

Miloslav Jůza

Systèmes monoparamétriques des espaces projectifs

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 2, 363–367

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100903>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SYSTÈMES MONOPARAMETRIQUES DES ESPACES PROJECTIFS

MILOSLAV JÛZA, Praha

(Reçu le 1 juillet 1968)

Dans ce travail, il y a une généralisation de quelques notions de la théorie de ČECH des surface réglées sur les systèmes monoparamétriques des espaces projectifs dans un espace projectif de la dimension arbitraire.

1. Dans un espace projectif (réel) S_m de la dimension m ayons un système d'espaces projectifs $S_n(t) = [y_0(t), y_1(t), \dots, y_n(t)]$ de la dimension n dépendant d'un paramètre (réel) t . La variété formée par les espaces $S_n(t)$ sera appelée *monosystème*.

Soit h un nombre naturel et le rang de la matrice

$$(1) \quad (y_0, y_1, \dots, y_n, y'_0, \dots, y'_n, \dots, y_0^{(h)}, \dots, y_n^{(h)})$$

soit $(n + 1)(h + 1)$. Si nous ayons sur le monosystème le point

$$(2) \quad x_0 = \sum_{i=0}^n a_0^i y_i(t_0),$$

alors l'espace h -osculateur du monosystème à ce point est l'espace

$$(3) \quad T_h(\alpha_0^i, t_0) = [y_0, \dots, y_n, y'_0, \dots, y'_n, \dots, y_0^{(h-1)}, \dots, y_n^{(h-1)}, \sum_{i=0}^n \alpha_0^i y_i^{(h)}]_{t=t_0}$$

et l'union des espaces h -osculateurs de tous les points de l'espace $[y_0(t_0), \dots, y_n(t_0)]$ est l'espace

$$(4) \quad T_h(t_0) = [y_0, \dots, y_n, y'_0, \dots, y'_n, \dots, y_0^{(h)}, \dots, y_n^{(h)}]_{t=t_0}.$$

Ayons sur le monosystème une courbe

$$(5) \quad x(t) = \sum_{i=0}^n \alpha^i(t) y_i(t), \quad \alpha^i(t_0) = \alpha_0^i.$$

Le point x_0 sera appelé *point semiquasi-asymptotique d'indice h et d'ordre 1* de cette courbe, si

$$x^{(h+1)}(t_0) \in T_h(t_0)$$

à lieu. La courbe est *semiquasi-asymptotique d'indice h et d'ordre 1*, si chaque son point est semiquasi-asymptotique d'indice h et d'ordre 1.

Supposons que nous avons déjà défini courbe semiquasi-asymptotique d'indice h et d'ordre $k - 1$. Alors le point $x(t_0)$ de telle courbe sera appelé son *point semiquasi-asymptotique d'indice h et d'ordre k* , si

$$x^{(h+k)}(t_0) \in T_h(t_0)$$

à lieu. La courbe sera appelée *semiquasi-asymptotique d'indice h et d'ordre k* , si chaque son point est tel. Nous dirons aussi *semiasymptotique* à la place de semiquasi-asymptotique d'indice 1.

Nous dirons que le point $x(t_0)$ de la courbe $x(t)$ est son *point quasi-asymptotique d'indice h* , si

$$x^{(h+1)}(t_0) \in T_h(\alpha_0^i, t_0)$$

à lieu. La courbe *quasi-asymptotique d'indice h* est la courbe dont tous les points sont quasi-asymptotiques d'indice h . Nous dirons *asymptotique* à la place de quasi-asymptotique d'indice 1.

2. Le rang de la matrice (1) soit $(n + 1)(h + 1)$ et le rang de la matrice

$$(y_0, \dots, y_n, y'_0, \dots, y'_n, \dots, y_0^{(h+1)}, \dots, y_n^{(h+1)})$$

soit $(n + 1)(h + 1) + k$, $0 \leq k \leq n + 1$. Nous pouvons numéroter les courbes directrices de façon que les points

$$(6) \quad y_0, \dots, y_n, y'_0, \dots, y'_n, \dots, y_0^{(h)}, \dots, y_n^{(h)}, y_0^{(h+1)}, \dots, y_{k-1}^{(h+1)}$$

soient linéairement indépendants. Alors il vaut

$$(7) \quad y_i^{(h+1)} = \sum_{j=0}^{k-1} a_i^j y_j^{(h+1)} + \sum_{\lambda=0}^h \sum_{j=0}^n m_{i,\lambda}^j y_j^{(\lambda)}, \quad i = k, k + 1, \dots, n,$$

où $a_i^j, m_{i,\lambda}^j$ sont des fonctions de t . Si nous introduisons les nouvelles courbes directrices par les relations

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= y_i, & i &= 0, 1, \dots, k - 1, \\ \bar{y}_i &= y_i - \sum_{j=0}^{k-1} a_i^j y_j, & i &= k, k + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

alors $\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_n$ seront liées par les relations similaires à (7), mais il sera encore $a^i = 0$ pour tous i, j . Les points (6) resteront linéairement indépendants. Alors nous supposons désormais que les points (6) sont linéairement indépendants et que les courbes directrices ont été choisies de sorte que

$$(8) \quad y_i^{(h+1)} = \sum_{\lambda=0}^h \sum_{j=0}^n m_{i,\lambda}^j y_j^{(\lambda)}, \quad i = k, k+1, \dots, n,$$

eût lieu.

Ayons sur le monosystème la courbe (5). Nous allons chercher quand le point $x(t_0)$ est son point semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 1. Nous avons d'après (8)

$$\begin{aligned} x^{(h+1)} &= \sum_{j=0}^n \alpha^j y_j^{(h+1)} + \sum_{l=0}^h \sum_{j=0}^n (\cdot) y_j^{(l)} = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j y_j^{(h+1)} + \sum_{l=0}^h \sum_{j=0}^n (\cdot) y_j^{(l)} \end{aligned}$$

on (\cdot) signifie les coefficients que nous n'intéressent pas. Pour $x^{(h+1)}(t_0) \in T_h(t_0)$ il est nécessaire et il suffit que

$$\alpha^0(t_0) = \alpha^1(t_0) = \dots = \alpha^{(k-1)}(t_0)$$

ait lieu.

Alors l'espace $[y_k(t_0), \dots, y_n(t_0)]$ de la dimension $n - k$ a la propriété que le point $x(t_0)$ est un point semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 1 de la courbe $x(t)$ si et seulement si $x(t_0) \in [y_k(t_0), \dots, y_n(t_0)]$. La courbe $x(t)$ est semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 1 si et seulement s'elle est placée sur la variété $[y_k(t), \dots, y_n(t)]$.

Spécialement, si $k = n + 1$, alors les points

$$y_0, \dots, y_n, y'_0, \dots, y'_n, \dots, y_0^{(h+1)}, \dots, y_n^{(h+1)}$$

sont linéairement indépendants, alors aucune courbe de la forme (5) sur le monosystème n'a de points semiquasiasymptotiques d'indice h . Si $k = 0$, alors chaque courbe sur le monosystème est semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 1 (de même, comme on voit aisément, d'ordre arbitraire).

3. Les courbes directrices du monosystème soient choisies de sorte que (8) ait lieu. Soit

$$(9) \quad x(t) = \sum_{j=k}^n \alpha^j(t) y_j^{(j)}$$

une courbe semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 1 sur le monosystème. Par la

différentiation et l'application de (8) on obtient

$$\begin{aligned} x^{(h+1)} &= \sum_{j=k}^n \alpha^j y_j^{(h+1)} + \sum_{l=0}^h \sum_{j=k}^n (\cdot) y_j^{(l)} = \\ &= \sum_{j=k}^n \alpha^j \sum_{q=0}^{k-1} m_{j,h}^q y_q^{(h)} + \sum_{q=k}^n (\cdot) y_q^{(h)} + \sum_{l=0}^{h-1} \sum_{q=0}^n (\cdot) y_q^{(l)}, \\ x^{(h+2)} &= \sum_{q=0}^{k-1} \left(\sum_{j=k}^n \alpha^j m_{j,h}^q \right) y_q^{(h+1)} + \sum_{l=0}^h \sum_{q=0}^n (\cdot) y_q^{(l)}. \end{aligned}$$

On voit que $x^{(h+2)}(t_0) \in T(t_0)$ (cela signifie que $x(t_0)$ est le point semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 2 de la courbe $x(t)$) si et seulement si on a

$$(10) \quad \sum_{j=k}^n \alpha^j(t_0) m_{j,h}^q(t_0) = 0 \quad \text{pour } q = 0, \dots, k-1.$$

Ces points forment un sous-espace linéaire de la dimension $n - k - k_1$ de l'espace $[y_0(t_0), \dots, y_n(t_0)]$, où k_1 est le rang de la matrice $(m_{j,h}^\alpha(t_0))$ ($j = k, \dots, n$; $\alpha = 0, \dots, k-1$). Il y a évidemment $k_1 \leq k$.

Si on a spécialement $k + k_1 = n + 1$, des points semiquasiasymptotiques d'ordre 2 n'existent sur aucune courbe semiquasiasymptotique d'ordre 1. Si on a $k_1 = 0$, alors sur chaque courbe semiquasiasymptotique d'ordre 1 le point $x(t_0)$ est semiquasiasymptotique d'ordre 2.

4. Choisissons les courbes directrices sur le monosystème de façon que (8) ait lieu et ayons sur ce monosystème une courbe (5). Nous allons établir quand le point $x(t_0)$ est le point quasiasymptotique d'indice h de cette courbe.

D'après (8) nous avons

$$\begin{aligned} x' &= \sum_{j=0}^n \alpha^j y_j' + \sum_{j=0}^n \alpha^{j'} y_j, \\ x^{(h+1)} &= \sum_{j=0}^n \alpha^j y_j^{(h+1)} + \sum_{j=0}^n h \alpha^{j'} y_j^{(h)} + \sum_{l=0}^{h-1} \sum_{j=0}^n (\cdot) y_j^{(l)} = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j y_j^{(h+1)} + \sum_{j=0}^n (h \alpha^{j'} + \sum_{q=k}^n \alpha^q m_{q,h}^j) y_j^{(h)} + \sum_{l=0}^{h-1} \sum_{j=0}^n (\cdot) y_j^{(l)}. \end{aligned}$$

Les points (6) étant linéairement indépendants, d'après (3) il y a $x(t_0) \in T_h(\alpha_0^j, t_0)$ si et seulement si

$$(A) \quad \alpha^0(t_0) = \dots = \alpha^{(k-1)}(t_0) = 0;$$

(B) le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha^0, & \dots, & \alpha^n \\ h \alpha^{0'} + \sum_{q=k}^n \alpha^q m_{q,h}^0, & \dots, & h \alpha^{n'} + \sum_{q=k}^n \alpha^q m_{q,h}^n \end{pmatrix}$$

est 1 pour $t = t_0$.

La condition (A) nous dit que le point $x(t_0)$ doit être semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 1. La condition (B) est remplie, parce que un des nombres $\alpha^{(k)}(t_0), \dots, \alpha^{(n)}(t_0)$ au moins est différent de zéro, si et seulement s'il existe un nombre β de sorte que

$$\alpha^j(t_0) = -\frac{1}{h} \sum_{q=k}^n \alpha^q(t_0) m_{q,h}^j(t_0) + \beta \alpha^j(t_0) \quad \text{pour } j \leq 0, \dots, n,$$

alors si pour $t = t_0$ on a

$$x' = \sum_{j=0}^n \alpha^j y_j' - \frac{1}{h} \sum_{j=0}^n \sum_{q=k}^n \alpha^q m_{q,h}^j y_j + \beta \sum_{j=0}^n \alpha^j y_j,$$

alors si la tangente de la courbe $x(t)$ au point $x(t_0)$ est la droite

$$\left[x(t_0), \left(\sum_{j=k}^n \alpha^j y_j' - \frac{1}{h} \sum_{j=0}^n \sum_{q=k}^n \alpha^q m_{q,h}^j y_j \right)_{t=t_0} \right].$$

Alors nous avons ce théorème: *Les points (6) étant linéairement indépendants et (8) étant rempli, le point $x(t_0)$ peut être le point quasiasymptotique d'indice h de la courbe $x(t)$ si et seulement s'il est placé à l'espace $[y_k(t_0), \dots, y_n(t_0)]$. A chaque point de cet espace il existe une et une seule direction (direction quasiasymptotique) telle que le point $x(t_0)$ est le point quasiasymptotique d'indice h si et seulement si la tangente de la courbe $x(t)$ au point $x(t_0)$ a cette direction.*

Littérature

- [1] M. Jůza: Sur les variétés représentant une généralisation des surfaces réglées. Czech. Mat. Journal, 10 (85), 1960, 440—456.
 [2] M. Jůza: Jednparametrické systémy rovin v prostoru S_6 . Matem.-fyz. čas. SAV, 13, 1963, 125—136.

Adresse de l'auteur: Praha 1, Loretánské nám. 3, ČSSR (Výzkumný ústav matematických strojů).