Karel Svoboda

Sur la déformation projective des systèmes osculateurs d'une congruence de droites

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 20 (1970), No. 2, 315–326

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100968

Czechoslovak Mathematical Journal, 20 (95) 1970, Praha

SUR LA DÉFORMATION PROJECTIVE DES SYSTÈMES OSCULATEURS D'UNE CONGRUENCE DE DROITES

KAREL SVOBODA, Brno

(Reçu le 15 mai 1969)

1. Soit L une congruence non-parabolique de droites dans un espace projectif P_N $(N \geqq 5)$ à N dimensions dont les foyers engendrent deux surfaces focales douées, l'une et l'autre, précisément d'un réseau conjugué. Considérons une droite particulière quelconque p de L. On a le long de p les espaces osculateurs de L des différents ordres, un tel espace S_k d'ordre k $(k \geqq 1)$ étant par définition l'union linéaire des espaces osculateurs d'ordre k des surfaces focales de L aux foyers situés sur p. Simultanément avec L envisageons l'ensemble $\tilde{L}_k$ engendré par les espaces osculateurs S_k d'ordre k le long des droites de L. Nous appellerons $\tilde{L}_k$ *système osculateur d'ordre* k de la congruence L.

Cela étant, considérons un repère mobile de P_N formé de $N + 1$ points analytiques linéairement indépendants A_i $(i = 1, \ldots, N + 1)$. Le mouvement infinitésimal du repère en question est exprimé par le système suivant d'équations différentielles

$$\mathrm{d}A_i = \sum_{j=1}^{N+1} \omega_i^j A_j \quad (i = 1, \ldots, N + 1) \tag{1}$$

dont les coefficients satisfont aux équations de structure

$$d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{N+1} \omega_i^k \wedge \omega_k^j \quad (i, j = 1, \ldots, N + 1)\,. \tag{2}$$

En supposant encore que $[A_1 A_2 \ldots A_{N+1}] = 1$ on a

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_{N+1}^{N+1} = 0\,. \tag{3}$$

Nous admettons que les paramètres dont dépend le repère envisagé soient complexes et que toutes les fonctions qui figurent dans les considérations suivantes soient analytiques.

Choisissons un nombre entier n de manière que $3 \leqq n \leqq \frac{1}{2}(N + 1)$ et supposons que $\dim S_k = 2k + 1$ $(k = 1, \ldots, n - 1)$. Faisons correspondre, à une droite quelconque p de L, un repère mobile de manière que A_1, A_2 soient les foyers situés sur p et que $[A_1 \dots A_{2k}A_{2k+1}]$ resp. $[A_1 \dots A_{2k}A_{2k+2}]$ soit l'espace osculateur d' ordre k $(k = 1, \dots, n-1)$ de la surface focale (A_1) resp. (A_2) au point A_1 resp. A_2. On a alors évidemment $S_k = [A_1 \dots A_{2k+2}]$ $(k = 1, \dots, n-1)$.

Cela étant, les suppositions faites au sujet du choix du repère en question sont exprimées par les équations

$$\omega_{2i-1}^{2i+2} = 0\,, \quad \omega_{2i}^{2i+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)\,, \tag{4}$$

$$\omega_{2i-1}^{s} = 0\,, \quad \omega_{2i}^{s} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1;\ s = 2i+3, \dots, N+1) \tag{5}$$

à condition de supprimer dans (5) les équations qui résultent pour $i = n-1$ si $N = 2n-1$. Dans ce qui suit, nous supposons que les formes

$$\omega_1^3 = \omega_1\,, \quad \omega_2^4 = \omega_2 \tag{6}$$

soient linéairement indépendantes.

Les conditions d'intégrabilité des équations écrites dans (5) pour $i = 1, \dots, n-2$ sont

$$\omega_{2i-1}^{2i+1} \wedge \omega_{2i+1}^{2i+3} = 0\,, \quad \omega_{2i}^{2i+2} \wedge \omega_{2i+2}^{2i+4} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-2)\,.$$

On en obtient, en vertu de (6), les équations

$$\omega_{2i+1}^{2i+3} = \alpha_{2i+1}^{2i+3}\omega_1\,, \quad \omega_{2i+2}^{2i+4} = \alpha_{2i+2}^{2i+4}\omega_2 \quad (i = 1, \dots, n-2)$$

qui entraînent, d'après les formules de structure (2), les relations extérieures

$$\omega_1 \wedge \{d\alpha_{2i+1}^{2i+3} + \alpha_{2i+1}^{2i+3}(\omega_{2i+3}^{2i+3} - \omega_{2i+1}^{2i+1} + \omega_1^1 - \omega_3^3)\} = 0\,,$$
$$\omega_2 \wedge \{d\alpha_{2i+2}^{2i+4} + \alpha_{2i+2}^{2i+4}(\omega_{2i+4}^{2i+4} - \omega_{2i+2}^{2i+2} + \omega_2^2 - \omega_4^4)\} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-2)\,.$$

Sans restreindre la généralité, on peut poser $\alpha_{2i+1}^{2i+3} = 1$, $\alpha_{2i+2}^{2i+4} = 1$ $(i = 1, \dots, n-2)$ de sorte que l'on a les équations

$$\omega_{2i+1}^{2i+3} = \omega_1\,, \quad \omega_{2i+2}^{2i+4} = \omega_2 \quad (i = 1, \dots, n-2) \tag{7}$$

avec les conditions d'intégrabilité

$$\begin{aligned} &\omega_1 \wedge (\omega_{2i+3}^{2i+3} - \omega_{2i+1}^{2i+1} + \omega_1^1 - \omega_3^3) = 0\,, \\ &\omega_2 \wedge (\omega_{2i+4}^{2i+4} - \omega_{2i+2}^{2i+2} + \omega_2^2 - \omega_4^4) = 0 \quad (i = 1, \dots, n-2)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Par aller plus loin, appliquons les formules de structure (2) aux équations (4). Nous avons

$$\omega_1 \wedge \omega_{2i+1}^{2i+2} - \omega_2 \wedge \omega_{2i-1}^{2i} = 0\,,$$
$$\omega_1 \wedge \omega_{2i}^{2i-1} - \omega_2 \wedge \omega_{2i+2}^{2i+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

et ces formules entraînent les équations

$$\begin{aligned}
(9)\qquad \omega_{2i-1}^{2i} &= -\alpha_{2i+1}^{2i+2}\omega_1 + \alpha_{2i-1}^{2i}\omega_2\,,\\
\omega_{2i}^{2i-1} &= \alpha_{2i}^{2i-1}\omega_1 - \alpha_{2i+2}^{2i+1}\omega_2 \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.
\end{aligned}$$

On a en outre, dans le cas de $N > 2n - 1$, les relations extérieures

$$\omega_1 \wedge \omega_{2n-1}^j = 0\,, \quad \omega_2 \wedge \omega_{2n}^j = 0 \quad (j = 2n + 1, \ldots, N + 1)$$

qui résultent par différentiation extérieure des équations écrites dans (5) pour $i = n - 1$ et qui entraînent

$$(10)\qquad \omega_{2n-1}^j = \gamma_1^j\omega_1\,, \quad \omega_{2n}^j = \gamma_2^j\omega_2 \quad (j = 2n + 1, \ldots, N + 1)\,.$$

Les formules de structure appliquées aux équations (9) donnent les relations extérieures

$$\begin{aligned}
&\omega_1 \wedge \{d\alpha_{2i+1}^{2i+2} + \alpha_{2i+1}^{2i+2}(\omega_{2i}^{2i} - \omega_{2i-1}^{2i-1} + \omega_1^1 - \omega_3^3) - \omega_{2i+1}^{2i}\} -\\
&\quad - \omega_2 \wedge \{d\alpha_{2i-1}^{2i} + \alpha_{2i-1}^{2i}(\omega_{2i}^{2i} - \omega_{2i-1}^{2i-1} + \omega_2^2 - \omega_4^4) - \omega_{2i-1}^{2i-2}\} = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge \{d\alpha_{2i}^{2i-1} + \alpha_{2i}^{2i-1}(\omega_{2i-1}^{2i-1} - \omega_{2i}^{2i} + \omega_1^1 - \omega_3^3) - \omega_{2i}^{2i-3}\} -\\
&\quad - \omega_2 \wedge \{d\alpha_{2i+2}^{2i+1} + \alpha_{2i+2}^{2i+1}(\omega_{2i-1}^{2i-1} - \omega_{2i}^{2i} + \omega_2^2 - \omega_4^4) - \omega_{2i+2}^{2i-1}\} = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge \{d\alpha_{2n+1}^{2n+2} + \alpha_{2n+1}^{2n+2}(\omega_{2n}^{2n} - \omega_{2n-1}^{2n-1} + \omega_1^1 - \omega_3^3) - \sum_{j=2n+1}^{N+1} \gamma_1^j\omega_j^{2n}\} -\\
&\quad - \omega_2 \wedge \{d\alpha_{2n-1}^{2n} + \alpha_{2n-1}^{2n}(\omega_{2n}^{2n} - \omega_{2n-1}^{2n-1} + \omega_2^2 - \omega_4^4) - \omega_{2n-1}^{2n-2}\} = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge \{d\alpha_{2n}^{2n-1} + \alpha_{2n}^{2n-1}(\omega_{2n-1}^{2n-1} - \omega_{2n}^{2n} + \omega_1^1 - \omega_3^3) - \omega_{2n}^{2n-3}\} -\\
&\quad - \omega_2 \wedge \{d\alpha_{2n+2}^{2n+1} + \alpha_{2n+2}^{2n+1}(\omega_{2n-1}^{2n-1} - \omega_{2n}^{2n} + \omega_2^2 - \omega_4^4) - \sum_{j=2n+1}^{N+1} \gamma_2^j\omega_j^{2n-1}\} = 0\\
&\qquad\qquad (i = 1, \ldots, n - 1;\ \omega_1^0 = 0,\ \omega_2^{-1} = 0)\,.
\end{aligned}$$

Il faut supprimer dans les deux dernières équations les sommes $\sum_j \gamma_1^j\omega_j^{2n}$ et $\sum_j \gamma_2^j\omega_j^{2n-1}$ dans le cas de $N = 2n - 1$. Les relations précédentes montrent qu'il est possible de particulariser le repère choisi de manière à prendre $\alpha_{2i+1}^{2i+2} = 0$, $\alpha_{2i+2}^{2i+1} = 0$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$. Cela étant, nous posons $\alpha_1^2 = \alpha_1$, $\alpha_2^1 = \alpha_2$, $\alpha_{2n+1}^{2n+2} = -\beta_2$, $\alpha_{2n+2}^{2n+1} = -\beta_1$ et nous avons, d'après (9), les équations

$$\begin{aligned}
(11)\qquad \omega_1^2 &= \alpha_1\omega_2\,, \quad \omega_{2i-1}^{2i} = 0\,, \quad \omega_{2n-1}^{2n} = \beta_2\omega_1\,,\\
\omega_2^1 &= \alpha_2\omega_1\,, \quad \omega_{2i}^{2i-1} = 0\,, \quad \omega_{2n}^{2n-1} = \beta_1\omega_2 \quad (i = 2, \ldots, n - 1)
\end{aligned}$$

où $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$ et les relations extérieures quadratiques

$$
\begin{aligned}
(12) \qquad & \omega_1 \wedge \omega_3^2 + \omega_2 \wedge \{d\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4)\} = 0\,, \\
& \omega_1 \wedge \{d\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3)\} + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0\,, \\
& \omega_1 \wedge \omega_{2i+1}^{2i} - \omega_2 \wedge \omega_{2i-1}^{2i-2} = 0\,, \\
& \omega_1 \wedge \omega_{2i}^{2i-3} - \omega_2 \wedge \omega_{2i+2}^{2i-1} = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$\omega_1 \wedge \omega_{2n}^{2n-3} - \omega_2 \wedge \{d\beta_1 + \beta_1(\omega_{2n-1}^{2n-1} - \omega_{2n}^{2n} + \omega_2^2 - \omega_4^4) + \sum_{j=2n+1}^{N+1} \gamma_2^j \omega_j^{2n-1}\} = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \{d\beta_2 + \beta_2(\omega_{2n}^{2n} - \omega_{2n-1}^{2n-1} + \omega_1^1 - \omega_3^3) + \sum_{j=2n+1}^{N+1} \gamma_1^j \omega_j^{2n}\} - \omega_2 \wedge \omega_{2n-1}^{2n-2} = 0$$

$$(i = 2, \ldots, n-1)\,,$$

les sommes mentionnées plus haut étant à supprimer dans le cas de $N = 2n - 1$.

D'après les calculs précédents, la congruence L se trouve déterminée par les équations différentielles (4), (5), (7), (10), (11) dont les conditions d'intégrabilité sont données par (8), (12) et, dans le cas de $N > 2n - 1$, par les relations extérieures

$$
\begin{aligned}
(13) \quad & \omega_1 \wedge \{d\gamma_1^j + \gamma_1^j(\omega_j^j - \omega_{2n-1}^{2n-1} + \omega_1^1 - \omega_3^3) + \sum_{k=2n+1}^{N+1} \gamma_1^k \omega_k^j + \beta_2 \gamma_2^j \omega_2\} = 0\,, \\
& \omega_2 \wedge \{d\gamma_2^j + \gamma_2^j(\omega_j^j - \omega_{2n}^{2n} + \omega_2^2 - \omega_4^4) + \sum_{k=2n+1}^{N+1} \gamma_2^k \omega_k^j + \beta_1 \gamma_1^j \omega_1\} = 0
\end{aligned}
$$

$$(j = 2n + 1, \ldots, N + 1;\ k \neq j)$$

qui résultent des équations (10).

En définitive, en choisissant convenablement le repère mobile associé à la congruence L en question, on a le système suivant d'équations différentielles fondamentales

$$
\begin{aligned}
(14) \qquad dA_1 &= \omega_1^1 A_1 + \alpha_1 \omega_2 A_2 + \omega_1 A_3\,, \\
dA_2 &= \alpha_2 \omega_1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2 A_4\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dA_{2i-1} &= \sum_{k=1}^{2i-2} \omega_{2i-1}^k A_k + \omega_{2i-1}^{2i-1} A_{2i-1} + \omega_1 A_{2i+1}\,, \\
dA_{2i} &= \sum_{k=1}^{2i-2} \omega_{2i}^k A_k + \omega_{2i}^{2i} A_{2i} + \omega_2 A_{2i+2}\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dA_{2n-1} &= \sum_{k=1}^{2n-2} \omega_{2n-1}^k A_k + \omega_{2n-1}^{2n-1} A_{2n-1} + \beta_2 \omega_1 A_{2n} + \sum_{s=2n+1}^{N+1} \gamma_1^s \omega_1 A_s\,, \\
dA_{2n} &= \sum_{k+1}^{2n-2} \omega_{2n}^k A_k + \beta_1 \omega_2 A_{2n-1} + \omega_{2n}^{2n} A_{2n} + \sum_{s=2n+1}^{N+1} \gamma_2^s \omega_2 A_s\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dA_j &= \sum_{k=1}^{N+1} \omega_j^k A_k
\end{aligned}
$$

$$(i = 2, \ldots, n-1;\ j = 2n+1, \ldots, N+1)\,,$$

les expressions $\sum_s \gamma_1^s \omega_1 A_s$ et $\sum_s \gamma_2^s \omega_2 A_s$ ainsi que les équations exprimant $\mathrm{d}A_j$ étant à supprimer si $N = 2n - 1$.

Le système précédent (14) coïncide, dans les cas particuliers de $N = 2n - 1$ et $N = 2n$, avec ceux considérés dans [1]. Dans le cas de $N = 2n - 1$, le système $\tilde{L}_{n-2}$ peut être régardé, dans l'espace corrélatif à P_{2n-1}, comme une congruence non-parabolique appelée dualisation de la congruence L. Dans ce qui suit, nous allons nous borner au cas le plus général en supposant que la dualisation de L possède deux surfaces focales. Cette supposition est exprimée par l'inégalité $\beta_1 \beta_2 \neq 0$. Dans le cas de $N = 2n$, le système $\tilde{L}_{n-1}$ se présente, dans l'espace corrélatif à P_{2n}, comme la dualisation de la congruence L. Dans la suite, nous ne considérons que les congruences dont la dualisation est une surface. Cela exige de supposer $\gamma_1^{2n+1} \gamma_2^{2n+1} \neq 0$.

2. Nous allons nous occuper des considérations relatives à la déformation projective du système osculateur $\tilde{L}_{n-2}$ d'ordre $n - 2$ d'une congruence de droites L. Le nombre n étant choisi à l'avance, nous pouvons simplifier les notations employées jusqu' à présent de manière à remplacer les symboles S_{n-2} et $\tilde{L}_{n-2}$ par $\tilde{S}$ et $\tilde{L}$.

Soit L' une autre congruence non-parabolique plongée dans un espace projectif P'_N et $\tilde{L}'$ le système osculateur correspondant d'ordre $n - 2$ de L'. Nous introduisons pour L' des notations analogues à celles employées pour L, en indiquant avec des accents toutes les expressions relatives à L'. Pour abréger, nous posons

$$(15) \qquad \tau_i^j = \omega_i'^j - \omega_i^j \quad (i, j = 1, \ldots, N + 1).$$

Considérons une correspondance biunivoque $\boldsymbol{C} : L \to L'$ entre L et L' ainsi que la correspondance $\tilde{\boldsymbol{C}} : \tilde{L} \to \tilde{L}'$ induite, d'une manière naturelle, par $\boldsymbol{C}$ entre $\tilde{L}$ et $\tilde{L}'$. Rappelons qu'une correspondance $\boldsymbol{C}$ est dite développable si elle porte chaque surface développable contenue dans L dans une surface développable contenue dans L'.

Nous dirons que $\tilde{\boldsymbol{C}} : \tilde{L} - \tilde{L}'$ est une *déformation projective d'ordre* r $(r \geqq 1)$ si, pour chaque couple d'éléments correspondants $\tilde{S} \in \tilde{L}$ et $\tilde{S}' \in \tilde{L}'$ $(\tilde{S}' = \tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{S})$, il existe au moins une homographie régulière $K : P_N \to P'_N$ de manière que $K\tilde{L}$ et $\tilde{L}'$ ont un contact analytique d'ordre r en $\tilde{S}' = \tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{S}$. Dans ce cas, on dit que K réalise la déformation projective $\tilde{\boldsymbol{C}}$ d'ordre r.

Dans ce qui suit, nous allons chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour la déformation projective $\tilde{\boldsymbol{C}}$ d'ordre $r = 1$ et $r = 2$. Une homographie K réalisant la déformation projective $\tilde{\boldsymbol{C}}$ d'ordre $r = 1$ ou. $r = 2$ sera appelée resp. *homographie tangente* ou *osculatrice* à $\tilde{\boldsymbol{C}}$.

Pour qu'une correspondance $\tilde{\boldsymbol{C}} : \tilde{L} \to \tilde{L}'$ puisse être regardée comme une déformation projective d'ordre r, il faut et il suffit qu'il existe une homographie $K : P_N \to P'_N$,

$$(16) \qquad KA_i = \sum_{j=1}^{N+1} c_i^j A'_j, \quad \det |c_i^j| \neq 0 \quad (i, j = 1, \ldots, N + 1)$$

de manière que l'on ait, dans le cas de $r = 1$, les relations

$$(17) \qquad K[A_1 \dots A_{2n-2}] = [A'_1 \dots A'_{2n-2}],$$

$$(18) \qquad K\,\mathrm{d}[A_1 \dots A_{2n-2}] = \mathrm{d}[A'_1 \dots A'_{2n-2}] + \vartheta[A'_1 \dots A'_{2n-2}]$$

et, dans le cas de $r = 2$, la relation ultérieure suivante

$$(19) \qquad K\,\mathrm{d}^2[A_1 \dots A_{2n-2}] = \mathrm{d}^2[A'_1 \dots A'_{2n-2}] + 2\vartheta\,\mathrm{d}[A'_1 \dots A'_{2n-2}] \quad (\mathrm{mod}\ [A'_1 \dots A'_{2n-2}])$$

où ϑ est une forme de Pfaff convenable. On en obtient les conditions cherchées pour la déformation envisagée en portant dans les équations précédentes les expressions

$$(20) \qquad \mathrm{d}[A_1 \dots A_{2n-2}] = \Big(\sum_{i=1}^{2n-2} \omega_i^i\Big)[A_1 \dots A_{2n-2}] - \\ - \omega_1[A_1 \dots A_{2n-4}A_{2n-2}A_{2n-1}] + \omega_2[A_1 \dots A_{2n-4}A_{2n-3}A_{2n}]$$

et

$$(21) \qquad \mathrm{d}^2[A_1 \dots A_{2n-2}] = (.)\,[A_1 \dots A_{2n-2}] - \\ - \{\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1(2\sum_{i=1}^{2n-2} \omega_i^i - \omega_{2n-3}^{2n-3} + \omega_{2n-1}^{2n-1})\}\,[A_1 \dots A_{2n-4}A_{2n-2}A_{2n-1}] + \\ + \{\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2(2\sum_{i=1}^{2n-2} \omega_i^i - \omega_{2n-2}^{2n-2} + \omega_{2n}^{2n})\}\,[A_1 \dots A_{2n-4}A_{2n-3}A_{2n}] - \\ - \beta_2(\omega_1)^2\,[A_1 \dots A_{2n-4}A_{2n-2}A_{2n}] + \\ + \beta_1(\omega_2)^2\,[A_1 \dots A_{2n-4}A_{2n-3}A_{2n-1}] - \\ - \sum_{s=2n+1}^{N+1} \gamma_1^s(\omega_1)^2\,[A_1 \dots A_{2n-4}A_{2n-2}A_s] + \\ + \sum_{s=2n+1}^{N+1} \gamma_2^s(\omega_2)^2\,[A_1 \dots A_{2n-4}A_{2n-3}A_s] + \\ + (\omega_1)^2\,[A_1 \dots A_{2n-6}A_{2n-4}A_{2n-3}A_{2n-2}A_{2n-1}] - \\ - (\omega_2)^2\,[A_1 \dots A_{2n-6}A_{2n-5}A_{2n-3}A_{2n-2}A_{2n}] + \\ + 2\omega_1\omega_2[A_1 \dots A_{2n-4}A_{2n-1}A_{2n}],$$

relatives à L, ainsi que les expressions analogues pour L'. Dans ces formules et dans celles qui suivent, nous laissons de côté les remarques relatives à la restriction correspondante dans le cas particulier de $N = 2n - 1$.

Cela étant, nous allons démontrer le résultat suivant:

Proposition 1. *La correspondance $\tilde{C} : \tilde{L} \to \tilde{L}'$, induite par une correspondance $C : L \to L'$, est une déformation projective du premier ordre si et seulement si C est développable.*

Démonstration. Supposons que $\tilde{C} : \tilde{L} - \tilde{L}'$ soit une déformation projective du premier ordre. On a alors, en vertu de (17),

$$(22) \qquad c_i^s = 0\,, \quad C = \det|c_i^j| = 1 \quad (i, j = 1, \ldots, 2n-2;\; s = 2n-1, \ldots, N+1)\,.$$

Pour abréger, désignons par C_{2n-1} resp. C_{2n} le déterminant qui résulte de C en y remplaçant la $(2n-3)$-ième resp. $(2n-2)$-ième ligne par $c_{2n-1}^1, \ldots, c_{2n-1}^{2n-2}$ resp. $c_{2n}^1, \ldots, c_{2n}^{2n-2}$ et, en outre, par C_i^j le complément algébrique de c_i^j dans le déterminant C. Cela étant, on obtient sans aucune espèce de difficulté

$$(23) \qquad K[A_1 \ldots A_{2n-4}A_{2n-2}A_{2n-1}] = -C_{2n-1}[A_1' \ldots A_{2n-2}'] + \\ + \sum_{i=1}^{2n-2} (-1)^{i-1} C_{2n-3}^i \Big(\sum_{j=2n-1}^{N+1} c_{2n-1}^j [A_1' \ldots A_{i-1}'A_{i+1}' \ldots A_{2n-2}'A_j'] \Big)\,,$$

$$K[A_1 \ldots A_{2n-4}A_{2n-3}A_{2n}] = C_{2n}[A_1' \ldots A_{2n-2}'] + \\ + \sum_{i=1}^{2n-2} (-1)^{i} C_{2n-2}^i \Big(\sum_{j=2n-1}^{N+1} c_{2n}^j [A_1' \ldots A_{i-1}'A_{i+1}' \ldots A_{2n-2}'A_j'] \Big)\,.$$

Faisant usage de (20) et (23), l'équation précédente (18) nous donne les relations

$$(24) \quad \vartheta = C_{2n-1}\omega_1 + C_{2n}\omega_2 - \sum_{i=1}^{2n-2} \tau_i^i\,,$$

$$C_{2n-3}^i c_{2n-1}^j = 0\,, \quad C_{2n-2}^i c_{2n}^j = 0 \quad (i = 1, \ldots, 2n-4;\; j = 2n-1, \ldots, N+1)\,,$$

$$C_{2n-3}^{2n-3} c_{2n-1}^{2n} = 0\,, \quad C_{2n-2}^{2n-3} c_{2n}^{2n} = 0\,,$$

$$C_{2n-3}^{2n-3} c_{2n-1}^j = 0\,, \quad C_{2n-2}^{2n-3} c_{2n}^j = 0 \quad (j = 2n+1, \ldots, N+1)\,,$$

$$C_{2n-3}^{2n-2} c_{2n-1}^{2n-1} = 0\,, \quad C_{2n-2}^{2n-2} c_{2n}^{2n-1} = 0\,,$$

$$C_{2n-3}^{2n-2} c_{2n-1}^j = 0\,, \quad C_{2n-2}^{2n-2} c_{2n}^j = 0 \quad (j = 2n+1, \ldots, N+1)\,,$$

$$C_{2n-3}^{2n-3} c_{2n-1}^{2n-1}\omega_1 + C_{2n-2}^{2n-3} c_{2n}^{2n-1}\omega_2 = \omega_1'\,,$$

$$C_{2n-3}^{2n-2} c_{2n-1}^{2n}\omega_1 + C_{2n-2}^{2n-2} c_{2n}^{2n}\omega_2 = \omega_2'\,.$$

Or, la forme des équations écrites dans la seconde ligne et le fait que K doit être régulière met en évidence que $C_{2n-3}^i = 0$ $C_{2n-2}^i = 0$ $(i = 1, \ldots, 2n-4)$. De plus, comme $\det|C_i^j| = 1$ $(i, j = 1, \ldots, 2n-2)$, on peut s'arranger que $C_{2n-3}^{2n-3}C_{2n-2}^{2n-2} - C_{2n-3}^{2n-2}C_{2n-2}^{2n-3} = 1$ ou bien

$$(25) \qquad \det|c_i^j| = 1 \quad (i, j = 1, \ldots, 2n-4)\,.$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que $C_{2n-3}^{2n-3} \neq 0$. On a alors

$$(26) \qquad c_{2n-1}^{2n} = 0\,, \quad c_{2n-1}^j = 0 \quad (j = 2n+1, \ldots, N+1)$$

tandis que, d'après la supposition signalée dans (16), $c_{2n-1}^{2n-1} \neq 0$ ce qui entraîne $C_{2n-3}^{2n-2} = 0$. Dans ce cas, on a maintenant $C_{2n-2}^{2n-2} \neq 0$ et il en résulte

$$(27) \qquad c_{2n}^{2n-1} = 0\,, \quad c_{2n}^j = 0 \quad (j = 2n+1, \ldots, N+1)$$

tandis que $c_{2n}^{2n} \neq 0$. On a donc encore $C_{2n-2}^{2n-3} = 0$ et les deux dernières équations (24) prennent la forme

$$C_{2n-3}^{2n-3} c_{2n-1}^{2n-1} \omega_1 = \omega_1' , \quad C_{2n-2}^{2n-2} c_{2n}^{2n} \omega_2 = \omega_2' \tag{28}$$

de sorte que la correspondance envisagée $C : L \to L'$ est développable.

Inversement, il est aisé de voir que chaque correspondance induite par une correspondance développable est une déformation projective du premier ordre. La proposition précédente est ainsi démontrée.

D'après ce qui précède, l'homographie K la plus générale qui réalise la déformation projective du premier ordre est déterminée par les équations (16), (22), (25), (26), (27) et

$$C_{2n-3}^{i} = 0 , \quad C_{2n-3}^{2n-2} = 0 , \quad C_{2n-2}^{i} = 0 , \quad C_{2n-2}^{2n-3} = 0 \quad (i = 1, \ldots, 2n-4) .$$

En appliquant le théorème de Laplace, on en déduit

$$c_i^{2n-3} = 0 , \quad c_{2n-2}^{2n-3} = 0 , \quad c_i^{2n-2} = 0 , \quad c_{2n-3}^{2n-2} = 0 \quad (i = 1, \ldots, 2n-4) \tag{29}$$

et

$$C_{2n-3}^{2n-3} c_{2n-3}^{2n-3} = 1 , \quad C_{2n-2}^{2n-2} c_{2n-2}^{2n-2} = 1 . \tag{30}$$

Or, rien n'empêche de poser dans (28)

$$C_{2n-3}^{2n-3} c_{2n-1}^{2n-1} = 1 , \quad C_{2n-2}^{2n-2} c_{2n}^{2n} = 1 . \tag{31}$$

Cela étant, on a, en vertu de (22), (25), $C_{2n-3}^{2n-3} = c_{2n-2}^{2n-2}$, $C_{2n-2}^{2n-2} = c_{2n-3}^{2n-3}$ et les équations (29) et (30) donnent

$$c_{2n-3}^{2n-3} = c_{2n-1}^{2n-1} = \sigma , \quad c_{2n-2}^{2n-2} c_{2n}^{2n} = \sigma^{-1} \quad (\sigma \neq 0) .$$

En définitive, les homographies tangentes à $\widetilde{C}$ sont données par les équations

$$\begin{aligned}
KA_i &= \sum_{k=1}^{2n-4} c_i^k A_k' \quad (i = 1, \ldots, 2n-4;\ \det |c_i^k| = 1) ,\\
KA_{2n-3} &= \sum_{k=1}^{2n-4} c_{2n-3}^k A_k' + \sigma A_{2n-3}' ,\\
KA_{2n-2} &= \sum_{k=1}^{2n-4} c_{2n-2}^k A_k' \qquad\qquad + \sigma^{-1} A_{2n-2}' ,\\
KA_{2n-1} &= \sum_{k=1}^{2n-2} c_{2n-1}^k A_k' + \sigma A_{2n-1}' ,\\
KA_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n-2} c_{2n}^k A_k' \qquad\qquad + \sigma^{-1} A_{2n}' ,\\
KA_j &= \sum_{k=1}^{N+1} c_j^k A_k' \quad (j = 2n+1, \ldots, N+1) .
\end{aligned} \tag{32}$$

On en voit que chaque homographie réalisant la déformation projective du premier ordre $\tilde{C} : \tilde{L} \to \tilde{L}'$ porte les espaces osculateurs d'ordre $n-3$ et $n-1$ des surfaces focales de la congruence L dans ceux de la congruence L'.

De plus, nous avons $C_{2n-1} = \sigma^{-1} c_{2n-1}^{2n-3}$, $C_{2n} = \sigma c_{2n}^{2n-2}$ ce qui permet, d'après (24), d'écrire la forme ϑ sous la forme

$$\vartheta = \sigma^{-1} c_{2n-1}^{2n-3} \omega_1 + \sigma c_{2n}^{2n-2} \omega_2 - \sum_{i=1}^{2n-2} \tau_i^i . \tag{33}$$

En tenant compte de (29) nous avons, d'après (28), $\omega_1 = \omega_1'$, $\omega_2 = \omega_2'$. Faisant usage de (15), on en obtient, d'après (6) et (7), les équations

$$\tau_{2i-1}^{2i+1} = 0 , \quad \tau_{2i}^{2i+2} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1) . \tag{34}$$

Les équations de structure appliquées à (34) donnent les relations extérieures

$$\omega_1 \wedge \left(\tau_{2i+1}^{2i+1} - \tau_{2i-1}^{2i-1}\right) = 0 , \quad \omega_2 \wedge \left(\tau_{2i+2}^{2i+2} - \tau_{2i}^{2i}\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

qui entraînent

$$\tau_{2i+1}^{2i+1} - \tau_{2i-1}^{2i-1} = f_{2i-1} \omega_1 , \quad \tau_{2i+2}^{2i+2} - \tau_{2i}^{2i} = f_{2i} \omega_2 \quad (i = 1, \ldots, n-1) . \tag{35}$$

3. Les considérations suivantes seront consacrées à l'étude de la déformation projective du second ordre des systèmes osculateurs envisagés. Les résultats correspondants dépendent, d'une manière essentielle, de la dimension N et nous allons nous occuper, en première ligne, du cas général de $N \geqq 2n$.

Proposition 2. *Soit $N \geqq 2n$. Chaque correspondance $\tilde{C} : \tilde{L} \to \tilde{L}'$, induite par une correspondance développable $C : L \to L'$, est une déformation projective du second ordre.*

Démonstration. Supposons que $\tilde{C} : \tilde{L}' \to \tilde{L}'$ soit une déformation projective du second ordre et qu'elle soit réalisée par une homographie K de la forme (32). Cela étant, on trouve facilement, mod $[A_1' \ldots A_{2n-2}']$,

$$\begin{aligned}
K[A_1 \ldots A_{2n-4} A_{2n-2} A_{2n-1}] &= [A_1' \ldots A_{2n-4}' A_{2n-2}' A_{2n-1}'] , \\
K[A_1 \ldots A_{2n-4} A_{2n-3} A_{2n}] &= [A_1' \ldots A_{2n-4}' A_{2n-3}' A_{2n}'] , \\
K[A_1 \ldots A_{2n-4} A_{2n-2} A_{2n}] &= \sigma^{-2} [A_1' \ldots A_{2n-4}' A_{2n-2}' A_{2n}'] , \\
K[A_1 \ldots A_{2n-4} A_{2n-3} A_{2n-1}] &= \sigma^{2} [A_1' \ldots A_{2n-4}' A_{2n-3}' A_{2n-1}'] , \\
K[A_1 \ldots A_{2n-4} A_{2n-2} A_s] &= \sum_{t=2n-1}^{N+1} \sigma^{-1} c_s^t [A_1' \ldots A_{2n-4}' A_{2n-2}' A_t'] , \\
K[A_1 \ldots A_{2n-4} A_{2n-3} A_s] &= \sum_{t=2n-1}^{N+1} \sigma c_s^t [A_1' \ldots A_{2n-4}' A_{2n-3}' A_t'] \\
&\qquad (s = 2n+1, \ldots, N+1) ,
\end{aligned} \tag{36}$$

$$K[A_1 \dots A_{2n-6}A_{2n-4}A_{2n-3}A_{2n-2}A_{2n-1}] =$$
$$= C_0(c_{2n-4}^{2n-5}c_{2n-3}^{2n-4} - c_{2n-4}^{2n-4}c_{2n-3}^{2n-5})\,[A'_1 \dots A'_{2n-4}A'_{2n-2}A'_{2n-1}] +$$
$$+ C_0\sigma^2(c_{2n-4}^{2n-4}c_{2n-2}^{2n-5} - c_{2n-4}^{2n-5}c_{2n-2}^{2n-4})\,[A'_1 \dots A'_{2n-4}A'_{2n-3}A'_{2n-1}] +$$
$$+ C_0\sigma c_{2n-4}^{2n-5}[A'_1 \dots A'_{2n-6}A'_{2n-5}A'_{2n-3}A'_{2n-2}A'_{2n-1}] +$$
$$+ C_0\sigma c_{2n-4}^{2n-4}[A'_1 \dots A'_{2n-6}A'_{2n-4}A'_{2n-3}A'_{2n-2}A'_{2n-1}]\,,$$

$$K[A_1 \dots A_{2n-6}A_{2n-5}A_{2n-3}A_{2n-2}A_{2n}] =$$
$$= C_0\sigma^{-2}(c_{2n-5}^{2n-5}c_{2n-3}^{2n-4} - c_{2n-5}^{2n-4}c_{2n-3}^{2n-5})\,[A'_1 \dots A'_{2n-4}A'_{2n-2}A'_{2n}] +$$
$$+ C_0(c_{2n-5}^{2n-4}c_{2n-2}^{2n-5} - c_{2n-5}^{2n-5}c_{2n-2}^{2n-4})\,[A'_1 \dots A'_{2n-4}A'_{2n-3}A'_{2n}] +$$
$$+ C_0\sigma^{-1}c_{2n-5}^{2n-5}[A'_1 \dots A'_{2n-6}A'_{2n-5}A'_{2n-3}A'_{2n-2}A'_{2n}] +$$
$$+ C_0\sigma^{-1}c_{2n-5}^{2n-4}[A'_1 \dots A'_{2n-6}A'_{2n-4}A'_{2n-3}A'_{2n-2}A'_{2n}]\,,$$

$$K[A_1 \dots A_{2n-4}A_{2n-1}A_{2n}] = [A'_1 \dots A'_{2n-4}A'_{2n-1}A'_{2n}] +$$
$$+ \sigma^{-1}c_{2n-1}^{2n-3}[A'_1 \dots A'_{2n-4}A'_{2n-3}A'_{2n}] + \sigma^{-1}c_{2n-1}^{2n-2}[A'_1 \dots A'_{2n-4}A'_{2n-2}A'_{2n}] -$$
$$- \sigma c_{2n}^{2n-3}[A'_1 \dots A'_{2n-4}A'_{2n-3}A'_{2n-1}] - \sigma c_{2n}^{2n-2}[A'_1 \dots A'_{2n-4}A'_{2n-2}A'_{2n-1}]\,,$$

où $C_0 = \det |c_i^j|$ $(i, j = 1, \dots, 2n - 6)$.

Faisant usage de (20), (21), (33), (36), on obtient par un calcul direct de (19)

$$\beta'_1 = \sigma^2\beta_1 + \sigma \sum_{t=2n+1}^{N+1} \gamma_2^t c_t^{2n-1}\,, \quad \beta'_2 = \sigma^{-2}\beta_2 + \sigma^{-1} \sum_{t=2n+1}^{N+1} \gamma_1^t c_t^{2n}\,, \tag{37}$$

$$\gamma_1'^s = \sigma^{-1} \sum_{t=2n+1}^{N+1} \gamma_1^t c_t^s\,, \quad \gamma_2'^s = \sigma \sum_{t=2n+1}^{N+1} \gamma_2^t c_t^s \quad (s = 2n + 1, \dots, N + 1)\,, \tag{38}$$

$$\sum_{t=2n+1}^{N+1} \gamma_1^t c_t^{2n-1} - 2c_{2n-1}^{2n-3} + c_{2n-3}^{2n-5} = \sigma f_{2n-3}\,, \tag{39}$$
$$\sum_{t=2n+1}^{N+1} \gamma_2^t c_t^{2n} - 2c_{2n}^{2n-2} + c_{2n-2}^{2n-4} = \sigma^{-1} f_{2n-2}\,,$$

$$c_{2n-3}^{2n-4} = 0\,, \quad c_{2n-2}^{2n-5} = 0\,, \quad c_{2n-1}^{2n-2} = 0\,, \quad c_{2n}^{2n-3} = 0\,, \tag{40}$$
$$C_0\sigma^{-1}c_{2n-5}^{2n-5} = 1\,, \quad c_{2n-5}^{2n-4} = 0\,, \quad c_{2n-4}^{2n-5} = 0\,, \quad C_0\sigma c_{2n-4}^{2n-4} = 1\,,$$

les fonctions f_{2n-3}, f_{2n-2} étant définies dans (35).

Les équations précédentes expriment les conditions nécessaires pour que $\tilde{C}$ soit une déformation projective du second ordre. Or, on voit facilement qu'elles sont aussi suffisantes. Les considérations plus détaillées montrent que les équations précédentes ne donnent que les conditions pour les coefficients des homographies osculatrices à $\tilde{C}$. Il en résulte facilement que, dans le cas en question, il existe des homographies jouissant des propriétés voulues de sorte qu'une correspondance quelconque $\tilde{C}: \tilde{L} \to \tilde{L}'$ du type considéré est une déformation projective du second ordre.

4. Nous allons nous adresser au cas spécial de $N = 2n - 1$. Pour cela introduisons, d'après [1], la forme invariante $\varphi^* = \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2$ qui a été appelée forme hyperplanaire de L.

Proposition 3. *Soit $N = 2n - 1$. La correspondance $\tilde{C}: \tilde{L} \to \tilde{L}'$, induite par une correspondance développable $C: L - L'$, est une déformation projective du second ordre si et seulement si $\varphi^* = \varphi^{*\prime}$.*

Démonstration. On vérifie facilemenet que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une correspondance $\tilde{C}$ du type considéré soit une déformation projective du second ordre ont la forme (37), (38), (39), (40) en y effectuant les restrictions relatives au cas de $N = 2n - 1$. En particulier, les relations (38) n'entrent pas en ligne de compte et les équations (37), (39) se réduisent à

$$\tag{41} \begin{gathered} \beta_1' = \sigma^2\beta_1\,, \quad \beta_2' = \sigma^{-2}\beta_2\,, \\ c_{2n-3}^{2n-5} - 2c_{2n-1}^{2n-3} = \sigma f_{2n-3}\,, \quad c_{2n-2}^{2n-4} - 2c_{2n}^{2n-2} = \sigma^{-1}f_{2n-2}\,. \end{gathered}$$

Il résulte de (40) et (41) que la correspondance $\tilde{C}: \tilde{L} \to \tilde{L}'$ induite par une correspondance développable $C: L \to L'$ est une déformation projective du second ordre si et seulement s'il existe une fonction $\sigma \neq 0$ satisfaisant aux deux premières équations (41). Or, cela a lieu précisément si $\beta_1\beta_2 = \beta_1'\beta_2'$. La proposition précédente se trouve ainsi démontrée.

D'après [1], la déformation projective du second ordre $\tilde{C}: \tilde{L} \to \tilde{L}'$ se réduit, dans le cas considéré de $N = 2n - 1$, à la déformation hyperplanaire.

Proposition 4. *Soit (L, L') un couple de congruences qui se trouvent plongées dans des espaces à $N = 2n - 1$ dimensions et pour lesquelles il existe une correspondance développable $C: L \to L'$ induisant une déformation projective du second ordre $\tilde{C}: \tilde{L} \to \tilde{L}'$. Les congruences L' formant avec une congruence donnée L un couple du type considéré existent et dépendent d'une fonction de deux variables.*

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut choisir $\sigma^2 = 1$ de sorte que, en vertu de (41), $\beta_1 = \beta_1'$, $\beta_2 = \beta_2'$. D'après (4), (5), (11), (34), les congruences en question se trouvent définies par le système suivant

$$\tag{42} \begin{aligned} &\tau_{2i-1}^{2i+2} = 0\,, \quad \tau_{2i}^{2i+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)\,, \\ &\tau_{2i-1}^{s} = 0\,, \quad \tau_{2i}^{s} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-2;\ s = 2i+3, \dots, 2n)\,, \\ &\tau_{2i-1}^{2i+1} = 0\,, \quad \tau_{2i}^{2i+2} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)\,, \\ &\tau_{2i-1}^{2i} = 0\,, \quad \tau_{2i}^{2i-1} = 0 \quad (i = 2, \dots, n)\,. \end{aligned}$$

On en obtient par différentiation extérieure

$$\omega_1 \wedge (\tau_{2i+1}^{2i+1} - \tau_{2i-1}^{2i-1}) = 0\,, \quad \omega_2 \wedge (\tau_{2i+2}^{2i+2} - \tau_{2i}^{2i}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)\,,$$

$$\omega_1 \wedge \tau_{2i+1}^{2i} - \omega_2 \wedge \tau_{2i-1}^{2i-2} = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \tau_{2i}^{2i-3} - \omega_2 \wedge \tau_{2i+2}^{2i-1} = 0 \quad (i = 2, \ldots, n-1)\,,$$

$$\beta_2\omega_1 \wedge (\tau_{2n}^{2n} - \tau_{2n-1}^{2n-1}) - \omega_2 \wedge \tau_{2n-1}^{2n-2} = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \tau_{2n-3}^{2n} - \beta_1\omega_2 \wedge (\tau_{2n}^{2n} - \tau_{2n-1}^{2n-1}) = 0\,.$$

Il est aisé de voir que le système (42) est en involution et que sa solution générale dépend d'une fonction arbitraire de deux variables.

Litérature

[1] *A. Švec:* Projective Differential Geometry of Line Congruences. Prague, 1965.

Adresse de l'auteur: Brno, Janáčkovo nám. 2a, ČSSR (Université J. E. Purkyně).