Bohuslav Diviš

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden (zweite Abhandlung)

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 20 (1970), No. 1, 149–159

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100954`

Czechoslovak Mathematical Journal, 20 (95) 1970, Praha

ÜBER GITTERPUNKTE IN MEHRDIMENSIONALEN ELLIPSOIDEN (ZWEITE ABHANDLUNG)

Bohuslav Diviš, Praha

(Eingelangt am 23. April 1969)

Es sei $\sigma \geqq 2$, ganz; seien $r_j \geqq 1$, ganz $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, $\alpha_j > 0$ $(1 \leqq j \leqq \sigma)$. In dieser Arbeit betrachten wir quadratische Formen der Gestalt

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{\sigma} \alpha_j (u_{1,j}^2 + u_{2,j}^2 + \ldots + u_{r_j,j}^2) . \tag{1}$$

Mit $V_Q(x)$ bezeichnen wir den Inhalt des Ellipsoides $Q(u) \leqq x$, mit $A_Q(x)$ dann die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$, d. h.

$$A_Q(x) = \sum_{Q(u) \leqq x} 1 .$$

Schließlich setzen wir

$$P_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x) .$$

Der Verlauf von $P_Q(x)$ war schon Gegenstand mehrerer Untersuchungen. In einer früheren Arbeit (vgl. [5]) haben wir eine ziemlich ausführliche Einleitung in diese Problematik veröffentlicht, wofür wir hier nur einige Ergebnisse erwähnen, die sich unmittelbar auf die vorliegende Arbeit beziehen. Wir setzen $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. Dann ist folgendes bekannt:

I. Für fast alle positiven Wertsysteme $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma)$ (im Sinne des Lebesgueschen Maßbegriffes) und für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$P_Q(x) = O\left(\exp\left\{\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\sigma} \operatorname{Min}(r_j, 4) + \varepsilon\right) \lg x\right\}\right) \tag{2}$$

für die Formen der Gestalt (1) mit $r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma > 4$ (vgl. [1]).

Für weitere Zwecke führen wir noch eine Bezeichnung ein. Sei $k \geqq 1$, ganz, und δ_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ seien reell. Wir bezeichnen mit $\beta(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k)$ die obere

Grenze derjenigen ω, für welche das System der Ungleichungen

$$\left|\delta_j - \frac{p_j}{q}\right| < \frac{1}{q^\omega} \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

unendlich viele Lösungen mit ganzzahligen $(k + 1)$-Tupeln $\{p_{1n}, p_{2n}, \ldots, p_{kn}; q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $q_n \to +\infty$ hat. Jetzt ist folgendes bekannt (vgl. [4]):

II. Es sei $\sigma \geqq 3$, $\beta(\alpha_2/\alpha_1) = 2$. Dann gilt für fast alle positiven Wertsysteme $(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_\sigma)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ die Formel (2), für die Formen der Gestalt (1).

In dieser Abhandlung beweisen wir folgenden

Satz 1. *Es sei* $\sigma \geqq 3$, *ganz; seien* r_j *ganz* $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. *Weiter sei* τ *ganz,* $3 \leqq \tau \leqq \sigma$; $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \tau - 1)$. *Wir setzen* $\beta(\alpha_2/\alpha_1, \alpha_3/\alpha_1, \ldots, \alpha_{\tau-1}/\alpha_1) = \beta$. *Sei* $r_j \geqq 2\beta/(\beta - 1)$ $(j = 1, 2, \ldots, \tau - 1)$, $r_j \geqq 4$ $(j = \tau, \ldots, \sigma)$. *Dann gilt für fast alle positiven Wertsysteme* $(\alpha_\tau, \alpha_{\tau+1}, \ldots, \alpha_\sigma)$ *und für jedes* $\varepsilon > 0$

(3) $$P_Q(x) = O(x^{r/2 - 1 - 1/(\beta-1) - (\sigma+1-\tau) + \varepsilon})$$

für die Formen der Gestalt (1). *Für* $\beta = +\infty$ *setzen wir dabei* $1/(\beta - 1) = 0$, $2\beta/(\beta - 1) = 2$.

Die zum Beweis benutzt methode wurde von V. Jarník (vgl. [4]) übernommen. Zunächst beweisen wir zwei Hilfssätze. Im folgenden seien die Zahlen $a > 0$, τ ganz, $3 \leqq \tau \leqq \sigma$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\tau-1}$, $\alpha_j > 0$ $(1 \leqq j \leqq \tau - 1)$, C, D, $0 < C < \operatorname{Min}(\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_{\tau-1})$, $D > \operatorname{Max}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\tau-1})$, $\varepsilon > 0$ gegeben. Mit c, meistens ohne Indizes, bezeichnen wir unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $\sigma, \tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\tau-1}, a, C, D, \varepsilon$ abhängen (so daß z. B. $c^2 + 5c = c$ ist). Mit μ bezeichnen wir unterschiedslos komplexe Funktionen irgendwelcher Veränderlichen, welche dem Betrage nach höchstens 1 sind.

Wir betrachten ganzzahlige Systeme

(4) $$\{h_1, \ldots, h_\sigma; k_1, \ldots, k_\sigma; n_1, \ldots, n_\sigma; \varrho\} = \{h, k, n, \varrho\},$$

$\varrho > 0$, $h_j > 0$, $n_j \geqq 0$, $0 < k_j \leqq 2^{\varrho+1}$. Für jedes solche System sei

(5) $$M(h, k, n, \varrho)$$

die Menge aller Punkte $\alpha = (\alpha_\tau, \alpha_{\tau+1}, \ldots, \alpha_\sigma)$ des Würfels

$$C < \alpha_j < D \quad (\tau \leqq j \leqq \sigma),$$

zu welchen es wenigstens ein reelles t gibt, so daß

(6) $$\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right| < \frac{a}{k_j \cdot 2^{n_j+\varrho}} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

ist. Wenn $l, m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$ ganze nichtnegative Zahlen sind mit $m_j \leqq \varrho$, sagen wir, das System (4) und genau so die Menge (5) gehört zur Klasse

$$K(l, m_1, \ldots, m_\sigma, n_1, \ldots, n_\sigma) = K(l, m, n, \varrho)\,, \tag{7}$$

als $2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}$, $2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ ist. Für jedes $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ sei

$$N(l, m, n, \varrho, \alpha) \tag{8}$$

die Anzahl derjenigen Mengen (5) der Klasse (7), welche den Punkt $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ enthalten. Unser Ziel ist eine Abschätzung der Anzahl (8) zu finden, welche für fast alle $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ unseres Würfels $C < \alpha_j < D$ gelten würde. Dabei beschränken wir uns nur auf solche Klassen (7), für welche

$$m_1 + n_1 \geqq m_2 + n_2 \geqq \ldots \geqq m_{\tau-1} + n_{\tau-1}\,, \tag{9}$$

$$m_\tau + n_\tau \geqq m_{\tau+1} + n_{\tau+1} \geqq \ldots \geqq m_\sigma + n_\sigma \tag{10}$$

gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

A. $m_1 + n_1 \geqq m_\tau + n_\tau$; B. $m_1 + n_1 < m_\tau + n_\tau$.

Fall A. Soll ein Punkt $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ in der Menge (5) der Klasse (7) liegen, so muß

$$\left|\frac{1}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1} - \frac{1}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right| < \frac{c}{2^{m_j+n_j+\varrho}} \quad (j = 2, \ldots, \sigma) \tag{11}$$

sein. Daraus folgt

$$c\,.\,2^{l-m_1} > \frac{h_j}{k_j} < c\,.\,2^{l-m_1} \quad \text{für} \quad \varrho > c_1\,. \tag{12}$$

Weiter sei immer $\varrho > c_1$. Für die Anzahl ν der Lösungen des Systems von Ungleichungen

$$\left|\frac{1}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1} - \frac{1}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right| < \frac{c}{2^{m_j+n_j+\varrho}} \quad (j = 2, \ldots, \tau - 1) \tag{13}$$

mit ganzzahligen $2(\tau - 1)$-Tupeln $(h_1, \ldots, h_{\tau-1}, k_1, \ldots, k_{\tau-1})$, welche überdies alle bisher eingeführten Bedingungen erfüllen, haben wir nach dem Hilfssatz 2 der Abhandlung [6] die Formel

$$\nu = \mu c\,.\,2^{(l+m_2+\ldots+m_{\tau-1})(1+\varepsilon)+(m_1+\ldots+m_{\tau-2}-n_{\tau-1}-\varrho)/(\gamma-1)}\,, \tag{14}$$

als $\gamma > \beta(\alpha_2/\alpha_1, \ldots, \alpha_{\tau-1}/\alpha_1)$ ist.

Für jedes solche $2(\tau - 1)$-Tupel und für beliebig gegebene $h_\tau, k_\tau, \ldots, h_\sigma, k_\sigma$ mit $2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1}$ hat die Menge der Punkte $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ des Würfels $C < \alpha_j < D$ $(j = \tau, \ldots, \sigma)$, welche die Ungleichungen (11) für $j = \tau, \ldots, \sigma$ erfüllen, das Maß

$$(15) \qquad \mu c \prod_{j=\tau}^{\sigma} 2^{m_1 - m_j - n_j - \varrho - l} .$$

Dabei ist nach (12) $h_j < c \,.\, 2^{l+m_j-m_1}$. Die Summe der Maße aller nichtleeren Mengen (5) der Klasse (7) ist also gleich dem Produkt von (14), (15) und $\mu c \prod_{j=\tau}^{\sigma} 2^{l+2m_j-m_1}$, d. h. gleich $\mu c\, F(l, m, n, \varrho)$, wo

$$(16) \qquad F(l, m, n, \varrho) = 2^{(l+m_2+\ldots+m_{\tau-1})(1+\varepsilon)+(m_1+\ldots+m_{\tau-2}-n_{\tau-1}-\varrho)/(\gamma-1)} \prod_{j=\tau}^{\sigma} 2^{m_j-n_j-\varrho}$$

ist. Das Maß der Menge derjenigen $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$, für welche

$$(17) \qquad N(l, m, n, \varrho, \alpha) > F(l, m, n, \varrho) \,.\, 2^{\varepsilon(l+m_1+\ldots+m_\sigma+n_1+\ldots+n_\sigma+\varrho)}$$

ist, ist also gleich

$$\mu c \,.\, 2^{-\varepsilon(l+m_1+\ldots+m_\sigma+n_1+\ldots+n_\sigma+\varrho)} .$$

Summieren wir diesen Ausdruck über $l, m_1, \ldots, m_\sigma, n_1, \ldots, n_\sigma$, so bekommen wir eine konvergente Reihe. Es gilt also: die Menge derjenigen Punkte α, für welche die Ungleichung (17) für unendlich viele Klassen $K(l, m, n, \varrho)$ gilt, hat das Maß Null. Daraus folgt

Hilfssatz 1. *Fast alle Punkte $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ des Würfels $C < \alpha_j < D$ haben folgende Eigenschaft: Es gibt (von $\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma$ abhängig) eine Zahl $\varrho_0 > 0$, so daß für alle Klassen $K(l, m, n, \varrho)$ des Falles A für $\varrho > \varrho_0$ folgende Ungleichung gilt:*

$$(18) \qquad N(l, m, n, \varrho, \alpha) \leqq F(l, n, m, \varrho) \,.\, 2^{\varepsilon(l+m_1+\ldots+m_\sigma+n_1+\ldots+n_\sigma+\varrho)} .$$

Fall B. Soll ein Punkt $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ in der Menge (5) der Klasse (7) im Falle B liegen, so muß wegen (6), (9) wieder (13) erfüllt sein. Die Anzahl der zugehörigen $2(\tau - 1)$-Tupel $(h_1, k_1, \ldots, h_{\tau-1}, k_{\tau-1})$ ist wieder gleich (14). Für jedes solche $2(\tau - 1)$-Tupel muß weiter

$$\left| \frac{1}{\alpha_\tau} \frac{h_\tau}{k_\tau} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{h_1}{k_1} \right| < c \,.\, 2^{-m_1-n_1-\varrho}$$

sein, was bei gegebenen h_τ, k_τ für α_τ ein Intervall der Länge $\mu c \,.\, 2^{-l-n_1-\varrho}$ gibt. Bei festem α_τ und festen $h_\tau, k_\tau, \ldots, h_\sigma, k_\sigma$ muß weiter (bei $\sigma > \tau$) gelten:

$$\left| \frac{1}{\alpha_j} \frac{h_j}{k_j} - \frac{1}{\alpha_\tau} \frac{h_\tau}{k_\tau} \right| < c \,.\, 2^{-m_j-n_j-\varrho} \quad (j = \tau + 1, \ldots, \sigma) ,$$

was ein $(\sigma - \tau)$-dimensionales Intervall ergibt, dessen Inhalt $\mu c \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} 2^{m_1 - m_j - n_j - \varrho - l}$ ist (vgl. (12)). Weil die Anzahl der zugehörigen Systeme $(h_\tau, k_\tau, \ldots, h_\sigma, k_\sigma)$ gleich $\mu c \prod_{j=\tau}^{\sigma} 2^{2m_j + l - m_1}$ ist, ist die Summe der Maße aller nichtleeren Mengen (5) der Klasse (7) gleich $\mu c\, G(l, m, n, \varrho)$, wo

$$G(l, m, n, \varrho) = 2^{(l+m_2+\ldots+m_{\tau-1})(1+\varepsilon)+(m_1+\ldots+m_{\tau-2}-n_{\tau-1}-\varrho)/(\gamma-1)} \times \times 2^{2m_\tau - m_1 - n_1 - \varrho} \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} 2^{m_j - n_j - \varrho} \tag{19}$$

ist. Daraus folgt ähnlich wie im Falle A

Hilfssatz 2. *Fast alle Punkte $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ des Würfels $C < \alpha_j < D$ haben folgende Eigenschaft: Es gibt (von $\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma$ abhängig) eine Zahl $\varrho_0 > 0$, so daß für alle Klassen $K(l, m, n, \varrho)$ des Falles B mit $\varrho > \varrho_0$ die Ungleichung*

$$N(l, m, n, \varrho, \alpha) \leqq G(l, m, n, \varrho) \,.\, 2^{\varepsilon(l+m_1+\ldots+m_\sigma+n_1+\ldots+n_\sigma+\varrho)} \tag{20}$$

gilt.

Bemerken wir, daß

$$G(l, m, n, \varrho) \,.\, 2^{-m_\tau - n_\tau} = F(l, m, n, \varrho) \,.\, 2^{-m_1 - n_1} \tag{21}$$

ist.

Beweis des Satzes 1. Wir wählen $2^\varrho \leqq \sqrt{x} < 2^{\varrho+1}$ und sei $\beta < +\infty$, $\beta < \gamma < < +\infty$. Wir setzen

$$\theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-m^2 s} \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} s > 0\,,$$

$$A = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq \sigma} \frac{2\pi}{\alpha_j}\,, \quad z = x^{-r/4}\,, \quad s = \frac{1}{x} + it \quad (t \text{ reell})\,. \tag{22}$$

Dann gilt (vgl. [3], § 2)

$$P_Q(x) = O\left(x^{r/4} + x^{r/2-1} z + \frac{1}{z} \int_{A/\sqrt{x}}^{\infty} \left|\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \ldots \theta^{r_\sigma}(\alpha_\sigma s)\right| \operatorname{Min}(1, tz) \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right). \tag{23}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß unter unseren Voraussetzungen stets $r/2 - 1 - 1/(\beta - 1) - (\sigma + 1 - \tau) \geqq r/4$ ist. Es ist nämlich immer $\beta \geqq \geqq (\tau - 1)/(\tau - 2) > 1$, $\tau \geqq 3$ und damit also $r/2 - 1 - 1/(\beta - 1) - (\sigma + 1 - \tau) \geqq \leqq r/4 + \frac{1}{4}((\tau - 1)\, 2\beta/(\beta - 1) + 4(\sigma - \tau + 1)) - 1 - 1/(\beta - 1) - (\sigma + 1 - \tau) = = p/4 + \frac{1}{2}((\tau - 1)\, \beta/(\beta - 1)) - \beta/(\beta - 1) = r/4 + \frac{1}{2}(\beta/(\beta - 1))(\tau - 3) \geqq r/4$ ist.

Daraus folgt, daß es folgendes zu beweisen genügt: für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$(24)\qquad \frac{1}{z}\int_{A/\sqrt{x}}^{\infty} \left|\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \ldots \theta^{r_\sigma}(\alpha_\sigma s)\right| \operatorname{Min}(1, tz)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = O\left(x^{r/2-1-1/(\gamma-1)-(\sigma+1-\tau)+\varepsilon}\right)$$

für fast alle $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ $(s = 1/x + it)$. Wir legen jetzt bei gegebenem $x > 1$ auf das Intervall $-\infty < t < +\infty$ alle Farey-Brüche h/k, wobei $h \gtreqless 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$ und konstruieren noch ihre Medianten, d. h. alle Zahlen $(h + \bar{h})/(k + \bar{k})$, wo $h/k, \bar{h}/\bar{k}$ zwei benachbarte unter unseren Farey-Brüchen sind. Wir bezeichnen mit $B_{h,k}$ das linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, dessen Endpunkte zwei benachbarte Medianten sind, und welches den Punkt h/k enthält. Diese Intervalle überdecken dann lückenlos die ganze reelle Achse und sind paarweise punktfremd. Jetzt ist folgendes bekannt (vgl. [2]): Wenn t im Intervall $(2\pi/\alpha_j)\, B_{h,k}$ liegt, dann ist[1])

$$(25)\qquad |\theta(\alpha_j s)| < \frac{d}{\sqrt{k}} \operatorname{Min}\left(\sqrt{x}, \frac{1}{\left|t - \dfrac{2\pi}{\alpha_j}\dfrac{h}{k}\right|}\right) \quad \left(\operatorname{Min}\left(a, \frac{1}{0}\right) = a\right).\ ^{2)}$$

Bekanntlich ist weiter

$$(26)\qquad B_{h,k} \subset \left\langle \frac{h}{k} - \frac{1}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{1}{k\sqrt{x}} \right).$$

Zu jedem t unseres Integrationsintervalles $\langle A/\sqrt{x}, \infty)$ gibt es jetzt eindeutig 2σ Zahlen $h_1, k_1, \ldots, h_\sigma, k_\sigma$, so daß t im Durchschnitt der σ Intervalle $(2\pi/\alpha_1)\, B_{h_1,k_1}, \ldots$ $\ldots, (2\pi/\alpha_\sigma)\, B_{h_\sigma,k_\sigma}$ liegt. Wenn t im Durchschnitt der Intervalle $(2\pi/\alpha_1)\, B_{h_1,k_1}, \ldots$ $\ldots, (2\pi/\alpha_\sigma)\, B_{h_\sigma,k_\sigma}$ liegt, dann gibt es nach (26) genau ein System der ganzen nichtnegativen Zahlen $(n_1, n_2, \ldots, n_\sigma)$, so daß

$$(27)\qquad \frac{1}{2^{n_j+1} k_j \sqrt{x}} < \left|\frac{\alpha_j}{2\pi} t - \frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{1}{2^{n_j} k_j \sqrt{x}} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

ist, mit Ausnahme der Punkte $t = 2\pi h_j/\alpha_j k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$. Wir definieren jetzt abzählbar viele Mengen $\mathfrak{M}(h, k, n) = \mathfrak{M}(h_1, k_1, n_1; \ldots; h_\sigma, k_\sigma, n_\sigma)$ folgenderweise: wenn $h_1, \ldots, h_\sigma, k_1, \ldots, k_\sigma, n_1, \ldots, n_\sigma$ ganze Zahlen sind, so daß $h_j > 0$, $0 < k_j \leqq$ $\leqq \sqrt{x}$, $(h_j, k_j) = 1$, $n_j \geqq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, sei $\mathfrak{M}(h, k, n)$ Menge derjenigen t, welche im Durchschnitt der Intervalle $(2\pi/\alpha_j)\, B_{h_j,k_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, $\langle A/\sqrt{x}, \infty)$ liegen und die Ungleichungen (27) erfüllen. Die Mengen $\mathfrak{M}(h, k, n)$ sind paarweise disjunkt und überdecken das ganze Intervall $\langle A/\sqrt{x}, \infty)$ mit Ausnahme abzählbar vieler Punkte $t = 2\pi h_j/\alpha_j k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$.

---

1) Wenn $I = \langle a_1, a_2)$ und $a_3 > 0$, dann bedeute $a_3 I$ das Intervall $\langle a_1 a_3, a_2 a_3)$.

2) Mit d bezeichnen wir unterschiedslos positive Konstanten, welche nur von $\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_\sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma, \gamma$ abhängen.

Um (24) zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß für jedes $\varepsilon > 0$ (es genügt hinreichend klein)

$$(28)\qquad \sum_{\substack{h_1,k_1,n_1\\ \vdots \\ h_\sigma,k_\sigma,n_\sigma}} \int_{\mathfrak{M}(h,k,n)} \left|\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \ldots \theta^{r_\sigma}(\alpha_\sigma s)\right| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{tz}, 1\right) \frac{dt}{t} = \\ = O\left(x^{r/2-1-1/(\gamma-1)-(\sigma+1-\tau)+\varepsilon(3r/4+\sigma+\tau/2)}\right)$$

mit $s = 1/x + it$ für fast alle $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ ist. Aus Symmetriegründen beschränken wir uns dabei auf jene $\mathfrak{M}(h, k, n)$, für welche

$$(29)\qquad 2^{n_1}k_1 \geqq 2^{n_2}k_2 \geqq \ldots \geqq 2^{n_{\tau-1}}k_{\tau-1},$$

$$(30)\qquad 2^{n_\tau}k_\tau \geqq 2^{n_{\tau+1}}k_{\tau+1} \geqq \ldots \geqq 2^{n_\sigma}k_\sigma$$

gilt. Diese Mengen $\mathfrak{M}(h, k, n)$ werden wir weiter folgendermaßen klassifizieren. Wir sagen, daß die Menge $\mathfrak{M}(h, k, n)$ zur Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n) = \mathfrak{K}(l; m_1, n_1; \ldots; m_\sigma, n_\sigma)$ (l, m_j, n_j ganz, nichtnegativ) gehört, wenn $2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}$, $2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1}$ ($j = 1, 2, \ldots, \sigma$) ist. Jede Menge $\mathfrak{M}(h, k, n)$ gehört genau zu einer Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$. Dabei können wir uns auf jene $\mathfrak{K}(l, m, n)$ beschränken, für welche $2^{m_j} \leqq \sqrt{x}$ ($j = 1, 2, \ldots, \sigma$) ist. Wir bemerken noch:

1. Ist $\mathfrak{M}(h, k, n)$ eine nichtleere Menge der Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$, dann ist ihr Maß im Falle A höchstens gleich $c/2^{m_1+n_1}\sqrt{x}$, im Falle B höchstens gleich $c/2^{m_\tau+n_\tau}\sqrt{x}$.

2. Ist $t \in \mathfrak{M}(h, k, n)$ der Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$, dann ist nach (25)

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{2^{m_j}}} \operatorname{Min}\left(\sqrt{x}, \sqrt{2^{m_j+n_j}}\sqrt[4]{x}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

3. Ist $t \in \mathfrak{M}(h, k, n)$ der Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$, dann ist $c \,.\, 2^{l-m_1} < t < c \,.\, 2^{l-m_1}$ für $x > c$.

4. Ist die Menge $\mathfrak{M}(h, k, n)$ nichtleer, dann gibt es ein reelles t, für welches (6) mit $a = 2\pi/C$ gilt, d. h. bei dieser Wahl von a ist $\alpha \in M(h, k, n, \varrho)$, so daß die Anzahl der nichtleeren Mengen $\mathfrak{M}(h, k, n)$ der Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$ gleich $N(l, m, n, \varrho, \alpha)$ ist. Nach den Hilfssätzen 1,2 ist für fast alle Punkte $\alpha = (\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ des Würfels $C < \alpha_j < D$ die Ungleichung (18) bzw. (20) erfüllt, sobald ϱ, also x hinreichend groß ist. Wir wählen ein solches α.

Es sei jetzt ε mit

$$0 < \varepsilon < \operatorname{Min}\left(\frac{1}{\tau+1}, \operatorname*{Min}_{1 \leqq j \leqq \tau-1} \frac{1}{6}\left(r_j - \frac{2\gamma}{\gamma-1}\right), \frac{1}{\gamma-1}\right)$$

gegeben, und wir untersuchen das Integral in (28). Zunächst schätzen wir

$$(31)\qquad \operatorname{Min}\left(\frac{1}{tz}, 1\right) \leqq \left(\frac{1}{tz}\right)^{3\varepsilon} = x^{3r\varepsilon/4}\frac{1}{t^{3\varepsilon}} \quad \text{für } \varepsilon < \tfrac{1}{3}.$$

Weiter schätzen wir (vgl. die Bemerkungen 1. – 4.):

$$(32)\quad \sum_{h_j,k_j,n_j} \int_{\mathfrak{M}(h,k,n)} \left|\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \dots \theta^{r_\sigma}(\alpha_\sigma s)\right| \frac{dt}{t^{1+3\varepsilon}} \leqq d(\varepsilon) \sum \frac{2^{m_1(1+3\varepsilon)}}{2^{l(1+3\varepsilon)}}\, 2^{-m_\tau - n_\tau} x^{-1/2} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\sigma} \frac{x^{r_j/4}}{2^{m_j r_j/2}} \operatorname{Min}\left(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}\right) G(l, m, n, \varrho)\, 2^{\varepsilon(l + m_1 + \dots + m_\sigma + n_1 + \dots + n_\sigma + \varrho)} \;\text{[3]}$$

sowohl im Falle A, als auch im Falle B (vgl. (21)). Dabei ist über solche l, m_j, n_j zu summieren, für welche gilt: $l \geqq 0$, $n_j \geqq 0$, $m_j \geqq 0$, $2^{m_j} \leqq \sqrt{x}$ $(j = 1, 2, \dots, \sigma)$, $m_1 + n_1 \geqq m_2 + n_2 \geqq \dots \geqq m_{\tau-1} + n_{\tau-1}$, $m_\tau + n_\tau \geqq m_{\tau+1} + n_{\tau+1} \geqq \dots \geqq m_\sigma + n_\sigma$. Weiter ist noch $2^\varrho \leqq \sqrt{x} < 2^{\varrho+1}$. Der Ausdruck (32) ist also höchstens gleich

$$(33)\qquad d(\varepsilon)\, x^{r/4 - \gamma/2(\gamma-1) - (\sigma-\tau+1)/2 + \varepsilon/2} \sum_{m_1, n_1} 2^{m_1(-r_1/2 + 1/(\gamma-1) + 4\varepsilon) + n_1(-1+\varepsilon)} \times$$

$$\times \operatorname{Min}\left(x^{r_1/4}, 2^{m_1 r_1/2 + n_1 r_1/2}\right) \prod_{j=2}^{\tau-2} \sum_{m_j, n_j} 2^{m_j(-r_j/2 + \gamma/(\gamma-1) + 2\varepsilon) + n_j \varepsilon} \times$$

$$\times \operatorname{Min}\left(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}\right) \sum_{m_{\tau-1}, n_{\tau-1}} 2^{m_{\tau-1}(-r_{\tau-1}/2 + 1 + 2\varepsilon) + n_{\tau-1}(-1/(\gamma-1) + \varepsilon)} \times$$

$$\times \operatorname{Min}\left(x^{r_{\tau-1}/4}, 2^{m_{\tau-1} r_{\tau-1}/2 + n_{\tau-1} r_{\tau-1}/2}\right) \prod_{j=\tau}^{\sigma} \sum_{m_j, n_j} 2^{m_j(-r_j/2 + 1 + \varepsilon) + n_j(-1+\varepsilon)} \times$$

$$\times \operatorname{Min}\left(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}\right) \sum_{l} 2^{-l\varepsilon}.$$

Folglich bekommen wir für $\tau \leqq j \leqq \sigma$:

$$\sum_{2^{m_j+n_j} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_j(-r_j/2 + 1 + \varepsilon) + n_j(-1+\varepsilon)} \operatorname{Min}\left(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}\right) \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon) \sum_{2^{m_j+n_j} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_j(1+\varepsilon) + n_j(r_j/2 - 1 + \varepsilon)} \leqq d(\varepsilon) \sum_{2^{n_j} \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{n_j}}\right)^{1+\varepsilon} 2^{n_j(r_j/2 - 1 + \varepsilon)} =$$

$$= d(\varepsilon)\, x^{1/2 + \varepsilon/2} \sum_{2^{n_j} \leqq \sqrt{x}} 2^{n_j(r_j/2 - 2)} \leqq d(\varepsilon)\, x^{r_j/4 - 1/2 + \varepsilon} \quad \text{für} \quad r_j \geqq 4.$$

$$\sum_{2^{m_j+n_j} > \sqrt{x}} 2^{m_j(-r_j/2 + 1 + \varepsilon) + n_j(-1+\varepsilon)} \operatorname{Min}\left(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}\right) \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{r_j/4} \sum_{2^{m_j} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_j(-r_j/2 + 1 + \varepsilon)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_j}}\right)^{\varepsilon - 1} = d(\varepsilon)\, x^{r_j/4 - 1/2 + \varepsilon/2} \times$$

$$\times \sum_{2^{m_j} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_j(-r_j/2 + 2)} \leqq d(\varepsilon)\, x^{r_j/4 - 1/2 + \varepsilon} \quad \text{für} \quad r_j \geqq 4.$$

---

[3]) Mit $d(\varepsilon)$ bezeichnen wir unterschiedslos positive Konstanten, die nur von $\sigma, \tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\sigma, r_1, \dots, r_\sigma, \gamma, \varepsilon$ abhängen.

Weiter schätzen wir die Summe über $m_{\tau-1}$, $n_{\tau-1}$ in (33) ab:

$$\sum_{2^{m_{\tau-1}+n_{\tau-1}}\leqq\sqrt{x}} 2^{m_{\tau-1}(1+2\varepsilon)+n_{\tau-1}(r_{\tau-1}/2-1/(\gamma-1)+\varepsilon)} \leqq d(\varepsilon) \sum_{2^{n_{\tau-1}}\leqq\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{n_{\tau-1}}}\right)^{1+2\varepsilon} \times$$

$$\times\, 2^{n_{\tau-1}(r_{\tau-1}/2-1/(\gamma-1)+\varepsilon)} = d(\varepsilon)\, x^{1/2+\varepsilon} \sum_{2^{n_{\tau-1}}\leqq\sqrt{x}} 2^{n_{\tau-1}(r_{\tau-1}/2-\gamma/(\gamma-1)-\varepsilon)} \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{r_{\tau-1}/4-1/2(\gamma-1)+\varepsilon} \quad \text{für} \quad r_{\tau-1} \geqq \frac{2\beta}{\beta-1}.$$

$$\sum_{2^{m_{\tau-1}+n_{\tau-1}}>\sqrt{x}} x^{r_{\tau-1}/4} 2^{m_{\tau-1}(-r_{\tau-1}/2+1+2\varepsilon)+n_{\tau-1}(\varepsilon-1/(\gamma-1))} \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{r_{\tau-1}/4} \sum_{2^{m_{\tau-1}}\leqq\sqrt{x}} 2^{m_{\tau-1}(-r_{\tau-1}/2+1+2\varepsilon)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_{\tau-1}}}\right)^{\varepsilon-1/(\gamma-1)} \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{r_{\tau-1}/4-1/2(\gamma-1)+\varepsilon/2} \sum_{2^{m_{\tau-1}}\leqq\sqrt{x}} 2^{m_{\tau-1}(-r_{\tau-1}/2+\gamma/(\gamma-1)+\varepsilon)} \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{r_{\tau-1}/4-1/2(\gamma-1)+\varepsilon} \quad \text{für} \quad r_{\tau-1} \geqq \frac{2\beta}{\beta-1}.$$

Jetzt sei $2 \leqq j \leqq \tau - 2$:

$$\sum_{2^{m_j+n_j}\leqq\sqrt{x}} 2^{m_j(\gamma/(\gamma-1)+2\varepsilon)+n_j(r_j/2+\varepsilon)} \leqq d(\varepsilon) \sum_{2^{n_j}\leqq\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{n_j}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)+2\varepsilon} 2^{n_j(r_j/2+\varepsilon)} \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{\gamma/2(\gamma-1)+\varepsilon} \sum_{2^{n_j}\leqq\sqrt{x}} 2^{n_j(r_j/2-\gamma/(\gamma-1)-\varepsilon)} \leqq d(\varepsilon)\, x^{r_j/4+\varepsilon} \quad \text{für} \quad r_j \geqq \frac{2\beta}{\beta-1}.$$

$$\sum_{2^{m_j+n_j}>\sqrt{x}} x^{r_j/4} 2^{m_j(-r_j/2+\gamma/(\gamma-1)+2\varepsilon)+n_j\varepsilon} \leqq d(\varepsilon)\, x^{r_j/4} 2^{(m_1+n_1)\varepsilon} \sum_{2^{m_j}\leqq\sqrt{x}} 2^{m_j(-r_j/2+\gamma/(\gamma-1)+2\varepsilon)} \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{r_j/4} 2^{(m_1+n_1)\varepsilon} \quad \text{für} \quad r_j \geqq \frac{2\beta}{\beta-1}.$$

Schließlich schätzen wir die Summe über m_1, n_1 in (33) ab:

$$\sum_{2^{m_1+n_1}\leqq\sqrt{x}} 2^{m_1(1/(\gamma-1)+4\varepsilon)+n_1(r_1/2-1+\varepsilon)} \leqq d(\varepsilon) \sum_{2^{n_1}\leqq\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{n_1}}\right)^{1/(\gamma-1)+4\varepsilon} 2^{n_1(r_1/2-1+\varepsilon)} \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{1/2(\gamma-1)+2\varepsilon} \sum_{2^{n_1}\leqq\sqrt{x}} 2^{n_1(r_1/2-\gamma/(\gamma-1)-3\varepsilon)} \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{r_1/4-1/2+\varepsilon} \quad \text{für} \quad r_1 \geqq \frac{2\beta}{\beta-1}.$$

$$\sum_{2^{m_1+n_1} > \sqrt{x}} x^{r_1/4} 2^{m_1(-r_1/2+1/(\gamma-1)+4\varepsilon)+n_1(-1+\varepsilon)+(m_1+n_1)\tau\varepsilon} \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{r_1/4} \sum_{2^{m_1} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_1(-r_1/2+1/(\gamma-1)+(\tau+4)\varepsilon)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_1}}\right)^{(\tau+1)\varepsilon-1} \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{r_1/4-1/2+((\tau+1)/2)\varepsilon} \sum_{2^{m_1} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_1(-r_1/2+\gamma/(\gamma-1)+3\varepsilon)} \leqq$$

$$\leqq d(\varepsilon)\, x^{r_1/4-1/2+((\tau+1)/2)\varepsilon} \quad \text{für} \quad r_1 \geqq \frac{2\beta}{\beta-1}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß der linke Ausdruck in (28) höchstens gleich (vgl. (31), (32), (33))

$$d(\varepsilon) \exp\left\{\left(-\frac{1}{2}(\sigma-\tau+1) + \frac{r_\tau + \ldots + r_\sigma}{4} + \frac{r_{\tau-1}}{4} - \frac{1}{2(\gamma-1)} + \right.\right.$$

$$+ \frac{r_{\tau-2} + \ldots + r_2}{4} + \frac{r_1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{r}{4} - 1 - \frac{1}{2(\gamma-1)} - \frac{\sigma-\tau}{2} \times$$

$$\left.\left.\times\, \varepsilon\left(\frac{3r}{4} + \frac{1}{2} + \sigma - \tau + 1 + 1 + \tau - 3 + \frac{\tau+1}{2}\right)\right) \lg x\right\} =$$

$$= d(\varepsilon)\, x^{r/2-1-1(\gamma-1)-(\sigma-\tau+1)+\varepsilon(3r/4+\sigma+\tau/2)}$$

ist, was zu beweisen war. Für $\beta = +\infty$ setzen wir überall $1/(\gamma-1) = 0$ und führen analoge Rechnungen durch. Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgs aus dieser Überlegung: Für $\beta = +\infty$ hot man im Hilfssatz 1 der Abhandlung [6] die triviale Alschätzung $v \leqq M$. Daraus folgt im Hilfsatz 2 der Abhandlung [6] für die Anzahl der Systeme $(h_1, k_1; \ldots; h_\sigma, k_\sigma)$ eine Alschätzung nach oben mit $d(\varepsilon)\, 2^{(l+m_2+\ldots+m_\sigma)(1+\varepsilon)}$. Damit dürfen wir für $\beta = +\infty$ in (14) $1/(\gamma-1) = 0$ setzen. Wir bekommen auf diese Weise, daß der linke Ausdruck in (28) höchstens gleich

$$d(\varepsilon)\, x^{r/2-1-(\sigma-\tau+1)+\varepsilon}$$

für $r_j \geqq 2$ $(1 \leqq j \leqq \tau - 1)$, $r_j \geqq 4$ $(\tau \leqq j \leqq \sigma)$ ist, wie behauptet. Indem man ε, C, D drei Folgen $\varepsilon_n \to 0$, $C_n \to 0$, $D_n \to +\infty$ durchlaufen läßt, bekommt man daraus den Satz 1.

Durch geringe Modifikation des eben durchgeführten Summationsverfahrens erhalten wir den

Satz 2. *Es sei $\sigma \geqq 3$, ganz; r_j seien ganz, $r_j \geqq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma = r$. Weiter sei τ ganz, $3 \leqq \tau \leqq \sigma$; $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \tau - 1)$. Wir* *setzen* $\beta(\alpha_2/\alpha_1, \ldots, \alpha_{\tau-1}/\alpha_1) = \beta$. *Dann gilt für fast alle positiven Wertsysteme* $(\alpha_\tau, \ldots, \alpha_\sigma)$ *und für jedes* $\varepsilon > 0$

$$(34) \qquad P_Q(x) = O(x^{r/2+((\tau-3)/2)\beta/(\beta-1)-\lambda+\varepsilon}),$$

wo $\lambda = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\tau-1} \mathrm{Min}\,(r_j, 2\beta/(\beta-1)) + \frac{1}{4}\sum_{j=\tau}^{\sigma} \mathrm{Min}\,(r_j, 4)$ *ist. Dabei setzen wir* $1/(\beta-1) = 0$, $2\beta/(\beta-1) = 2$ *für* $\beta = +\infty$.

Der Satz 2 enthält die Jarníksche Behauptung II als Spezialfall für $\beta = 2$, $\tau = 3$. Setzen wir formal $\tau = \sigma + 1$, so bekommen wir den Satz 3 der Abhandlung [6].

Alle Ergebnisse samt Beweisen lassen sich unmittelbar auf etwas allgemeinere Formen der Gestalt

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{\sigma} \alpha_j\, Q_j(u_{1,j}; u_{2,j}; \ldots; u_{r_j,j}) \quad (\alpha_j > 0) \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

übertragen, wo die quadratischen Formen Q_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ positiv definit sind, und ganzzahlige Koeffizienten haben.

Literaturverzeichnis

[1] *V. Jarník:* „Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions", Bull. Internat. de l'Académie des Sciences de Bohême, 1928, 10 S.

[2] *V. Jarník:* „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden" Math. Annalen *100* (1928) S. 699–721.

[3] *V. Jarník:* „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorffschen Maßbegriffes", Math. Zeitschrift *38* (1934) S. 217–256.

[4] *V. Jarník:* „Zur Gitterpunktlehre von mehrdimensionalen Ellipsoiden", Acta Arithmetica *IX* (1964), S. 321–329.

[5] *B. Diviš:* „On lattice points in high-dimensional ellipsoids" (preliminary communication), Comment. Math. Univ. Carolinae, vol. *9*, fasc. 2, S. 199–205.

[6] *B. Diviš:* „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Czech. Math. Journal, *20* (*95*), (1970), 130–139.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).