T \rangle$  oder gibt es ein  $t_1 \in (t_0, T)$  derartig, dass  $(x(t_1; x_0, t_0), t_1) \in P$  ist und dann ist  $(x(\tau; x_0, t_0), \tau) \in G^+ \cup P$  für alle  $\tau \in \langle t_1, T \rangle$ . Ebenso kann auch der Fall  $(x + \Phi(x), \varphi(x)) \in G^-$  für alle  $x \in M$  analysiert werden.

Wir betrachten noch den Einfluss der Funktion  $h(t)$  vom Absatz 1 auf das Verhalten der zu der Funktionenklasse  $\mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  gehörenden Funktionen  $F(x, t)$ . Der Definition von  $\mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  nach hängt von  $h$  nur die Funktion  $\hat{F}(x, t)$  ab, wobei  $\hat{F}(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t)$  ( $\tilde{F}(x, t)$  ist die Funktion von (1,5)). Es ist  $\hat{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$ . Nach den Voraussetzungen über  $h(t)$  vom Absatz 1 nach ist  $h(t)$  offenbar eine stetige Funktion endlicher Variation. Setzen wir zusätzlich noch voraus, dass die Funktion  $h(t)$  in jedem endlichen Intervall absolut stetig ist. Nach (1,2) ist bei dieser Voraussetzung jede  $\hat{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$  für alle feste  $x \in M$  in der Variablen  $t$  absolut stetig in jedem endlichen Intervall (d. h. jede Komponente  $[\hat{F}(x, t)]_j, j = 1, \dots, n$  der Funktion  $\hat{F}(x, t)$  hat diese Eigenschaft). Von den bekannten Eigenschaften einer absolut stetigen Funktion folgt dann, dass die Funktion  $\hat{F}(x, t)$  für jedes feste  $x \in M$  fast überall (im Sinne des Lebesgueschen Masses) in  $E_1$  eine endliche Ableitung  $\partial \hat{F}(x, t) / \partial t$  hat. Bezeichnen wir diese Ableitung  $f(x, t) = \partial \hat{F}(x, t) / \partial t$ . Soeben kann man auch behaupten, dass auch die Funktion  $h(t)$  fast überall in  $E_1$  eine endliche Ableitung  $h'(t)$  besitzt und diese wird in jedem endlichen Intervall  $\langle a, b \rangle \subset E_1$  im Lebesgueschen Sinn integrierbar sein. Nach der Ungleichung (1,2) kann man beweisen, dass

$$\text{a) } \|f(x, t)\| \leq h'(t)$$

für alle  $x \in M$  und fast alle  $t$  ist. Ebenso nach (1,3) ist auch

$$\text{b) } \|f(x, t) - f(y, t)\| \leq \|x - y\| \cdot h'(t)$$

für  $x, y \in M$  und fast alle  $t$ . Diese Ungleichungen zeigen, dass die Funktion  $f(x, t)$  den bekannten Caratheodoryschen Bedingungen genügt und man kann also über die Differentialgleichung

$$(3,7) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

im Caratheodoryschen Sinn sprechen. Legen wir nun  $F^*(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) d\tau$ . Der

Theorie der absolut stetiger Funktionen nach ist  $\hat{F}(x, t) = F^*(x, t) + C(x)$  wo  $C(x)$  von  $t$  nicht abhängt. Von [2] ist bekannt, dass die Differentialgleichung (3,7) und die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$(3,8) \quad \frac{dx}{d\tau} = DF^*(x, t)$$

einander in dem Sinne äquivalent sind, dass jede Lösung der Gleichung (3,7) zugleich auch eine Lösung der Gleichung (3,8) ist und umgekehrt. Weiter ist auch klar, dass die verallgemeinerten Differentialgleichungen (3,8) und (3,5) auch einander im obigen Sinn äquivalent sind, nachdem das verallgemeinerte Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DC(x(\tau))$  für beliebige  $\sigma_1, \sigma_2 \in E_1$  Null gleich ist. Wir zeigten so dass die Voraussetzung der absoluten Stetigkeit der Funktion  $h(t)$  die Äquivalenz der verallgemeinerten Differentialgleichung (3,5) mit einer die Caratheodoryschen Bedingungen erfüllenden Differentialgleichung mit sich bringt.

Umgekehrt, wenn man nach [2] für eine Funktion  $f(x, t)$ , welche die Bedingungen a) und b) von oben erfüllt, die Funktion  $\hat{F}(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) d\tau$  bestimmt, dann bekommt man wieder äquivalente Differentialgleichungen (3,5) und (3,7) von denen die erste eine verallgemeinerte und die zweite eine Caratheodorysche ist.

**Beispiel 3,1.** Setzen wir  $M = \{x \in E_1; |x| < 3\}$ ,  $G = M \times (-\infty, \infty)$ . Sei  $\varphi(x) = x$  für  $x \in M$  und legen wir  $\Phi(x) = -1$  für  $x \in \langle -\frac{7}{4}, 3 \rangle$ ,  $\Phi(x) = -\frac{1}{3}(4x + 12)$  für  $x \in \langle -3, -\frac{7}{4} \rangle$ . Für diese Menge  $G$  und für die Funktionen  $\varphi, \Phi$  bestimmen wir die Funktion  $\tilde{F}(x, t)$  nach (1,5) d. h.  $\tilde{F}(x, t) = 0$  für  $t \leq x$ ,  $|x| < 3$ ,  $\tilde{F}(x, t) = -1$  für  $t > x$ ,  $x \in \langle -\frac{7}{4}, 3 \rangle$ ,  $\tilde{F}(x, t) = -\frac{1}{3}(4x + 12)$  für  $t > x$ ,  $x \in \langle -3, -\frac{7}{4} \rangle$ . Sei weiter  $F(x, t) = xt + \tilde{F}(x, t)$ . Offenbar ist  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, 3t, x, \Phi(x))$ ,  $\hat{F}(x, t) = xt$ . Die verallgemeinerte Differentialgleichung (3,5) ist für unsere spezielle Wahl von  $\hat{F}(x, t)$  mit der klassischen Differentialgleichung

$$(3,9) \quad \frac{dx}{dt} = x$$

in  $G$  zusammenfallend. Die Lösungen von (3,9) haben die Form  $\bar{x}(t; x_0, t_0) = x_0 \cdot e^{t-t_0}$ . Sei nun  $(x_0, t_0)$  und sei  $x(\tau; x_0, t_0)$  die dem Punkt  $(x_0, t_0)$  entsprechende Globallösung der verallgemeinerten Differentialgleichung

$$(3,10) \quad \frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) = D[xt + \tilde{F}(x, t)].$$

Bekanntlich (vgl. Lemma 3,1) ist jede Lösung der Gleichung (3,10), welche in  $G^- \cup G^+$  liegt zugleich auch eine Lösung der Gleichung (3,9) und umgekehrt.



Definieren wir nun folgende Mengen:

$$G_1 = [\{(x, t) \in G; -3e^{t+3} < x \leq e^{t-1}, t \leq 1\} \cap (G^- \cup P)] \cup \\ \cup [\{(x, t) \in G; x > 3e^{t-3}\} \cap (G^+ \cup P)],$$

$$G_2 = \bar{G}_1 \cap G^- \cap \{(x, t) \in G; x > 0\}, \quad G_3 = \bar{G}_1 \cap G^- \cap \{(x, t) \in G; x < 0\},$$

$$G_4 = \bar{G}_1 \cap G^+,$$

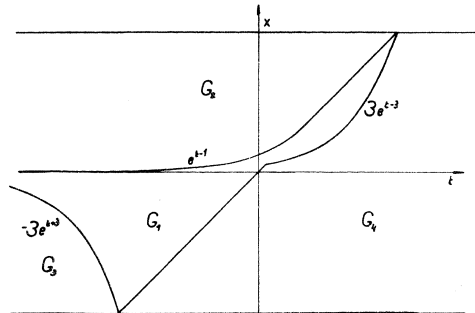


Abb. 1.

wobei  $\bar{G}_1$  das Komplement der Menge  $G_1$  in  $G$  bedeutet (siehe Abb. 1). Es gilt  $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 = G$ . Eine Analyse der Lösungen der Gleichung (3,9) mit Rücksicht auf den Zusammenhang dieser Lösungen mit den Lösungen der Gleichung (3,10) geben folgendes: Wenn  $(x_0, t_0)$  in einer von den Mengen  $G_2, G_3, G_4$  liegt, dann liegt  $(x(\tau; x_0, t_0), \tau)$  in derselben Menge für alle  $\tau \in \langle t_0, T \rangle$  ( $\langle t_0, T \rangle$  ist das Definitionsintervall der zu  $(x_0, t_0)$  gehörenden Globallösung der Gleichung (3,10)). Wenn  $(x_0, t_0) \in G_1$  ist, dann gibt es im Definitionsintervall  $\langle t_0, T \rangle$  der durch  $(x_0, t_0)$  bestimmten Globallösung der Gleichung (3,10) einen Punkt  $t_1 \in \langle t_0, T \rangle$  sodass  $(x(t_1; x_0, t_0), t_1) \in P$  ist. Für  $\tau \in (t_1, T)$  gilt dann  $(x(\tau; x_0, t_0), \tau) \in G_4$  und die Globallösung  $x(\tau; x_0, t_0)$  hat im Punkt  $t_1$  eine Unstetigkeit, die durch  $\Phi(x(t_1; x_0, t_0))$  bestimmt ist.

#### 4. SYSTEME MIT UNSTETIGKEITEN AUF ABZÄHLBAR VIELEN FLÄCHEN

Setzen wir voraus, dass für jedes ganze  $k$  eine Funktion  $\varphi_k(x) : M \rightarrow E_1$  und eine Abbildung  $\Phi_k(x) : M \rightarrow E_n$  gegeben ist, wobei  $\varphi_k$  die Bedingung (1,1) erfüllt (L hänge dabei von  $k$  nicht ab), für jedes  $\Phi_k$  sei die Voraussetzung (V 1) erfüllt und sei für jedes  $\varphi_k$  die Voraussetzung (V 2) mit derselben Funktion  $h$  erfüllt. Die Funktion  $h(t)$  ist so wie im Absatz 1 eine stetige nichtfallende auf  $E_1$  definierte reelle Funktion.

Setzen wir weiter noch voraus, dass

$$(4,1) \quad \varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) \geq \delta > 0$$

für alle  $x \in M$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  gilt.

Ein System der Paare  $\varphi_k, \Phi_k$ , welches den obigen Bedingungen genügt, soll mit  $\{\varphi_k, \Phi_k\}$  bezeichnet werden. Bezeichnen wir weiter

$$(4,2) \quad G_k = \{(x, t); x \in M, \varphi_{k-1}(x) < t < \varphi_k(x)\}, \\ P_k = \{(x, t); x \in M, t = \varphi_k(x)\}.$$

Offensichtlich ist  $(\text{nach (4,1)}) \bigcup_k (G_k \cup P_k) = G$ . Ähnlicherweise wie in (1,5) definieren wir für  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  eine Funktion  $\tilde{F}_k(x, t) : G \rightarrow E_n$  sodass

$$(4,3) \quad \tilde{F}_k(x, t) = 0 \quad \text{für } (x, t) \in G_k^- \cup P_k, \\ \tilde{F}_k(x, t) = \Phi_k(x) \quad \text{für } (x, t) \in G_k^+,$$

wobei  $G_k^- = \{(x, t), x \in M, t < \varphi_k(x)\}$ ,  $G_k^+ = \{(x, t); x \in M, t > \varphi_k(x)\}$  ist. Wir setzen

$$(4,4) \quad \tilde{F}(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}_k(x, t)$$

für  $(x, t) \in G$  und nehmen an, dass die Summe rechts für alle  $(x, t) \in G$  einen Sinn hat. Die Funktion  $\tilde{F}(x, t)$  ist für jedes feste  $x \in M$  in  $t$  von links stetig; es gilt  $\tilde{F}(x, t+) - \tilde{F}(x, t) = 0$  für  $t \neq \varphi_k(x)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\tilde{F}(x, \varphi_k(x) +) - \tilde{F}(x, \varphi_k(x)) = \Phi_k(x)$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$  und  $\tilde{F}(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{k-1} \Phi_l(x)$  für  $(x, t) \in G_k \cup P_k$ .

Wir definieren nun noch eine weitere Funktionenklasse  $\mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ :

Eine Funktion  $F(x, t) : G \rightarrow E_n$  gehört genau dann zu der Klasse  $\mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ , wenn die Funktion  $\hat{F}(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t)$  zu der Klasse  $\mathcal{F}(G, h)$  gehört d. h.

$$(4,5) \quad \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\}) = \\ = \{F(x, t) : G \rightarrow E_n; F(x, t) = \tilde{F}(x, t) + \hat{F}(x, t); \hat{F}(x, t) \text{ von (4,5)}, \\ \hat{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)\}.$$

Für eine Funktion  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  gilt  $F(x, t+) - F(x, t) = 0$  für  $t \neq \varphi_k(x)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  und  $F(x, \varphi_k(x) +) - F(x, \varphi_k(x)) = \Phi_k(x)$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$  (vgl. (1,2)). Für ein festes  $x \in M$  ist  $F(x, t)$  in den Intervallen  $(\varphi_{k-1}(x), \varphi_k(x))$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  stetig und hat für  $t = \varphi_k(x)$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$  einen Sprung, den die Funktion  $\Phi_k(x)$  bestimmt.

Ähnlicherweise wie im Absatz 2. der Satz 2,1 bewiesen wurde, kann man den folgenden Satz beweisen:

**Satz 4,1.** Sei  $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty$ ,  $x(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \rightarrow E_n$  sei eine Funktion sodass  $(x(\tau), \tau) \in G$  für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist,  $x(\tau)$  erfülle (2,3) und für jedes  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  sei die Menge

$$(4,6) \quad N_k = \{\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle; (x(\tau), \tau) \in P_k\}$$

endlich. Wenn  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  ist, dann existiert das Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$  und für ein beliebiges  $\xi > 0$  und eine Teilung  $\{\alpha_0, \tau_1, \dots, \tau_s, \alpha_s\} \in A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, H)$  (siehe Absatz 2) gilt

$$(4,7) \quad \left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{\tau \in N_k} \Phi_k(x(\tau)) - \sum_{i=1}^s \Delta_i \right) \right\| \leq \xi [h(\sigma_2) - h(\sigma_1) + H(\sigma_2) - H(\sigma_1)]^*$$

wobei  $\Delta_i = \hat{F}(x(\tau_i), \alpha_i) - \hat{F}(x(\tau_i), \alpha_{i-1})$  wenn  $\tau_i \notin \bigcup_k N_k$  und  $\Delta_i = \hat{F}(x(\tau_i +), \alpha_i) - \hat{F}(x(\tau_i +), \tau_i) + \hat{F}(x(\tau_i), \tau_i) - \hat{F}(x(\tau_i), \alpha_{i-1})$  wenn  $\tau_i \in \bigcup_k N_k$  ist; dabei ist  $\hat{F}(x, t)_t = F(x, t) - \tilde{F}(x, t)$ ,  $\tilde{F}(x, t)$  ist die Funktion von (4,4).

**Beweis.** Der Hilfsatz 2,1 sichert den Voraussetzungen nach die Existenz des Integrales  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}_k(x(\tau), t)$  und gibt  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}_k(x(\tau), t) = \sum_{\tau \in N_k} \Phi_k(x(\tau))$ . Da die Funktion  $x(\tau)$  (2,3) erfüllen soll, ist  $(x(\tau), \tau)$  für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  in der Menge  $\{(x, t); \|x - x(\sigma_1)\| \leq H(\sigma_2) - H(\sigma_1), t \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle\}$  enthalten. Diese Menge kann aber offenbar nur eine endliche Anzahl von Flächen  $P_k$  schneiden und so kann auch  $(x(\tau), \tau)$  für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  nur mit endlich vielen Flächen  $P_k$  gemeinsame Punkte haben. In der Summe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{\tau \in N_k} \Phi_k(x(\tau)) \right)$  treten also nur endlich viele von Null verschiedene Glieder auf diese hat also immer einen Sinn, da auch  $N_k$  endliche Mengen sind. Es gilt also  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{\tau \in N_k} \Phi_k(x(\tau)) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}_k(x(\tau), t) \right) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} D\tilde{F}_k(x(\tau), t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$ . Weiter kann man so wie bei dem Beweis des Satzes 2,1 fortschreiten.

Auch ein Analogon vom Lemma 2,1 kann wie im Absatz 2 bewiesen werden:

**Lemma 4,1.** Sei  $F(x, t) : G \rightarrow E_n$ ,  $F(x, t) = \hat{F}(x, t) + \tilde{F}(x, t)$ , wo  $\hat{F}(x, t)$  die Ungleichung (1,2) erfüllt,  $\tilde{F}(x, t)$  sei die Funktion von (4,4). Sei weiter  $y(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \rightarrow E_n$ ,  $(y(\tau), \tau) \in G$  für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ ,  $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty$  seien die Mengen

\*) Da ist natürlich  $\sum_{\tau \in N_k} \Phi(x(\tau)) = 0$  falls  $N_k = \emptyset$ .

$N_k = \{\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \varphi_k(y(\tau)) = \tau\}$  endlich und es existiere das Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(y(\tau), t)$ .  
Dann gilt

$$(4,8) \quad \left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(y(\tau), t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{\tau \in N_k} \Phi_k(y(\tau)) \right) \right\| \leq h(\sigma_2) - h(\sigma_1),$$

wenn die Summe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{\tau \in N_k} \Phi_k(y(\tau)) \right)$  einen Sinn hat.

**Beweis.** Nach dem Hilfsatz 2,1 existiert das Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}_k(y(\tau), t)$  für jedes  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  und es ist  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}_k(y(\tau), t) = \sum_{\tau \in N_k} \Phi_k(y(\tau))$ . Nachdem die Summe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{\tau \in N_k} \Phi_k(y(\tau)) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}_k(y(\tau), t)$  einen Sinn haben soll, ist sie dem Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(y(\tau), t)$  gleich und unser Lemma kann weiter so wie das Lemma 2,1 bewiesen werden.

**Lemma 4,2.** Sei  $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty$  und sei  $x(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \rightarrow E_n$  soeine Funktion, dass  $(x(\tau), \tau) \in G$  für  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist. Setzen wir voraus, dass  $N_k = \emptyset$  für  $k \neq l$  ist und dass die Menge  $N_l$  endlich ist ( $N_k$  sind die Mengen von (4,7)). Sei weiter  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  (d. h.  $F(x, t) = \tilde{F}(x, t) + \hat{F}(x, t)$ , wo  $\tilde{F}(x, t)$  die Beziehung (4,4) angibt und  $\hat{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$ ) und es existiere das Integral  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$ . Dann gilt

$$(4,9) \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\hat{F}(x(\tau), t) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}_l(x(\tau), t),$$

wobei die Funktion  $\tilde{F}_l(x, t)$  in (4,4) gegeben ist.

**Beweis.** Nachdem  $N_k = \emptyset$  für  $k \neq l$  ist, gilt nach dem Hilfsatz 2,1  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF_k(x(\tau), t) = 0$  für  $k \neq l$ . Also ist

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(x(\tau), t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D\tilde{F}_k(x(\tau), t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}_l(x(\tau), t)$$

und daher folgt die Behauptung.

Wir wenden uns nun zu der verallgemeinerten Differentialgleichung

$$(4,10) \quad \frac{dx}{d\tau} = DF(x, t),$$

wo  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  ist. Eine Lösung dieser Gleichung wird in der Definition 3,1 definiert. Die verallgemeinerte Differentialgleichung (3,1) mit  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi)$  ist offenbar ein Spezialfall der Gleichung (4,10). Es genügt dazu  $\varphi_0 \equiv \varphi$ ,  $\Phi_0 \equiv \Phi$ ,  $\Phi_k(x) \equiv 0$  für  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  zu legen und es gilt dann

$\mathcal{F}(G, h, \varphi, \Phi) = \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ , wo  $\varphi_k$  für  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  beliebig gegeben werden kann.

Weiter gilt

**Lemma 4,3.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  und sei  $x(\tau)$  soeine Lösung der Gleichung (4,10) im Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ , dass  $(x(\tau), \tau) \in \bigcup_k G_k$  für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist. Dann ist

1.  $x(\tau)$  ist in  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  Lösung der Gleichung

$$(4,11) \quad \frac{dx}{d\tau} = D\hat{F}(x, t),$$

wo  $\hat{F}(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t)$  ( $\tilde{F}(x, t)$  von (4,5)),

2.  $x(\tau)$  ist in  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  stetig,

3. wenn für ein  $\tau_0 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$   $(x(\tau_0), \tau_0) \in G_l$  ist, dann ist  $(x(\tau), \tau) \in G_l$  für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ ,

4. wenn umgekehrt  $x(\tau)$  eine Lösung der Gleichung (4,11) im Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist sodass  $(x(\tau), \tau) \in G_l$ ,  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  für irgendein ganzes  $l$  gilt, dann ist  $x(\tau)$  zugleich auch eine Lösung der Gleichung (4,10) im Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ .

Der Beweis kann wie bei dem Lemma 3,1 geführt werden.

**Lemma 4,4.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  und seien  $y(\tau)$  und  $x(\tau)$  Lösungen der Gleichung (4,10) im Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  sodass  $(x(\tau), \tau) \in \bigcup_k G_k$  und  $(y(\tau), \tau) \in \bigcup_k G_k$  für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist. Dann gilt die Ungleichung (3,6) für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ .

Der Beweis kommt sofort von 1. im Lemma 4,3 und vom Lemma 3,2.

**Lemma 4,5.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  und sei  $x(\tau)$  soeine Lösung der Gleichung (4,10) im Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ , dass  $(x(\tau), \tau) \in \bigcup_k G_k \cup P_l$  für alle  $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  ist. Dann ist  $x(\tau)$  in  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  eine Lösung der Gleichung

$$(4,12) \quad \frac{dx}{d\tau} = D[\hat{F}(x, t) + \tilde{F}_l(x, t)],$$

wo  $\hat{F}(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t)$ ,  $\tilde{F}(x, t)$  ist die Funktion von (4,4) und  $\tilde{F}_l(x, t)$  gibt (4,3) an. Ist umgekehrt  $x(\tau)$  in  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  eine Lösung der Gleichung (4,12) mit den obigen Eigenschaften, dann ist  $x(\tau)$  in  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  Lösung der Gleichung (4,10).

**Beweis.** Der Definition einer Lösung nach gilt  $x(\tau_2) - x(\tau_1) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$  für alle  $\sigma_1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \sigma_2$ . Der Voraussetzung und dem Lemma 4,2 nach ist

$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} D\hat{F}(x(\tau), t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} D\hat{F}_l(x(\tau), t)$  für alle  $\sigma \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \sigma_2$  und so ist  $x(\tau)$  tatsächlich eine Lösung der Gleichung (4,12). Dabei ist offenbar  $\hat{F}(x, t) + \hat{F}_l(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \varphi_l, \Phi_l)$ . Die umgekehrte Behauptung ist daher auch klar.

**Bemerkung 4.1.** Wir betonen, dass die verallgemeinerte Differentialgleichung (4,10) mit  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  lokal (vgl. Lemma 4,5) als eine vom Absatz 3 bekannte verallgemeinerte Differentialgleichung betrachtet werden kann.

Sei nun  $(x_0, t_0) \in G$  und  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ . Dann gibt es offenbar eine ganze Zahl  $l$  sodass  $(x_0, t_0) \in G_l \cup P_l$  ist. Bezeichnen wir  $x_1 = x_0 + F(x_0, t_0 +) - F(x_0, t_0)$ . Offenbar ist  $x_1 = x_0$ , wenn  $(x_0, t_0) \in G_l$  ist und  $x_1 = x_0 + \Phi_l(x_0)$ , wenn  $(x_0, t_0) \in P_l$  ist. Ähnlicherweise wie wir es vor dem Satz 3,1 taten, wählen wir ein  $\sigma > 0$  sodass  $(x, t) \in \bigcup_k G_k$  ist, wenn  $t_0 < t \leq t_0 + \sigma$  und  $\|x - x_1\| \leq h(\tau) - h(t_0)$ ,  $t_0 < \tau \leq t_0 + \sigma$  ist. So ein  $\sigma > 0$  kann mit Rücksicht auf die Voraussetzung (V 2) tatsächlich gefunden werden. Nach dem Satz 3,1 existiert im Intervall  $\langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$  eine Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung (4,12), für welche  $\|x(\tau) - x_1\| \leq h(\tau) - h(t_0)$  ist und  $x(t_0) = x_0$  gilt. Der Konstruktion von  $\sigma > 0$  nach ist also  $(x(\tau), \tau) \in \bigcup_k G_k$  für  $\tau \in \langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$  und also ist  $x(\tau)$  in  $\langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$  eine Lösung der Gleichung (4,10). Dieses sichert also den folgenden

**Satz 4.2.** Sei  $(x_0, t_0) \in G$  und  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ , wobei das System  $\{\varphi_k, \Phi_k\}$  die Voraussetzungen von der Einleitung dieses Absatzes erfüllt. Dann kann ein  $\sigma > 0$  so gefunden werden, dass auf  $\langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$  eine Lösung  $x(\tau)$  der Gleichung (4,10) so existiert, dass  $x(t_0) = x_0$  ist.

Der Satz 4,2 sichert also die lokale Existenz einer Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung (4,10). Für die Gleichung (4,10) gilt auch der

**Satz 4.3.** Sei  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_e, \Phi_e\})$  und sei  $x(\tau)$  eine Lösung der Gleichung (4,10) in  $\langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$ ,  $\sigma > 0$ ;  $y(\tau)$  eine Lösung der Gleichung (4,10) in  $\langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$ ,  $0 < \alpha < \sigma$  und es gelte  $x(t_0) = y(t_0)$ . Dann gilt  $y(\tau) = x(\tau)$  für alle  $\tau \in \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$ .

Den Beweis kann man so, wie bei dem Satz 3,2 führen.

Die bisherigen Behauptungen über die Gleichung (4,10) sichern die Richtigkeit der Behauptung von Lemma 3,4 für die Gleichung (4,10) und ermöglichen also auch eine Globallösung der Gleichung (4,10) nach der Definition 3,2 zu bestimmen.

Über verallgemeinerte Differentialgleichungen von Kurzweil kann man allgemein folgendes behaupten:

**Behauptung 4.1.** Es seien  $F_1(x, t)$  und  $F_2(x, t)$  Funktionen, welche in  $G$  definiert sind und deren Werte in  $E_n$  liegen. Sei  $\Delta_t^{t_2-t_1} F_1(x, t_1) = \Delta_t^{t_2-t_1} F_2(x, t_1)$  für alle  $(x, t_1), (x, t_2) \in G$ . Wenn  $x(\tau)$  im Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  eine Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung  $dx/d\tau = DF_1(x, t)$  ist, dann ist  $x(\tau)$  in demselben Intervall

auch eine Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung  $dx/d\tau = DF_2(x, t)$  und umgekehrt.

Beweis. Diese Behauptung folgt unmittelbar vom Lemma 1,3,1 in [1] nach welchem folgendes gilt: Bezeichne man  $U_1(\tau, t) \doteq U_2(\tau, t)$  wenn  $U_1(\tau_0, \tau) - U_1(\tau_0, \tau_0) = U_2(\tau_0, \tau) - U_2(\tau_0, \tau_0)$  für  $\tau_* \leq \tau_0 \leq \tau^*$ ,  $\tau_0 - \delta(\tau_0) \leq \tau \leq \tau_0 + \delta(\tau_0)$  gilt, wobei  $\delta(\tau) > 0$ ,  $\tau \in \langle \tau_*, \tau^* \rangle$ . Dann existiert das Integral  $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU_2(\tau, t)$  und ist dem Integral  $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU_1(\tau, t)$  gleich, wenn  $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU_1(\tau, t)$  existiert und wenn  $U_1 \doteq U_2$  ist. Sei also  $x(\tau)$  eine Lösung der Gleichung  $dx/d\tau = DF_1(x, t)$  im Intervall  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ . Dann gilt der Definition nach  $x(\eta_2) - x(\eta_1) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} DF_1(x(\tau), t)$  für alle  $\eta_1 < \eta_2$ ,  $\eta_1, \eta_2 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ . Der Voraussetzung nach ist  $F_1(x(\tau), t) \doteq F_2(x(\tau), t)$  und also existiert für alle  $\eta_1 < \eta_2$ ,  $\eta_1, \eta_2 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  auch  $\int_{\eta_1}^{\eta_2} DF_2(x(\tau), t)$  und es gilt  $x(\eta_2) - x(\eta_1) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} DF_2(x(\tau), t)$  für alle  $\sigma_1 \leq \eta_1 < \eta_2 \leq \sigma_2$  d. h. der Definition von einer Lösung nach ist  $x(\tau)$  auch eine Lösung der Gleichung  $dx/d\tau = DF_2(x, t)$ .

Diese einfache Behauptung ermöglicht uns nun auf eine andere Weise eine Funktion  $F^*(x, t)$  zu definieren, sodass die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$(4,13) \quad \frac{dx}{d\tau} = DF^*(x, t)$$

mit der Gleichung (4,10) äquivalent sein wird (wenn (4,10) definiert ist) in dem Sinne, dass jede Lösung der Gleichung (4,10) zugleich auch eine Lösung der Gleichung (4,13) und umgekehrt sein wird. Nach der Behauptung 4,1 genügt dazu, dass  $\Delta_t^{t_2-t_1} F(x, t_1) = \Delta_t^{t_2-t_1} F^*(x, t_1)$  für  $(x, t_1), (x, t_2) \in G$  gilt. Wir wollen da die Funktion  $F^*(x, t)$  so definieren, dass man die etwas unangenehme Voraussetzung über die Konvergenz der Reihe in (4,4) beseitigen kann, wenn man passend die rechte Seite der Gleichung (4,13) definiert.

Für  $(x, t) \in G$  definieren wir eine Funktion  $s(x, t)$  folgendermassen: für  $x \in M$  sei  $s(x, t) = k$  wenn  $\varphi_k(x) < t \leq \varphi_{k+1}(x)$  ist. Sei nun  $l_x$  für jedes  $x \in M$  eine beliebige ganze Zahl; legen wir für  $(x, t) \in G$

$$(4,14) \quad \tilde{F}^*(x, t) = \sum_{i=l_x}^{s(x,t)} \Phi_i(x)$$

(dabei sei für  $N_1 > N_2$  ( $N_1, N_2$  ganz)  $\sum_{i=N_1}^{N_2} = - \sum_{i=N_2}^{N_1}$ ). Es ist offenbar

$$(4,15) \quad \Delta_t^{t_2-t_1} \tilde{F}^*(x, t_1) = \sum_{i=l_x}^{s(x,t_2)} \Phi_i(x) - \sum_{i=l_x}^{s(x,t_1)} \Phi_i(x) = \sum_{i=s(x,t_1)+1}^{s(x,t_2)} \Phi_i(x).$$

Untersuchen wir nun die Funktion  $\tilde{F}(x, t)$  von (4,4). Sei  $(x, t_i) \in G$ ,  $i = 1, 2$ . Dann gibt es der Voraussetzung (4,1) nach offenbar ganze Zahlen  $l_1, l_2$  sodass  $\varphi_{l_i}(x) < t_i \leq \varphi_{l_i+1}(x)$ ,  $i = 1, 2$  sein wird. Für die in (4,3) definierte Funktion  $\tilde{F}_k(x, t)$  gilt

so  $\tilde{F}_k(x, t_i) = 0$  wenn  $k \geq l_i + 1$  ist und also ist  $\tilde{F}(x, t_i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}_k(x, t_i) = \sum_{k=-\infty}^{l_i} \Phi_k(x)$ . Daher ist

$$(4,16) \quad \Delta_i^{t_2-t_1} \tilde{F}(x, t_1) = \sum_{k=-\infty}^2 \Phi_k(x) - \sum_{k=-\infty}^1 \Phi_k(x) = \sum_{k=l_1+1}^2 \Phi_k(x).$$

Der Definition von der Funktion  $s(x, t)$  nach aber ist offenbar  $l_i = s(x, t_i)$ ,  $i = 1, 2$  und also gibt (4,15) und (4,16) die Gleichung

$$(4,17) \quad \Delta_i^{t_2-t_1} \tilde{F}(x, t_1) = \Delta_i^{t_2-t_1} \tilde{F}^*(x, t_1), \quad (x, t_i) \in G, \quad i = 1, 2.$$

Sei nun  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  d. h.  $F(x, t) = \tilde{F}(x, t) + \hat{F}(x, t)$ , wo  $\tilde{F}(x, t)$  die Funktion von (4,4) ist und  $\tilde{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$ . Sei weiter  $\hat{F}^*(x, t) : G \rightarrow E_n$  und es gelte  $\Delta_i^{t_2-t_1} \hat{F}^*(x, t_1) = \Delta_i^{t_2-t_1} \hat{F}(x, t_1)$  für alle  $(x, t_i) \in G$ ,  $i = 1, 2$ . Offenbar ist dann  $\hat{F}^*(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)$ . Definieren wir weiter noch  $F^*(x, t) = \tilde{F}^*(x, t) + \hat{F}^*(x, t)$ . Nach (4,17) ist also  $\Delta_i^{t_2-t_1} F^*(x, t_1) = \Delta_i^{t_2-t_1} F(x, t_1)$ ,  $(x, t_i) \in G$ ,  $i = 1, 2$  und der Behauptung 4,1 nach ist jede Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung (4,10) zugleich auch eine Lösung der Gleichung (4,13) (wenn (4,10) definiert ist) und umgekehrt. Definiere man (ähnlich wie in (4,5))

$$(4,14) \quad \mathcal{F}^*(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\}) = \{F(x, t) : G \rightarrow E_n; F(x, t) = \tilde{F}^*(x, t) + \hat{F}(x, t), \tilde{F}^*(x, t) \text{ von (4,14), } \hat{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, h)\}.$$

Alle Sätze und Lemmas von diesem Absatz werden also gelten, wenn man in denen anstatt  $F(x, t) \in \mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  voraussetzt, dass  $F(x, t) \in \mathcal{F}^*(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  ist. Die Klasse  $\mathcal{F}^*(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  ist aber allgemeiner als  $\mathcal{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$  nachdem  $\tilde{F}(x, t)$  auch dann definiert werden kann, wenn  $\tilde{F}(x, t)$  keinen Sinn hat.

#### Literaturhinweise

- [1] Kurzweil J.: Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, Czech. Math. J. 7 (82) 1957), 418—449.
- [2] Kurzweil J.: Generalized ordinary differential equations, Czech. Math. J., 8 (83), 1958, 360—388.
- [3] Kurzweil J.: Problems which leads to a generalization of the concept of an ordinary nonlinear differential equation. Differential equations and their applications, Proc. of the Conf. held in Prague in September 1962, Publ. House of the Czech. Acad. of Sciences, Prague 1963.
- [4] Schwabik Š.: Stetige Abhängigkeit von einem Parameter und invariante Mannigfaltigkeiten für verallgemeinerte Differentialgleichungen, Czech. Math. J., 19 (94), (1969), 398—427.
- [5] Schwabik Š.: Über ein Differentialgleichungssystem mit unstetigen Lösungen endlicher Variation, Zeitschrift für angewandte Math. u. Mech., Sonderheft GAMM, Band 48 (1968), T31—T32.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV v Praze).