Béla Csákány; György Pollák

О графе подгрупп конечной группы

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 2, 241–247

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100891`

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

О ГРАФЕ ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

B. CSÁKÁNY, G. POLLÁK (Г. Поллак - Б. Чакань), Szeged

(Поступило в редакцию 5/VI 1967 г.)

Понятие графа подполугрупп некоторой полугруппы было введено Й. Босаком в работе [2]. Поскольку в случае конечных групп это понятие является тривиальным, в настоящей заметке вводится аналогичное, но более подходящее для групп понятие графа подгрупп. Доказываются предложения о связности, а также оценки о диаметре графа подгрупп конечных групп. § 1 содержит основные определения и несколько общих замечаний; § 2 посвящен случаю непростых, а § 3 – случаю простых групп. Сформулируется также несколько открытых вопросов. Относительно терминологии мы ссылаемся на [7].

1

Хотя некоторые понятия и замечания переносятся без изменения и на общий случай, все же под группой мы будем понимать везде конечную группу.

Произвольной группе G поставим в соответствие граф Γ, где вершинами Γ служат все нетривиальные подгруппы G, а вершины H и K соединены ребром тогда и только тогда, если в $H \cap K$ содержится отличный от единицы элемент (для обозначения этого обстоятельства мы пишем: $H \sim K$). Γ называется *графом подгрупп группы* G.

Если граф подгрупп группы G является связным, мы, для краткости, говорим: G – *связна*. Аналогично, мы будем говорить о *расстоянии* нетривиальных подгрупп H и K в группе G, а также о *диаметре* связной группы G (обозначение: $\varrho(H, K)$ и $\delta(G)$, соответственно).

Пусть опять H и K – нетривиальные подгруппы в G. Если найдутся в G такие нетривиальные подгруппы $L_1, \ldots, L_n$, что $H \sim L_1$, $L_1 \sim L_2, \ldots, L_{n-1} \sim L_n, L_n \sim K$, то мы говорим: H и K *соединены цепочкой* $H \sim L_1 \sim \ldots \sim L_n \sim K$, или просто: имеет место $H \sim L_1 \sim \ldots \sim L_n \sim K$. Ясно, что в этом случае $\varrho(H, K) \leqq n + 1$.

Транзитивное замыкание отношения $\sim$, т.е. отношение „могут быть соединены какой-либо цепочкой" индуцирует разбиение множества всех нетривиальных подгрупп группы G. Берем любой класс полученного разбиения. Объединение всех подгрупп, составляющих этот класс, называется *блоком группы* G. Из определения следует, что блоки попарно пересекаются лишь в единичном элементе. Далее, ясно, что группа G является связной тогда и только тогда, если число ее блоков равно единице. Отметим, что всякая максимальная подгруппа входит в некоторый блок, и каждый блок является объединением входящих в него максимальных подгрупп.

Из определения блока непосредственно следует

Лемма 1. *Пусть B — блок, а M — подгруппа группы G. Если в $B \cap M$ содержится элемент, отличный от* 1, *то имеет место либо $M \subseteqq B$, либо $M = G$.*

Полезным будет и следующая

Лемма 2. *Произвольный блок B группы G является либо подгруппой, либо инвариантным* (*относительно внутренних автоморфизмов*) *множеством в G.*

Доказательство. Допустим, что B не является подгруппой в G. Тогда существуют элементы $a, b \in B$, для которых $ab \notin B$. В силу леммы 1 имеем

$$\{a, b\} = \{a, ab\} = G\,. \tag{1}$$

Пусть теперь $B = \bigcup_{i=1}^{k} M_i$, где M_i $(i = 1, \ldots, k)$ — максимальные подгруппы в G. Будем считать для определенности, что $a \in M_1$, $b \in M_2$ $(k > 1$, иначе B была бы подгруппой в $G)$. Принимая во внимание $M_1^a(=a^{-1}M_1a) = M_1$, а также тот факт, что максимальные подгруппы, соединяемые какой-нибудь цепочкой, при автоморфизме переходят в такие же подгруппы, мы получим $B^a = B$. Аналогично получается $B^b = B$. Отсюда, ввиду (1) следует, что B отображается на себя при любом внутреннем автоморфизме G.

2

Сперва рассмотрим случай абелевых групп. Легко усмотреть, что простые циклические группы и только они обладают пустым графом. Одновершинным графом обладают лишь циклические группы порядка p^2 (p — простое число). Пусть теперь G — несвязная абелева группа, а H и K — нетривиальные подгруппы в G, не соединяемые никакой цепочкой. Тогда $H \cap K = 1$; $\{H, K\} = G$, в противном случае H и K соединялись бы цепочкой $H \sim \{H, K\} \sim K$; наконец, H и K — простого порядка, ибо, если например H_1 — нетривиальная подгруппа в H, то H и K могут быть соединены цепочкой $H \sim \{H_1, K\} \sim K$. Таким образом, G — прямое произведение двух простых циклических групп. Отсюда видно также, что диаметр связной абелевой группы не превышает двух.

К общему случаю непростых групп относится

Теорема 1. *Неабелевы непростые несвязные группы исчерпаются некоммутативными группами первой ступени без центра. Диаметр остальных неабелевых непростых групп не превышает* 4.

Замечание. Полное описание некоммутативных групп первой ступени, т. е. неабелевых групп, все истинные подгруппы которых являются абелевыми, было дано Редеи в [6], стр. 720–735. Из его результатов следует, что каждой упорядоченной паре различных простых чисел (p, q) соответствует единственная с точностью до изоморфизма некоммутативная группа первой ступени без центра, которую мы обозначим через $R(p, q)$. Последняя определяется, как некоммутативное расщепляемое расширение элементарной абелевой группы M порядка p^m (где $m = o\ (p(\operatorname{mod} q))$) при помощи циклической группы порядка q. Кроме того, из $R(p_1, q_1) \cong R(p_2, q_2)$ следует $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$, и все некоммутативные группы первой ступени без центра представляются в виде $R(p, q)$ при подходящих p и q.

Доказательство. Допустим, что в непростой неабелевой группе G найдутся нетривиальные подгруппы H и K, неудовлетворяющие соотношению $\varrho(H, K) \leqq 4$. Покажем, что G – некоммутативная группа первой ступени без центра.

Пусть M – минимальный (нетривиальный) нормальный делитель в G. Из неравенства треугольника следует, что хотя бы для одного из H, K – скажем, для H – не имеет места $\varrho(M, H) \leqq 2$. Отсюда $M \cap H = 1$ и $\{M, H\} = MH = G$, ибо в противном случае $M \sim H$, или $M \sim MH \sim H$, соответственно. Далее, H – группа простого порядка, потому что если бы H обладала нетривиальной подгруппой L, то M и H были бы соединены цепочкой $M \sim ML \sim H$.

Допустим, что G – связна. Тогда H и K могут быть соединены некоторой цепочкой $H \sim L_1 \sim \ldots \sim L_n \sim K$. Будучи группой простого порядка, H является истинной подгруппой в L_1. Поэтому $M \cap L_1$ – нетривиально, так что имеет место $M \sim L_1 \sim H$. Получено противоречие; значит G – несвязная группа. Отсюда видно также, что M и H принадлежат различным блокам G.

Покажем, что H совпадает со своим нормализатором $N_G(H)$ в G. В самом деле, если $H \subset N_G(H) \subset G$ (знак $\subset$ означает истинное включение), то $M \sim N_G(H) \sim H$. Если же $N_G(H) = G$, то G разлагается в прямое произведение $M \times H$. Ввиду неабелевости G, M не может быть абелевой, но тогда M обладает нетривиальной подгруппой M_1, так что имеем $M \sim M_1 \times H \sim H$.

Из только что доказанного следует, что число сопряженных с H подгрупп в G равно $o(M)$; так как они попарно пересекаются в 1, то и покрывают $G \setminus M$. Из леммы 2 следует, что блок B, содержащий M, является инвариантным множеством. Если $b \in B \setminus M$, то сопряженные с b элементы принадлежат к B, откуда получаем, что B и H обладают нетривиальным пересечением, что противоречит лемме 1. Таким образом, $B = M$, т. е. M – блок группы G.

Пусть теперь S – нееденичная силовская p-подгруппа в M. Если $S \subset M$, то из-за минимальности M имеем $N_G(S) \subset G$. По лемме Фраттини (см. напр. [1], стр. 117) $\{M, N_G(S)\} = G$, так что $N_G(S) \subsetneqq M$, что опять-таки в силу леммы 1 невозможно. Значит, $S = M$, т. е. M — p-группа. Как минимальный нормальный делитель, M является характеристически простым. Отсюда M — элементарная абелева p-группа.

Поскольку каждая истинная подгруппа в G является или подгруппой в M, или же сопряженной с H, то все истинные подгруппы G — абелевы, так что G — некоммутативная группа первой ступени. Наконец, если G обладает центром Z, то из равенства $H = N_G(H)$ следует $Z \subseteqq H$. $Z = H$ невозможно из-за неабелевости G; таким образом, $Z = 1$.

С другой стороны, пусть $G \cong R(p, q)$, P и Q — силовские подгруппы G ($o(P) = p^m$, $o(Q) = q$). Допустим, что существует цепочка $Q \sim L_1 \sim \ldots \sim L_n \sim P$, соединяющая Q с P. Тогда $Q \subset L_1$, так что $o(L_1) = p^n q$ $(0 < n < m)$, и $L_1 \cap P$ — нетривиальная подгруппа в G, каторая, очевидно, содержится в центре G, что противоречит предположению о строении G. Теорема доказана.

В дальнейшем мы сделаем несколько замечаний относительно диаметра связных групп. Для таких групп *следующие условия равносильны*:

1) $\delta(G) = 1$.
2) *G имеет единственную подгруппу простого порядка.*

В самом деле, если P, Q — различные подгруппы простого порядка в G, то $\varrho(P, Q) \geqq 2$. С другой стороны, каждая неединичная группа содержит подгруппу простого порядка, поэтому 2) влечет 1).

Оказываются равносильными и условия

1) $\delta(G) \leqq 2$.
2) *G не порождается никакой парой различных подгрупп простого порядка.*

Действительно, если $G = \{a, b\}$, где $o(a) = p$, $o(b) = q$ (p, q — простые числа) и $\{a\} \neq \{b\}$, то $\{a\} \cap \{b\} = 1$, а если $\{a\} \sim H \sim \{b\}$, то $H \supseteqq \{a\}, \{b\}$, т. е. $H = G$. Обратно, при выполнении 2) пусть H, K — подгруппы в G, a и b — элементы простого порядка из H и K, соответственно. Тогда $H \sim \{a, b\} \sim K$. Отсюда следует $\delta(G) \leqq 2$.

Рассмотрим теперь непростую группу G с диаметром 4. Пусть опять M — минимальный нормальный делитель в G, и пусть H, K — подгруппы в G с расстоянием 4. Мы имеем с одной стороны $\varrho(M, H)$, $\varrho(M, K) \leqq 2$, ибо в противном случае можно было бы доказать несвязность группы G таким же способом, как это было сделано при доказательстве теоремы 1. С другой стороны имеет место $\varrho(M, H), \varrho(M, K) \geqq 2$, иначе на освновании неравенства треуголника получилось бы $\varrho(H, K) < 4$. Значит, $\varrho(M, H) = \varrho(M, K) = 2$. Отсюда $M \cap H = M \cap K = 1$ и существуют цепочки $M \sim L_1 \sim H$ и $M \sim L_2 \sim K$, соединяющие M с H и K, соответственно. Если $MH \subset G$, то цепочка $H \sim MH \sim L_2 \sim K$ соединяет H с K, так что $\varrho(H, K) \leqq 3$, что противоречит предположению. Если далее H обладает нетривиальной подгруппой Q, то H и K соединяются цепочкой $H \sim QM \sim L_2 \sim K$, что также невозможно.

Итак, G является расщепляемым расширением своего минимального нормального делителя M при помощи группы простого порядка H $(o(H) = p)$. Из-за минимальности M будет характеристически простым, поэтому M представляется в виде прямого произведения нескольких экземпляров подходящей простой группы P (их число, конечно, может равняться единице).

Легко видеть при этом, что K тоже является группой порядка p; кроме того, если $H = \{b\}$, то можно найти такое $c \in K$ $(c \neq 1)$, что автоморфизм группы M, индуцированный элементом c, разлагается в произведение автоморфизма, индуцированного элементом b и некоторого внутреннего автоморфизма группы M.

Предположим теперь, что P – простого порядка, т. е. M – элементарная абелева группа. В этом случае, понятно, $M = P$ невозможно. Если найдется в G подгруппа Q со свойствами $M \cap Q \subset M$, $Q \nsubseteq M$, то $M \cap Q$ оказывается нетривиальным нормальным делителем в G, что противоречит минимальности M. Значит, такой подгруппы Q не существует; но тогда легко видеть, что G – некоммутативная группа первой ступени без центра, т. е. по теореме 1 G – несвязна. Отсюда видно, что P – нециклическая простая группа.

Пусть $M = P_1 \times \ldots \times P_k (P_i \cong P; i = 1, \ldots, k)$. Тогда $M = (b^{-1}Mb =) M^b = P_1^b \times \ldots \times P_k^b$. По теореме Ремака-Шмидта (см. [7]) существует такая подстановка $i \to i'$ $(i = 1, \ldots, k)$, что P_i^b и $P_{i'}$ – центрально изоморфны, т. е., поскольку M – без центра, $P_i^b = P_{i'}$. Таким образом, автоморфизм группы M, индуцированный элементом b, осуществляет подстановку факторов $P_1, \ldots, P_k$. Учитывая, что при внутреннем автоморфизме прямые сомножители – неподвижны, получим, что $P_i^b = P_i^c$ $(i = 1, \ldots, k)$. Допустим $k > 1$. $i' = i$ ни для какой i не может быть, так как в этом случае H и K были бы соединены цепочкой $H \sim P_iH \sim P_iK \sim K$. Значит, для произвольного $a \in P_1$ $(a \neq 1)$ элементы $a, a^b (= b^{-1}ab), a^{b^2}, \ldots, a^{b^{p-1}}$ принадлежат попарно различным факторам P_i. Поэтому $U = \{a\}\{a^b\} \ldots \{a^{b^{p-1}}\}$ – нетривиальная подгруппа в M. То же самое верно для $V = \{a\}\{a^c\} \ldots \{a^{c^{p-1}}\}$. U и V пересекаются нетривиально, так что H и K соединены цепочкой $H \sim UH \sim VK \sim K$. Отсюда следует, что $k = 1$.

Мы доказали, что *непростая группа диаметра* 4 *должна быть расщепляемым расширением нециклической простой группы при помощи циклической простой.* Таким строением обладают симметрические группы S_n (в случае $n > 4$), но у них диаметр, как легко видеть, не превосходит трех. Вопрос о существовании непростой группы диаметра 4 является открытым.

3

Относительно связности неабелевых простых групп мы сделаем лишь некоторые замечания. Займемся сначала частным случаем знакопеременных групп.

Теорема 2. *Если $n > 4$, то знакопеременная группа A_n является связной и $\delta(A_n) \leqq 4$.*

Доказательство. Достаточно доказать второе утверждение. Легко видеть, что при $1 \subset H' \subseteqq H \subset A_n$, $1 \subset K' \subseteqq K \subset A_n$ имеет место $\varrho(H, K) \leqq \varrho(H', K')$; поэтому можем ограничиваться доказательством соотношения $\varrho(H, K) \leqq 4$ для H, K простого порядка. Пусть $o(H) = p$, $o(K) = q$. Различаем три случая.

I) $p < n$, $q < n$. Тогда как H, так и K имеет нетривиальное инвариантное множество Γ_H, Γ_K переставляемых символов. Предположим при этом, что Γ_H и Γ_K являются инвариантными множествами наименьшей мощности соответствующих групп. Обозначим через D_{Γ_H} и D_{Γ_K} группы всех четных подстановок, оставляющих инвариантными подмножества Γ_H и Γ_K, соответственно. Группа $D_{\Gamma_H} \cap D_{\Gamma_K}$ состоит из всех четных подстановок оставляющих инвариантными множества $\Gamma_H \cap \Gamma_K$, $\Gamma_H \setminus \Gamma_K$, $\Gamma_K \setminus \Gamma_H$ и $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle \setminus (\Gamma_H \cup \Gamma_K)$. Если хотя бы одно из этих множеств содержит больше чем два элемента, или хотя бы два множества содержат по два элемента, то, очевидно, $D_{\Gamma_H} \cap D_{\Gamma_K} \neq 1$. Однако это выполняется тривиальным образом при $n \geqq 6$, а при $n = 5$ (как и при любом простом n) Γ_H и Γ_K состоят каждый из одного элемента, так что $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle \setminus (\Gamma_H \cup \Gamma_K)$ содержит не меньше трех элементов. Таким образом имеем $H \sim D_{\Gamma_H} \sim D_{\Gamma_K} \sim K$ и $\varrho(H, K) \leqq 3$.

II) $p < n$, $q = n$. В этом случае, как мы только что отметили, $o(\Gamma_H) = 1$, т. е. H оставляет неподвижным некоторый символ $k\ (\leqq n)$. Пусть теперь g — первообразный корень $\bmod\ q$. Тогда легко найти подстановку β в симметрической группе S_n, оставляющую символ k неподвижным, для которого $\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^g$ ($\{\alpha\} = K$; см. [6], стр. 139). При этом β оказывается циклом порядка $q - 1$, так что $\beta^2 \neq 1$, $\beta^2 \in D_{\langle k \rangle}$ и $\beta^2 \in N_{A_n}(K)$. Ввиду простоты A_n, H и K соединены цепочкой $H \sim D_{\langle k \rangle} \sim N_{A_n}(K) \sim K$.

III) $p = q = n$. Тогда двукратным применением рассуждения из II) получается цепочка $H \sim N_{A_n}(H) \sim D_{\langle n \rangle} \sim N_{A_n}(K) \sim K$.

Мы видим, что $\delta(A_n) = 4$ *влечет за собой простоту числа n.* Вопрос о существовании знакопеременной группы диаметра 4 является открытым. С другой стороны, для произвольных n можно показать, что $\delta(A_n) \geqq 3$.

Остается открытой и проблема существования несвязной неабелевой простой группы. Для некоторых отдельных простых групп связность устанавливается сопоставлением некоторых известных теорем о простых группах и следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть G — простая группа; $B_1, \ldots, B_k$ — блоки в G. Существуют такие натуральные числа $\pi_1, \ldots, \pi_k$, что*

1) $o(G) = \pi_1 \ldots \pi_k$,
2) *если $i \neq j$, то π_i и π_j — взаимно просты* ($1 \leqq i, j \leqq k$),
3) *$a \in B_i$ и $o(a) \mid \pi_i$ — равносильны для любого $a \in G$.*

Доказательство. Если $o(G) = p_1^{e_1} \ldots p_n^{e_n}$ (p_i — простые числа), то в качестве π_i ($i = 1, \ldots, k$) берем произведение всех тех $p_l^{e_l}$, для которых существует в B_i элемент порядка p_l. Покажем, что π_i, определенные таким образом, удовлетворяют требованиям 1)—3).

Каждый блок B_i простой группы G является инвариантным множеством в G. Чтобы убедится в этом, ввиду леммы 2 достаточно доказать, что B_i не может быть истинной подгруппой в G. Допустим противное; тогда по лемме 1 B_i совпадает со своим нормализатором в G и пересекается со всеми своими сопряженными в 1, так что по теореме Фробениуса в G найдется нетривиальный нормальный делитель [7].

Если теперь для некоторых $1 \leqq l \leqq n$ и $1 \leqq i, j \leqq k$ выполняется $p_l \mid (\pi_i, \pi_j)$, то существуют $a \in B_i$, $b \in B_j$, такие, что $o(a) = o(b) = p$. Силовские p-подгруппы в G, содержащие a и b, являются сопряженными и поэтому принадлежат одному и тому же блоку, откуда получим $B_i = B_j$ и $\pi_i = \pi_j$. Итак, имеет место 2); отсюда сразу же следует и 1). После этого 3) доказывается вполне тривиальным образом.

Приводим примеры. Согласно известному результату Янко, группа не может быть простой, если она обладает нильпотентной максимальной подгруппой, силовксая 2-подгруппа которой является метабелевой [3]. Отсюда вытекает связность групп $LF(2,7)$, $LF(2,2^3)$ и $LF(2,2^4)$. Другие теоремы Янко о цепочках подгрупп простых групп позволяют убедиться в связности $LF(2,11)$, $LF(2,17)$ и $LF(2,19)$ (см. [4], [5]).

Литература

[1] *R. Baer:* Classes of finite groups and their properties, Illinois J. Math. *1* (1957), 115—187.

[2] *J. Bosák:* The graphs of semigroups, Proc. Sympos. Smolenice, 1963, 119—125.

[3] *Z. Janko:* Verallgemeinerung eines Satzes von B. Huppert und J. G. Thompson, Arch. Math., *12* (1961), 280—281.

[4] *Z. Janko:* Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen Untergruppen, Math. Zeitschrift, *79* (1962), 422—424.

[5] *Z. Janko:* Finite groups with invariant fourth maximal subgroups, Math. Zeitschrift, *82* (1963), 82—89.

[6] *L. Rédei:* Algebra, Leipzig, 1959.

[7] *A. Speiser:* Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin, 1937.

Адрес авторов: József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete, Szeged, Aradi vértanúk tere 1, Hungary.