Břetislav Novák

Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 1, 154–180

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100884

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

MITTELWERTSÄTZE DER GITTERPUNKTLEHRE

BŘETISLAV NOVÁK, Praha

(Eingelangt am 12. Oktober 1967)

1. EINLEITUNG

Sei r eine natürliche Zahl, $r \geqq 2$ und sei

$$Q(u) = Q(u_j) = \sum_{l,j=1}^{r} a_{lj} u_l u_j \tag{1}$$

eine positiv definite quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten und mit der Determinante D. Seien weiter $b_1, b_2, \ldots, b_r$ ganze, $M_1, M_2, \ldots, M_r$ natürliche und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ reelle Zahlen. Für $x > 0$ setze man

$$A(x) = \sum \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j\right), \tag{2}$$

wo über alle Systeme $u_1, u_2, \ldots, u_r$ reeller Zahlen, für die $Q(u_j) \leqq x$ und $u_j \equiv$ $\equiv b_j \pmod{M_j}$, $j = 1, 2, \ldots, r$ ist, summiert wird. Sei weiter

$$M = \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{(D)} \prod_{j=1}^{r} M_j}$$

und

$$V(x) = \frac{M x^{r/2} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\right)}{\Gamma((r/2) + 1)}$$

($\delta = 1$ falls alle Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$ ganz sind, sonst $\delta = 0$).

In der Arbeit [6] wurde bei den obigen Voraussetzungen die Funktion

$$P(x) = A(x) - V(x) \tag{3}$$

untersucht und es wurde unter anderem bewiesen, dass

$$(4) \qquad P(x) = O(x^{r/2-1}) \quad \text{für} \quad r > 4\,, \quad P(x) = O(x \lg^2 x) \quad \text{für} \quad r = 4$$

ist (im Falle von rationalen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ gibt diese Ergebnisse schon LANDAU [4], S. 148 an).

Wie bekannt, ist die Abschätzung (4) im allgemeinen definitiv. JARNÍK (bei Landau [4], S. 162) zeigt, dass im Falle

$$(5) \qquad M_j = 1\,, \quad b_j = \alpha_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

(für $r \geqq 2$)

$$(6) \qquad P(x) = \Omega(x^{r/2-1})$$

gilt und sein Verfahren ist auch allgemeiner im Falle $\delta = 1$ anwendbar. WALFISZ erweiterte in der Arbeit [11] die Geltung von (6) auf den Fall, dass die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ rational sind, $r \geqq 4$ und mindestens eine der dazugehörenden verallgemeinerten Gaussschen Summen (siehe § 2) von Null verschieden ist. Ein anderer einfacher Beweis (sogar für $r \geqq 2$) dieser Behauptung ist in [9] (Satz 2) gegeben. Sind aber die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ rational und alle dazugehörende verallgemeinerte Gausssche Summen gleich Null, so ist für $r \geqq 4$

$$P(x) = O(x^{r/4} \lg x)$$

und Walfisz [11] beweist mit Hilfe der Theorie der Modulformen sogar (immer für $r \geqq 4$)

$$(7) \qquad P(x) = O(x^{r/4-1/10})\,.$$

Die Lücke zwischen der Abschätzung (7) und dem alten Ergebniss von Landau ([4], S. 71–84)

$$(8) \qquad P(x) = \Omega(x^{(r-1)/4})\,,$$

welches für $r \geqq 2$ gilt, sobald $A(x) \not\equiv 0$ ist (sogar für eine beliebige positiv definite quadratische Form Q und beliebige Systeme $b_1, b_2, \ldots, b_r, M_1, M_2, \ldots, M_r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_r$ reeller Zahlen, $M_1 > 0, M_2 > 0, \ldots, M_r > 0$) lässt sich wahrscheinlich mit den zur Zeit zu Verfügung stehenden Mitteln nicht vollkommen beseitigen.

Im Zusammenhang mit dem Studium der Funktion (3) entstand noch das Problem der Untersuchung ihres Mittelwertes d. h. der Funktion

$$(9) \qquad T(x) = \sqrt{(M(x)/x)}\,,$$

wo

$$(10) \qquad M(x) = \int_0^x |P(y)|^2 \, \mathrm{d}y$$

ist (siehe z. B. Landau [4], S. 85–94, Jarník [1]–[3] usw.). Es ist zu erwarten, dass das Studium der Funktion (10) weniger schwierig sein wird, da es sich um eine nichtnegative, nichtfallende und stetige Funktion handelt.

In dieser Arbeit beschränken wir uns erstens auf die Untersuchung der Funktion (10) unter der Voraussetzung, dass die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ rational sind und beweisen folgende Sätze:

Hauptsatz 1. *Es seien die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ rational. Dann gibt es eine nichtnegative, nur von Q, $M_1, M_2, \ldots, M_r$, $b_1, b_2, \ldots, b_r$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ abhängige Konstante K so, dass*

$$M(x) = Kx^{r-1} + O(g(x)) \tag{11}$$

für $r \geqq 4$,

$$M(x) = Kx^2 \lg x + O(x^2 \lg^{1/2} x) \tag{12}$$

für $r = 3$, wo $g(x) = x^{r-2}$ für $r > 5$, $g(x) = x^3 \lg^2 x$ für $r = 5$, $g(x) = x^{5/2} \lg x$ für $r = 4$.

Der Wert von K ist genau dann von Null verschieden, wenn mindestens eine der zugehörigen verallgemeinerten Gaussschen Summen[1]*) von Null verschieden ist.*

Diesen Satz beweist Jarník in der Arbeit [3] unter der Voraussetzung (5). Unser Satz ist also eine Verallgemeinerung dieser Ergebnisse von Jarník. Es ist noch zu bemerken, dass man das Ergebniss (11) für $r > 5$ allgemein nicht verbessern kann, da für $r > 2$ unter der Voraussetzung (5) (siehe [3], Satz 2) für jede von x unabhängige Konstante K'

$$M(x) - Kx^{r-1} - K'x^{r-2} = \Omega(x^{r-2})$$

gilt. Ein Blick auf den Beweis lehrt, dass man dasselbe Ergebnis für $r > 2$ auch bei der schwächeren Voraussetzung $\delta = 1$ erhält.

Aus unserem ersten Hauptsatz folgt also für $r \geqq 4$ die zitierte Ω-Abschätzung von Walfisz und für $r = 3$ bekommen wir für $K > 0$ sogar

$$P(x) = \Omega(x^{1/2} \lg^{1/2} x)\,.$$

Wir wenden uns nun (immer unter der Voraussetzung, dass $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ rational sind) zum Fall $K = 0$. Ist $A(x)$ identisch gleich Null (z. B. $Q(u_j) = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_r^2$, $b_1 = 1$, $M_1 = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $b_j = 0$, $\alpha_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 2, 3, \ldots, r$) ist das Problem trivial und dieser Fall wird von unseren weiteren Erwägungen ausgeschlossen. Im singulären Fall[2]) (d. h. $K = 0$ und $A(x) \not\equiv 0$) folgt aus der Arbeit [10] von Walfisz über Modulformen für $r \geqq 4$ die Gültigkeit der Beziehung

$$M(x) = K_0 x^{r/2+1/2} + O(x^{r/2} \lg^2 x)\,,$$

[1]) Siehe § 2. Eine Darstellung von K wird man in § 3 finden.

[2]) Die Existenz des singulären Falles wurde von Walfisz in [11] gezeigt.

wo K_0 eine positive, nur von $Q, M_1, M_2, \ldots, M_r, b_1, b_2, \ldots, b_r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ abhängige Konstante ist. Für diesen Fall beweisen wir für $r \geqq 2$ auf eine einfachere Weise den folgenden Satz (der für $r \geqq 4$ etwas schwächer ist als das Ergebnis von Walfisz).

Hauptsatz 2. *Im singulären Fall gibt es zwei positive, nur von $Q, M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_r, b_1, b_2, \ldots, b_r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ abhängige Konstanten K_{01} und K_{02} so, dass für alle genügend grosse x*

$$K_{01}x^{r/2+1/2} < M(x) < K_{02}x^{r/2+1/2} \tag{13}$$

gilt.

Im singulären Fall ist also $T(x) = O(x^{(r-1)/4})$ und $T(x) = \Omega(x^{(r-1)/4})$, was in einem gewissen Sinne die Abschätzung (8) von Landau rehabilitiert.

Wir übergehen weiter zum Fall des allgemeinen Systems $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Aus (4) folgt, dass für $r > 4$ immer $M(x) = O(x^{r-1})$ gilt. Für $r = 4$ bekommt man aber mit Hilfe der Ergebnisse der Arbeit [6] nur $M(x) = O(x^3 \lg^2 x)$. Für $r = 2$, $r = 3$ ist die Methode aus [6] nicht brauchbar. Für die Funktion $M(x)$ kann man jedoch folgende Ergebnisse beweisen:

Hauptsatz 3. *Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ beliebige reelle Zahlen und sei $A(x)$ nicht identisch gleich Null. Dann gibt es positive Konstanten K_1 und K_2, die nur von $Q, M_1, M_2, \ldots, M_r, b_1, b_2, \ldots, b_r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ abhängen so, dass*

$$K_1x^{r/2+1/2} < M(x) < K_2x^{r-1}$$

für $r > 3$

$$K_1x^2 < M(x) < K_2x^2 \lg x$$

für $r = 3$ und

$$K_1x^{3/2} < M(x) < K_2x^{3/2}$$

für $r = 2$ ist.

Man bemerke, dass diese Ergebnisse im allgemeinen definitiv sind (vgl. mit Hauptsätzen 1 und 2).

Zum Beweis der angeführten Sätze benützen wir das Verfahren von Jarník (siehe z. B. [1]–[3]) d. h. die Darstellung der Funktion (10) mittels eines Doppelkurvenintegrals mit Hilfe der entsprechenden Thetafunktion. Die Hauptsätze 1 und 2 wurden ohne Beweise (für $r > 5$) in der vorläufigen Mitteilung [5] angeführt.

2. BEZEICHNUNGEN UND HILFSÄTZE

Solange ausdrücklich nicht etwas anderes gesagt wird, benützt man – ausser den im § 1 angeführten – folgende Verabredungen und Bezeichnungen:

Der Buchstabe c bezeichnet (verschiedene) positive Konstanten, die höchstens von der Form (1) und den Zahlen

$$(14) \qquad b_1, b_2, \ldots, b_r, \; M_1 > 0, M_2 > 0, \ldots, M_r > 0, \; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

abhängen. Die Symbole O, Ω und o werden zu dem Grenzübergang $x \to +\infty$ bezogen und die in deren Definitionen auftretenden Konstanten sind vom „Typus c". Ist $|A| \leqq cB$, so schreiben wir kurz $A \ll B$; die gleichzeitige Geltung von $A \ll B$ und $B \ll A$ soll mit $A \asymp B$ bezeichnet werden.

ϱ, n und k, eventuell mit Index oder Strich versehen, bedeuten immer natürliche, m, p und h (wieder eventuell mit Index oder Strich) ganze Zahlen. Kommen (in Formeln, Beziehungen usw.) die Zahlen h und k gleichzeitig vor, sind sie immer teilerfremd, d. h. $(h, k) = 1$ (ebenso $(h', k') = 1$ usw.). $\sum_{(m)}$ bedeutet die Summation über alle Systeme $m_1, m_2, \ldots, m_r$. In der ganzen Arbeit wird vorausgesetzt, dass die Zahl x genügend gross ist, d. h. $x > c$.

Die Funktionen $M_\varrho(x)$ werden rekurrent mittels der Beziehungen $(t > 0)$

$$M_1(t) = M(t) = \int_0^t |P(y)|^2 \, dy \,, \quad M_{\varrho+1}(t) = \int_0^t M_\varrho(y) \, dy$$

definiert. Für komplexes s mit $\operatorname{Re} s > 0$ sei

$$(15) \quad \Theta(s) = \Theta(s; \alpha_j) = \sum_{(m)} \exp\Big(- sQ(m_j M_j + b_j) + 2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j (m_j M_j + b_j)\Big) .$$

Die Reihe in (15) ist offenbar in jeder Halbebene $\operatorname{Re} s \geqq \varepsilon > 0$ absolut und gleichmässig konvergent; $\Theta(s)$ ist also eine in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ reguläre Funktion.

Unter einem Integral wird immer das (absolut konvergente) Lebesguesche Integral gemeint. Ist d eine reelle Zahl bzw. $\mathfrak{M}$ ein Intervall (beliebiger Art) mit den Endpunkten a und b $(-\infty \leqq a \leqq b \leqq +\infty)$, so setzen wir

$$\int_{(d)} f(s) \, ds = \int_{d - i\infty}^{d + i\infty} f(s) \, ds = i \int_{-\infty}^{\infty} f(d + it) \, dt$$

bzw.

$$\int_{\mathfrak{M}} f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt$$

und (für $s = (1/x) + it$)

$$\int_{\mathfrak{M}} f(s) \, dt = \int_{\mathfrak{M}} f\left(\frac{1}{x} + it\right) dt \,,$$

sobald die Integrale rechts existieren, und ähnlich in weiteren Fällen.

Für reelles a und $\operatorname{Re} z > 0$ bedeutet z^a den (regulären) Zweig der Funktion z^a, der positiv für positive Werte von z ist.

Wir führen nun ohne Beweis drei Hilfsätze an.

Lemma 1. *Es sei* $a_2 > a_1 > 0,\ b_2 > b_1 > 0,\ \lambda \geqq 1;\ \mu \geqq 1,\ \nu \geqq 1;\ f(s, s')$ *sei beschränkt und regulär im Bereich*

$$a_1 \leqq \operatorname{Re} s \leqq a_2\,, \quad b_1 \leqq \operatorname{Re} s' \leqq b_2\,.$$

Dann gelten folgende Gleichungen, in welchen alle sechs Doppelintegrale den Integranden

$$\frac{f(s, s')}{s^\lambda s'^\mu (s + s')^\nu}$$

haben und absolut konvergieren:

$$\int_{(a_1)} \left(\int_{(b_1)} \ldots \mathrm{d}s' \right) \mathrm{d}s = \int_{(a_1)} \left(\int_{(b_2)} \ldots \mathrm{d}s' \right) \mathrm{d}s = \int_{(b_2)} \left(\int_{(a_1)} \ldots \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}s' =$$
$$= \int_{(b_2)} \left(\int_{(a_2)} \ldots \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}s' = \int_{(a_2)} \left(\int_{(b_2)} \ldots \mathrm{d}s' \right) \mathrm{d}s = \int_{(a_2)} \left(\int_{(b_1)} \ldots \mathrm{d}s' \right) \mathrm{d}s\,.$$

Beweis. Siehe [3], Hilfssatz 1.

Lemma 2.[3] *Für* $a, b > 0,\ \varrho \ll 1$ *ist*

$$M_\varrho(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{(a)} \left(\int_{(b)} \frac{F(s)\, G(s')}{ss'(s + s')^\varrho}\, e^{x(s+s')}\, \mathrm{d}s' \right) \mathrm{d}s + O(x^{\varrho - 1})\,, \tag{16}$$

wo

$$F(s) = F(s; \alpha_j) = \Theta(s; \alpha_j) - \frac{M \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\right)}{s^{r/2}}\, \delta\,, \tag{17}$$

$$G(s') = \overline{F(\bar{s}')} = F(s'; -\alpha_j)\,. \tag{18}$$

Ist $\delta = 0$, *so kann man das O-Glied in* (16) *weglassen.*

Der Beweis verläuft analog wie in [3], Hilfssatz 2.

Lemma 3. *Für komplexe* s, $\operatorname{Re} s > 0$ *ist*

$$\Theta(s) = \frac{M}{\left(s - \dfrac{2\pi i h}{k}\right)^{r/2} k^r} \sum_{(m)} S_{h,k,(m)} \exp\left(- \frac{\pi^2 \bar{Q}\left(\dfrac{m_j}{M_j} - \alpha_j k\right)}{k^2 \left(s - \dfrac{2\pi i h}{k}\right)} \right), \tag{19}$$

[3]) Es ist zu bemerken, dass das Lemma 2 für eine beliebige positiv definite Form (1) und beliebige reelle Zahlen (14) gilt.

wo $\bar{Q}$ die zu Q konjugierte Form ist und wo

(20) $$S_{h,k,(m)} = S_{h,k,(m_j)} =$$
$$= \sum_{a_1,a_2,\dots,a_r=1}^{k} \exp\left(-\frac{2\pi i h}{k} Q(a_j M_j + b_j) + \frac{2\pi i}{k}\sum_{j=1}^{r} \frac{m_j}{M_j}(a_j M_j + b_j)\right)$$

(die sogenannte verallgemeinerte Gausssche Summe) ist. Weiter ist

(21) $$S_{h,k,(m)} \ll k^{r/2}$$

und

(22) $$|S_{h,k,(m)}|^2 = k^r \sum \exp\left(2\pi i \left(\frac{hk}{d^2} Q(f_j M_j) - \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{r} f_j m_j + \frac{2h}{d}\sum_{l,j=1}^{r} a_{lj} f_j M_j b_l\right)\right)$$

wo $d = (k, 2D\prod_{j=1}^{r} M_j^2)$ und wo über alle Systeme $f_1, f_2, \dots, f_r$ ganzer Zahlen, für die

(23) $$2\sum_{j=1}^{r} a_{lj} M_l M_j f_j \equiv 0 \pmod{d},$$

$1 \leqq f_l \leqq d$ (oder $0 \leqq f_l < d$), $l = 1, 2, \dots, r$, gilt, summiert wird.

Beweis. Siehe [9], Lemma 1 und 2.

Wir führen noch eine Bezeichnung an. Seien die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ rational und sei H der kleinste gemeinsame Nenner der Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \dots, \alpha_r M_r$. Für $k \equiv 0 \pmod{H}$ sei

(24) $$S_{h,k} = S_{h,k,(\alpha_j M_j k)} =$$
$$= \sum_{a_1,a_2,\dots,a_r=1}^{k} \exp\left(-\frac{2\pi i h}{k} Q(a_j M_j + b_j) + 2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j (a_j M_j + b_j)\right).$$

Ist $k \not\equiv 0 \pmod{H}$ (d. h. mindestens eine der Zahlen $\alpha_1 M_1 k, \alpha_2 M_2 k, \dots, \alpha_r M_r k$ nicht ganz), so sei $S_{h,k} = 0$. (Es ist zu bemerken, dass in [6] und [9] in diesem Fall die Zahlen $S_{h,k}$ auf eine andere Weise definiert worden sind.) Mit Hilfe dieser Bezeichnung kann man (für $\operatorname{Re} s > 0$)

$$F(s) = \Theta(s) - \frac{M S_{0,1}}{s^{r/2}}$$

schreiben. Man bemerke noch, dass für $k \equiv 0 \pmod{H}$

(25) $$\bar{S}_{h,k} = S_{-h,k,(-\alpha_j M_j k)}$$

ist. Diese Beziehung folgt sofort aus (24).

Die eben eingeführten Zahlen $S_{h,k}$ sind die zu unserer Aufgabe gehörenden verallgemeinerten Gaussschen Summen. Der singuläre Fall entsteht also, wenn alle Zahlen $S_{h,k}$ gleich Null sind ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ rationale Zahlen, $A(x) \not\equiv 0$).

Wir betrachten noch alle Brüche der Form h/k, wo $k \leqq \sqrt{x}$ ist (die sogenannten Fareybrüche). Ist h/k soein Bruch, seien h'/k' und h''/k'' die zu diesem Bruch benachbarten Fareybrüche, $h'/k' < h''/k''$, d. h. im Intervall $(h'/k', h''/k'')$ liegt ein einziger Fareybruch – nämlich h/k. Dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_{h,k}$ das Intervall

$$\left(2\pi \frac{h + h'}{k + k'}, 2\pi \frac{h + h''}{k + k''}\right].$$

Mit Hilfe bekannter Beziehungen (siehe z. B. [4], S. 249–250) kann man

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left(2\pi \frac{h}{k} - \frac{\vartheta_1}{k\sqrt{x}}, 2\pi \frac{h}{k} + \frac{\vartheta_2}{k\sqrt{x}}\right] \tag{26}$$

schreiben, wo $\pi \leqq \vartheta_1 \leqq 2\pi$, $\pi \leqq \vartheta_2 \leqq 2\pi$ ist. Man setze weiter

$$w = \frac{2\pi}{[\sqrt{x}] + 1}.$$

Es ist also $w \asymp x^{-1/2}$ und $\mathfrak{B}_{0,1} = (-w, w]$. Alle Intervalle $\mathfrak{B}_{h,k}$ sind punktfremd und offenbar gilt

$$\bigcup_{k;h>0} \mathfrak{B}_{h,k} = (w, +\infty), \quad \bigcup_{k;h<0} \mathfrak{B}_{h,k} = (-\infty, -w].$$

Setzt man in (16) $a = b = x^{-1}$, $s = x^{-1} + it$, $s' = x^{-1} + it'$, so ergibt sich (absolute Konvergenz des Integrals nach Lemma 1) für $\varrho \ll 1$, nach dem gerade angeführten,

$$4\pi^2 M_\varrho(x) = \sum \int_{\mathfrak{B}_{h,k}} \int_{\mathfrak{B}_{h',k'}} \frac{F(s)\, G(s')}{ss'(s + s')^\varrho} e^{x(s+s')} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t' + O(x^{\varrho - 1}), \tag{27}$$

wo über alle h, k, h', k', für die $k \leqq \sqrt{x}$, $k' \leqq \sqrt{x}$ ist, summiert wird (im Sinne unserer Verabredungen ist $(h, k) = 1$, $(h', k') = 1$). Aus diesem Ausdruck ist es ersichtlich, dass das Herleiten einiger Abschätzungen für die Funktionen $F(s)$ und $G(s')$ von Nutzen sein wird:

Lemma 4. *Sei* $s = x^{-1} + it$. *Seien* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *beliebige reelle Zahlen. Ist* $t \ll w$, *dann ist*

$$\frac{F(s)}{s} \ll x^{r/4 + 1/2}. \tag{28}$$

Ist

$$(29)\qquad \left|t - \frac{2\pi h}{k}\right| \ll \frac{1}{k\sqrt{x}}$$

(d. h. nach (26) speziell für $t \in \mathfrak{B}_{h,k}$) so ist

$$(30)\qquad F(s) \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}\left(1 + x\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|\right)^{r/2}}$$

und für $h \neq 0$

$$(31)\qquad s^{-r/2} \ll x^{r/4} \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}\left(1 + x\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|\right)^{r/2}}.$$

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ rationale Zahlen. Dann gilt für t mit (29)

$$(32)\qquad \Theta(s) - \frac{MS_{h,k}}{k^r\left(s - \frac{2\pi ih}{k}\right)^{r/2}} \ll x^{r/4}$$

und daher im singulären Fall

$$(33)\qquad F(s) = \Theta(s) \ll x^{r/4}.$$

Beziehungen, die zu den Beziehungen (28), (30)–(33) analog sind, gelten auch für die Funktion $G(s')$.

Beweis (vgl. [3], Hilfsatz 5 und 6): Ist $s = x^{-1} + it$, $t \ll w$, dann ist nach (19) und (21) für $h = 0$, $k = 1$

$$F(s) \ll \frac{x^{r/2}}{(1 + x^2t^2)^{r/4}} \sum \exp\left(\frac{-\pi^2 x\bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - \alpha_j\right)}{1 + x^2t^2}\right),$$

wo über alle $m_1, m_2, \ldots, m_r$ für die $\bar{Q}((m_j/M_j) - \alpha_j) \neq 0$ ist, summiert wird (also ist in der Summe $\bar{Q}((m_j/M_j) - \alpha_j) \geqq c$).

Da ($t \ll w \asymp x^{-1/2}$)

$$\frac{x}{1 + x^2t^2} > c,$$

ergibt sich sofort

$$F(s) \ll \frac{x^{r/2}}{(1 + x^2t^2)^{r/4}} \exp\left(-\frac{cx}{1 + x^2t^2}\right)$$

und daher ($\xi^c e^{-c\xi} \ll 1$ für $\xi \in [0, +\infty)$)

$$\frac{F(s)}{s} \ll x^{r/4+1/2} \left(\frac{x}{1+x^2t^2}\right)^{r/4+1/2} \exp\left(-\frac{cx}{1+x^2t^2}\right) \ll x^{r/4+1/2}$$

d. h. (28).

Ist $s = x^{-1} + it$, $|t - (2\pi h/k)| \ll 1/k\sqrt{x}$ und $\delta = 0$, dann ist $F(s) = \Theta(s)$ und nach (19) und (21)

$$\Theta(s) \ll \frac{x^{r/2}}{\left(1 + x^2\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|^2\right)^{r/4} k^{r/2}} \sum \exp\left(-\frac{\pi^2 x \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - \alpha_j k\right)}{k^2\left(1 + x^2\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|^2\right)}\right),$$

wo über alle $m_1, m_2, \ldots, m_r$ summiert wird. Da nach (29)

$$\frac{x}{k^2\left(1 + x^2\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|^2\right)} > c\,,$$

ergibt sich sofort (30). Die Beziehung (31) folgt aus (29).

Seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ rationale Zahlen, $s = x^{-1} + it$, $|t - (2\pi h/k)| \ll 1/k\sqrt{x}$. Dann ist nach dem Lemma 3 und der Definition der Zahlen $S_{h,k}$

$$\Theta(s) - \frac{MS_{h,k}}{k^r\left(s - \frac{2\pi i h}{k}\right)^{r/2}} \ll$$

$$\ll \frac{x^{r/2}}{\left(1 + x^2\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|^2\right)^{r/4} k^{r/2}} \sum \exp\left(-\frac{\pi^2 x \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - \alpha_j k\right)}{k^2\left(1 + x^2\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|^2\right)}\right),$$

wo über alle $m_1, m_2, \ldots, m_r$, für die $\bar{Q}((m_j/M_j) - \alpha_j k) \neq 0$ ist, summiert wird (also ist in der Summe $\bar{Q}((m_j/M_j) - \alpha_j k) \geqq c$). Ähnlich wie oben erhalten wir

$$\Theta(s) - \frac{MS_{h,k}}{k^r\left(s - \frac{2\pi i h}{k}\right)^{r/2}} \ll \tag{34}$$

$$\ll x^{r/4}\left(\frac{x}{\left(1 + x^2\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|^2\right)k^2}\right)^{r/4} \exp\left(-\frac{cx}{k^2\left(1 + x^2\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|^2\right)}\right).$$

Aus (34) und (31) ergibt sich (30) für $h \neq 0$. Die Beziehung (30) für $h = 0$ folgt unmittelbar aus (34).

Zieht man in Betracht, dass $\xi^c e^{-c\xi} \ll 1$ für $\xi \in [0, +\infty)$ ist, ergibt sich aus (34) auch (32) und daher (33). Der Rest vom Lemma ist klar.

Wir bemerken noch, dass für $s = x^{-1} + it$, $s' = x^{-1} + it'$

$$\frac{1}{s + s'} \ll \frac{x}{1 + x|t + t'|} \tag{35}$$

$$e^{u(s+s')} \ll 1 \quad (\text{für } 0 \leqq u \leqq x) \tag{36}$$

ist, und dass aus (29) (d. h. nach (26) speziell für $t \in \mathfrak{B}_{h,k}$), $h \neq 0$

$$|s| \asymp |t| \asymp \frac{|h|}{k} \tag{37}$$

folgt.

Wenn kein Missverständnis zu befürchten ist, schreiben wir oft zur Abkürzung

$$\beta = 2\pi\, h/k\,, \quad \beta' = 2\pi\, h'/k'\,, \quad \mathfrak{B} = +\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{h,k}\,, \quad -\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{-h,k}\,,$$
$$\mathfrak{B}' = +\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_{h',k'}\,, \quad -\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_{-h',k'}\,.$$

3. BEWEIS DES HAUPTSATZES 1

In diesem ganzen Paragraph sei immer $r \geqq 3$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ seien rationalen Zahlen; die Funktion $g(x)$ sei für $r \geqq 4$ wie im § 1 definiert; für $r = 3$ setzen wir $g(x) = x^3$. Sei $\varrho = 1$ für $r > 3$, $\varrho = 2$ für $r = 3$. Den Beweis des Hauptsatzes zerlegen wir in mehrere Teile.

Sei immer $s = x^{-1} + it$, $s' = x^{-1} + it'$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$ den Bereich $\min(|t|, |t'|) \leqq w$. Für

$$k \leqq \sqrt{x}\,, \quad h > 0 \tag{38}$$

und

$$k' \leqq \sqrt{x}\,, \quad h' > 0\,, \quad h'k \neq hk' \tag{39}$$

sei

$$M(h, k, h', k') = \int_{\mathfrak{B}}\int_{\mathfrak{B}'} \ldots dt'\, dt + \int_{\mathfrak{B}}\int_{-\mathfrak{B}'} \ldots dt'\, dt + \int_{-\mathfrak{B}}\int_{\mathfrak{B}'} \ldots dt'\, dt + \int_{-\mathfrak{B}}\int_{-\mathfrak{B}'} \ldots dt'\, dt \tag{40}$$

$$N(h, k) = N(h, k; \alpha_j) = \int_{\mathfrak{B}}\int_{-\mathfrak{B}} \ldots dt'\, dt\,, \quad P(h, k) = P(h, k; \alpha_j) = \int_{\mathfrak{B}}\int_{\mathfrak{B}} \ldots dt'\, dt \tag{41}$$

(42)
$$S_1 = \int_{\mathfrak{A}}\int \ldots \, dt' \, dt$$

(der Integrand überall wie im (27)) und

(43)
$$S_2 = \sum M(h, k, h', k')$$

(44)
$$S_3(\alpha_j) = \sum P(h, k; \alpha_j), \quad S_4(\alpha_j) = \sum N(h, k; \alpha_j)$$

(in (43) summiert man über alle h, k, h', k' mit (38) und (39) und in (44) über h, k, die (38) erfüllen).

Bezeichnet man

(45)
$$H(t, t'; \alpha_j) = \frac{F(s)\, G(s')}{ss'(s + s')^{\varrho}}\, e^{x(s+s')}$$

so ist offenbar

(46)
$$H(-t, -t'; \alpha_j) = \overline{H(t, t'; -\alpha_j)}, \quad H(t, t'; \alpha_j) = H(t', t, -\alpha_j).$$

Daraus, aus (27) und (40)–(44) ergibt sich

(47)
$$4\pi^2 M_{\varrho}(x) = S_1 + S_2 + S_3(\alpha_j) + \overline{S_3(-\alpha_j)} + S_4(\alpha_j) + S_4(-\alpha_j) + O(x^{\varrho-1}).$$

Nun untersuchen wir die einzelnen Glieder in (47).

Lemma 5.

(48)
$$S_1 + S_3(\alpha_j) + \overline{S_3(-\alpha_j)} = O(g(x)).$$

Beweis. Zur Abschätzung von S_1 genügt es nach (42) und (46) die Integrale

$$I_1 = \int_{-2w}^{2w}\int_{-2w}^{2w} \ldots \, dt' \, dt, \quad I_2 = \int_{-w}^{w}\int_{2w}^{\infty} \ldots \, dt' \, dt$$

mit den Integranden $|H(t, t'; \alpha_j)|$ abzuschätzen. Nach dem Lemma 4 (die Beziehungen (28)) und nach (35)–(36) ist

$$I_1 \ll x^{(r/2)+\varrho} \int_0^{2w} \left(\int_0^t \frac{x\, dt'}{(1 + x(t - t'))^{\varrho}} \right) dt$$

d. h., wie es leicht zu berechnen ist, $I_1 = O(g(x))$. Im Integrationsbereich von I_2 ist $t' \geqq 2|t|$ und also wieder nach (28), (35)–(37) und (30) ist

$$I_2 \ll \int_0^w x^{r/4+1/2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r/2-1}}{k^{r/2}} \left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, dt'}{(1 + x|t' - \beta|)^{r/2}}\, dt \ll$$

$$\ll x^{3r/4-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{k^{\varrho+1-r/2}}{h^{\varrho+1}} \ll g(x).$$

Es ist also

$$S_1 = O(g(x))\,. \tag{49}$$

Zur Abschätzung der übrigen Ausdrücke bedenken wir, dass in $P(h, k)$ $|s + s'| \gg$ $\gg h/k$ ist und also nach (30), (36), (37) ist

$$S_3(\alpha_j) + \overline{S_3(-\alpha_j)} \ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+2} \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} \frac{x^{r-2} x \, dt \, x \, dt'}{k^r (1 + x|t - \beta|)^{r/2} (1 + x|t' - \beta|)^{r/2}} \ll$$

$$\ll x^{r-2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{k^{\varrho+2-r}}{h^{\varrho+2}} \ll g(x)\,.$$

Die letzte Abschätzung zusammen mit (49) gibt den Beweis der Behauptung vom Lemma.

Lemma 6.

$$S_2 = O(g(x))\,. \tag{50}$$

Beweis. Aus (43) und (40) folgt nach (30), (35), (36) und (37), dass es genügt, die Abschätzung

$$\sum \frac{kk'}{hh'} \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}'} \frac{x^r \, dt' \, dt}{k'^{r/2} k^{r/2} (1 + x|t' - \beta'|)^{r/2} (1 + x|t - \beta|)^{r/2} \left(\frac{1}{x} + |t - t'|\right)^{\varrho}} \ll g(x)$$

(das Summationsgebiet ist (38) und (39)) zu beweisen. Die Abschätzung dieser Summe ist verhältnismässig kompliziert und ist in [3] (Hilfssatz 9, S. 162–8) ausgeführt.

Lemma 7.

$$S_4(\alpha_j) = \frac{M^2 x^{r+\varrho-2}}{(r + \varrho - 2) \ldots (r - 1)\, \Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2} h^2} + O(g(x))\,. \tag{51}$$

Beweis. Es seien h und k mit (38) gewählt und es sei

$$\left\{\begin{aligned} f_1(s) &= \frac{F(s)}{s} - \frac{M S_{h,k}}{s k^r (s - i\beta)^{r/2}}\,, & g_1(s) &= \frac{G(s)}{s} - \frac{M \bar{S}_{h,k}}{s k^r (s + i\beta)^{r/2}}\,, \\ f_2(s) &= \frac{M S_{h,k}}{k^r (s - i\beta)^{r/2}} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{i\beta}\right), & g_2(s) &= \frac{M \bar{S}_{h,k}}{k^r (s + i\beta)^{r/2}} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{i\beta}\right), \\ f_3(s) &= \frac{1}{i\beta} \frac{M S_{h,k}}{k^r (s - i\beta)^{r/2}}\,, & g_3(s) &= -\frac{1}{i\beta} \frac{M \bar{S}_{h,k}}{k^r (s + i\beta)^{r/2}}\,. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Es ist also

$$(53) \qquad \frac{F(s)}{s} = f_1(s) + f_2(s) + f_3(s), \qquad \frac{G(s)}{s} = g_1(s) + g_2(s) + g_3(s).$$

Nach (37) und (26) bekommen wir aus (21), (30)–(32)

$$(54) \qquad \begin{cases} f_1(s) \ll x^{r/4}\dfrac{k}{h}, \quad f_2(s) \ll \dfrac{k^2}{h^2}\dfrac{x^{r/2-1}}{k^{r/2}(1+x|t-\beta|)^{r/2-1}}, \\[2ex] f_3(s) \ll \dfrac{k}{h}\dfrac{x^{r/2}}{k^{r/2}(1+x|t-\beta|)^{r/2}} \end{cases}$$

(für $t \in \mathfrak{B}$) und (siehe (25))

$$(55) \qquad \begin{cases} g_1(s) \ll x^{r/4}\dfrac{k}{h}, \quad g_2(s) \ll \dfrac{k^2}{h^2}\dfrac{x^{r/2-1}}{k^{r/2}(1+x|t+\beta|)^{r/2-1}}, \\[2ex] g_3(s) \ll \dfrac{k}{h}\dfrac{x^{r/2}}{k^{r/2}(1+x|t+\beta|)^{r/2}} \end{cases}$$

(für $t \in -\mathfrak{B}$) und also nach (31) ist auch

$$(56) \qquad |f_1(s)| + |f_2(s)| + |f_3(s)| \ll \frac{k}{h}\frac{x^{r/2}}{(1+x|t-\beta|)^{r/2}}$$

(für $t \in \mathfrak{B}$) und

$$(57) \qquad |g_1(s)| + |g_2(s)| + |g_3(s)| \ll \frac{k}{h}\frac{x^{r/2}}{(1+x|t+\beta|)^{r/2}}$$

(für $t \in -\mathfrak{B}$).

Man setze

$$V(h,k) = \int_{\mathfrak{B}}\int_{-\mathfrak{B}} f_3(s)\, g_3(s')\, \frac{e^{x(s+s')}}{(s+s')^{\varrho}}\, dt\, dt',$$

$$W(h,k) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_3(s)\, g_3(s')\, \frac{e^{x(s+s')}}{(s+s')^{\varrho}}\, dt\, dt'.$$

Zuerst bekommt man (statt t' wird $-t'$ und also statt $-\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}$ geschrieben) nach

(52)–(57), (35), (36) und (26)

$$N(h,k) - V(h,k) \ll \int_{\mathfrak{B}}\int_{\mathfrak{B}} \frac{k^2}{h^2}\frac{x^{r/2+\varrho}}{k^{r/2}(1+x|t-\beta|)^{r/2}(1+x|t-t'|)^{\varrho}} \cdot$$

$$\cdot\left(x^{r/4} + \frac{k}{h}\frac{x^{r/2-1}}{k^{r/2}(1+x|t'-\beta|)^{r/2-1}}\right) \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t' \ll$$

$$\ll \frac{x^{r/2+\varrho-2}}{h^2 k^{r/2-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^{r/4}\int_0^{c/k\sqrt{x}} \frac{x\,\mathrm{d}v}{(1+x|v|)^{\varrho}} + \frac{x^{r/2-1}}{k^{r/2-1}}\int_0^{c/k\sqrt{x}} \frac{x\,\mathrm{d}v}{(1+x|v|)^{r/2-1}}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{x\,\mathrm{d}t}{(1+x|t-\beta|)^{r/2}} .$$

Daher ergibt sich für $r = 3$ (d. h. $\varrho = 2$)

$$N(h,k) - V(h,k) \ll \frac{x^{3/2}k^{1/2}}{h^2}\left(x^{3/4} + \frac{x^{1/2}}{k^{1/2}}\frac{x^{1/4}}{k^{1/2}}\right) \ll \frac{x^{9/4}k^{1/2}}{h^2} \tag{58}$$

und für $r < 3$ (d. h. $\varrho = 1$)

$$N(h,k) - V(h,k) \ll \frac{x^{r/2-1}}{h^2 k^{r/2-2}}\left(x^{r/4}\lg x + \frac{x^{r/2-1}}{k^{r/2-1}}\lg^{\varepsilon} x\right), \tag{59}$$

wo $\varepsilon = 1$ für $r = 4$, $\varepsilon = 0$ für $r > 4$.

Nun ist es notwendig die Differenz $V(h,k) - W(h,k)$ abzuschätzen. Sei $\mathfrak{N}$ Menge aller reeller Zahlen, die nicht in $\mathfrak{B}$ liegen. Nach (52), (21), (35) und (36) und (37) ist

$$V(h,k) - W(h,k) \ll \frac{x^{r+\varrho-2}}{h^2 k^{r-2}}(I_1 + I_2), \tag{60}$$

wo

$$I_1 = \int_{\mathfrak{B}}\left(\int_{\mathfrak{N}} \frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1+x|t-\beta|)^{r/2}(1+x|t'-\beta|)^{r/2}(1+x|t-t'|)^{\varrho}}\right) x\,\mathrm{d}t,$$

$$I_2 = \int_{\mathfrak{N}}\left(\int_{\mathfrak{N}} \frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1+x|t-\beta|)^{r/2}(1+x|t'-\beta|)^{r/2}(1+x|t-t'|)^{\varrho}}\right) x\,\mathrm{d}t.$$

Nach (26) ist $|t-\beta| \leqq 2\pi/k\sqrt{x}$ für $t \in \mathfrak{B}$, $|t-\beta| \geqq \pi/k\sqrt{x}$ für $t \in \mathfrak{N}$. Wenn man in I_1 und I_2 statt $1 + x|t-t'|$ die Zahl 1 schreibt, ergibt sich

$$I_1 \ll \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r/2-1}, \quad I_2 \ll \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r-2}.$$

Für $r = 5$ kann man die Abschätzung für I_1 noch verbessern: für $t \in \mathfrak{B}$, $t' \in \mathfrak{N}$ gilt nach (26) $|t'-\beta| > \pi/k\sqrt{x}$; es ist also entweder $|t-\beta| > \pi/2k\sqrt{x}$ oder $|t-t'| >$

$> \pi/2k\sqrt{x}$. Es wird also jedenfalls $(1 + x|t - \beta|)(1 + x|t - t'|) \geqq \pi\sqrt{x}/2k$ sein und also

$$I_1 \ll \frac{k}{\sqrt{x}}\int_{\mathfrak{B}}\left(\int_{\mathfrak{N}}\frac{x\,dt'}{(1 + x|t - \beta|)^{3/2}(1 + x|t' - \beta|)^{5/2}}\right)x\,dt \ll \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{5/2}.$$

Setzt man die erworbenen Abschätzungen für I_1 und I_2 in (60), ergibt sich endlich

$$V(h, k) - W(h, k) \ll \frac{x^{3r/4 + \varrho - 3/2 - \eta/2}}{h^2 k^{r/2 - 1 - \eta}}, \tag{61}$$

wo $\eta = 1$ für $r = 5$, $\eta = 0$ für $r \neq 5$. Wir berechnen nun $W(h, k)$. Nach (52) ist

$$W(h, k) = \frac{M^2|S_{h,k}|^2}{4\pi^2 h^2 k^{2r-2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x(s+s')}\,dt\,dt'}{(s - i\beta)^{r/2}(s' + i\beta)^{r/2}(s + s')^{\varrho}}$$

d. h. nach dem Lemma 1

$$W(h, k) = -\frac{M^2|S_{h,k}|^2}{4\pi^2 h^2 k^{2r-2}}\int_{(2)}\int_{(2)}\frac{e^{x(s+s')}}{s^{r/2}s'^{r/2}(s + s')^{\varrho}}\,ds\,ds'. \tag{62}$$

Mit Benützung von demselben Lemma und der bekannten Beziehung $(u > 0)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{e^{us}}{s^{r/2}}\,ds = \frac{u^{r/2-1}}{\Gamma(r/2)}$$

bekommen wir

$$\int_{(2)}\int_{(2)}\frac{e^{x(s+s')}}{s^{r/2}s'^{r/2}(s + s')}\,ds\,ds' = \int_{(2)}\int_{(2)}\frac{ds\,ds'}{(s + s')\,s^{r/2}s'^{r/2}} +$$

$$+ \int_0^x\left(\int_{(2)}\int_{(2)}\frac{e^{u(s+s')}}{s^{r/2}s'^{r/2}}\,ds\,ds'\right)du = -\frac{4\pi^2}{\Gamma^2(r/2)}\int_0^x u^{r-2}\,du + C =$$

$$= -\frac{4\pi^2 x^{r-1}}{\Gamma^2(r/2)(r - 1)} + C$$

und ähnlich

$$\int_{(2)}\int_{(2)}\frac{e^{x(s+s')}}{(s + s')^{\varrho}\,s^{r/2}s'^{r/2}}\,ds\,ds' = -\frac{4\pi^2 x^{r+\varrho-2}}{\Gamma^2(r/2)(r + \varrho - 2)\ldots(r - 1)} + O(x^{\varrho-1}).$$

Wenn wir diese Beziehungen benützen, bekommen wir aus (62) mit Hilfe von (21) für $r = 3$ (d. h. $\varrho = 2$)

$$W(h, k) - \frac{M^2|S_{h,k}|^2\,x^3}{6\Gamma^2(3/2)\,h^2k^4} \ll \frac{x}{h^2k} \tag{63}$$

und

$$W(h, k) - \frac{M^2|S_{h,k}|^2 x^{r-1}}{(r-1)\Gamma^2(r/2)h^2k^{2r-2}} \ll \frac{1}{h^2k^{r-2}}$$

für $r > 3$.

Daraus, aus (61), (59) und (44) bekommt man mittels Summation über die h, k mit (38) die Behauptung vom Lemma für $r > 3$:

$$S_4(\alpha_j) - \frac{M^2x^{r-1}}{(r-1)\Gamma^2(r/2)} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2}h^2} \ll$$

$$\ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{1}{k^{r-2}} + \frac{x^{3r/4-(\eta+1)/2}}{k^{r/2-1-\eta}} + \frac{x^{3r/4-1} \lg x}{k^{r/2-2}} + \frac{x^{r-2} \lg^{\varepsilon} x}{k^{r-3}} \right) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \ll$$

$$\ll \begin{cases} x^{5/2} \lg x + x^{5/2} \lg x + x^2 \lg^2 x & \text{für} \quad r = 4 \\ x^{11/4}x^{1/4} + x^{11/4}x^{1/4} \lg x + x^3 & \text{für} \quad r = 5 \\ x^{3r/4-1/2} + x^{r-2} & \text{für} \quad r > 5 \end{cases}$$

d. h. (51). Ähnlich bekommt man aus (63), (61), (58) und (44) für $r = 3$

$$S_4(\alpha_j) - \frac{M^2x^3}{6\Gamma^2(3/2)} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^4h^2} \ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{k} + \frac{x^{11/4}}{k^{1/2}} + x^{9/4}k^{1/2} \right) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \ll x^3$$

d. h. wieder (51).

Lemma 8. *Sei* $r = 3$,

$$T(x) = T(x; \alpha_j) = \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{k-1} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^4h^2}.$$

Dann gibt es eine nichtnegative, nur von $Q, M_1, M_2, \ldots, M_r, b_1, b_2, \ldots, b_r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_r$ *abhängende Konstante* K_3 *so, dass*

$$(64) \qquad S(x) = T(x; \alpha_j) + T(x; -\alpha_j) = \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{\substack{|h|<k \\ h \neq 0}} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^4h^2} = K_3 \lg x + O(1).$$

Beweis. Sei $A = 2D \prod_{j=1}^{r} M_j^2$, $B = (A, H)$. Nach der Definition der Zahlen $S_{h,k}$ genügt es in der betrachteten Summe über alle natürliche $k \leqq \sqrt{x}$, $k \equiv 0 \pmod{H}$ zu summieren. Soeine Zahl k hat also die Form nHd, wo $n \leqq \sqrt{x}/Hd$, d Teiler der Zahl A/B und $(n, A/Bd) = 1$ ist. Wenn wir nun für $|S_{h,k}|^2$ den Ausdruck (22) vom Lemma 3 benutzen, bekommen wir durch eine einfache Vertauschung der Summationsfolge

$$(65) \quad T(x) = \frac{1}{H} \sum_d \frac{1}{d} \sum_{f_1,f_2,f_3} \sum_h \frac{\gamma_h}{h^2} \sum_n \frac{1}{n} \exp\left(2\pi i \left(\frac{hnH}{dB^2} Q(f_jM_j) - \frac{nH}{B} \sum_{j=1}^{3} f_j\alpha_jM_j\right)\right),$$

wobei

$$\gamma_h = \gamma_h(d, f_1, f_2, f_3) = \exp\left(\frac{4\pi i h}{dB} \sum_{l,j=1}^{3} a_{lj} f_j M_j b_l\right)$$

und wo folgendermassen summiert wird: zuerst über alle Teiler d der Zahl A/B, weiter über alle Tripel f_1, f_2, f_3 natürlicher Zahlen, für die

$$2\sum_{j=1}^{3} a_{lj} M_l M_j f_j \equiv 0 \pmod{dB}, \quad 1 \leqq f_l \leqq dB$$

$(l = 1, 2, 3)$ gilt, dann über alle natürliche $h \leqq \sqrt{x}$, für die $(h, Hd) = 1$ ist und endlich über alle n, die die Beziehungen

$$h < nHd \leqq \sqrt{x}, \quad \left(n, \frac{hA}{dB}\right) = 1$$

erfüllen.

Wir wählen nun irgendwelche Zahlen d, f_1, f_2, f_3, die in (65) auftreten, und setzen

$$a_m = a_m(h) = a_m(h, d, f_1, f_2, f_3) = \exp\left(2\pi i\left(\frac{hmH}{dB^2} Q(f_j M_j) - \frac{mH}{B} \sum_{j=1} f_j \alpha_j M_j\right)\right)$$

für $m \geqq 0$, $(m, hA/dB) = 1$,

$$a_m = 0$$

für $m \geqq 0$, $(m, hA/dB) > 1$. Weiter bezeichnen wir mit $R(d, f_1, f_2, f_3)$ die innere Doppelsumme in (65). Offenbar kann man

$$R(d, f_1, f_2, f_3) = \sum_{h=1}^{\sqrt{x}}{}' \frac{\gamma_h}{h^2} \sum_{h/Hd \leqq m \leqq \sqrt{x}/Hd} \frac{a_m}{m} \tag{66}$$

schreiben, wo $\sum'$ bedeutet, dass über die h summiert wird, für die $(h, Hd) = 1$ ist. Aus der Definitionen der Zahlen a_m folgt nun, dass $a_m = a_m + hA$ ist. Setzen wir also

$$U_m = U_m(h) = \sum_{l=1}^{m} a_l,$$

dann ist

$$U_m(h) = \frac{m}{hA} U_{hA}(h) + O(h).$$

Setzt man weiter $U_{hA} = \beta_h$ und nimmt in Betracht, dass $U_m(h) \ll m$, $\beta_h \ll h$ und

$$\sum_{h > \sqrt{x}} \frac{\beta_h \gamma_h}{h^3} \ll x^{-1/2}$$

ist, kann man nach (66) folgendes schreiben ($\mu_0 = [h/Hd]$ für $Hd > 1$, $\mu_0 = h - 1$ für $Hd = 1$, $\mu_1 = [\sqrt{x}/Hd]$):

$$R(d, f_1, f_2, f_3) = \sum_{h=1}^{\sqrt{x}}{}' \frac{\gamma_h}{h^2} \sum_{m=\mu_0+1}^{\mu_1} \frac{U_m(h) - U_{m-1}(h)}{m} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\sqrt{x}}{}' \frac{\gamma_h}{h^2} \left(\sum_{m=\mu_0+1}^{\mu_1} U_m(h) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{O(1)}{m^3} \right) - \frac{U_{\mu_0}(h)}{\mu_0 + 1} + \frac{U_{\mu_1}(h)}{\mu_1 + 1} \right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{\sqrt{x}}{}' \left(\frac{\gamma_h \beta_h}{A h^3} \sum_{m=\mu_0+1}^{\mu_1} \frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{h} \sum_{m=\mu_0+1}^{\mu_1} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{h^2} \right) \right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{\sqrt{x}}{}' \frac{\gamma_h \beta_h}{A h^3} \lg \frac{\sqrt{x}}{h} + O(1) = \frac{\lg x}{2A} \sum_{h=1}^{\infty}{}' \frac{\gamma_h \beta_h}{h^3} + O(1) .$$

Durch einsetzen in (65) bekommen wir

$$T(x) = \frac{\lg x}{2A} \sum_{d} \sum_{f_1, f_2, f_3} \sum_{h=1}^{\infty}{}' \frac{\gamma_h \beta_h}{h^3} + O(1)$$

und also auch (64), w.z.b.w.

Beweis des Hauptsatzes 1. Es sei zuerst $r > 3$. Nach (47), den Lemmas 5–7 und (25) ist

$$M(x) = M_1(x) = \frac{M^2 x^{r-1}}{4\pi^2 (r-1) \Gamma^2(r/2)} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{h \neq 0} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2} h^2} + O(g(x)) .$$

Da nach (21)

$$x^{r-1} \sum_{k > \sqrt{x}} \sum_{h \neq 0} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2} h^2} \ll x^{r-1} \sum_{k > \sqrt{x}} \frac{1}{k^{r-2}} \ll x^{r/2+1/2} \ll g(x)$$

ist, kann man

$$M(x) = \frac{M^2 x^{r-1}}{4\pi^2 (r-1) \Gamma^2(r/2)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h \neq 0} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2} h^2} + O(g(x)) \tag{67}$$

schreiben.

Sei $r = 3$. Wieder nach (47), (25) und den Lemmas 5–7 ist

$$M_2(x) = \frac{M^2 x^3}{24\pi^2 \Gamma^2(3/2)} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{h \neq 0} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^4 h^2} + O(x^3) .$$

Nachdem nach (21)

$$x^3 \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{h \geq k} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^4 h^2} \ll x^3 \sum_{k \geq \sqrt{x}} \frac{1}{k^2} \ll x^3 ,$$

kann man (siehe (64))

$$M_2(x) = \frac{M^2 x^3}{24\pi^2 \Gamma^2(3/2)} S(x) + O(x^3) \tag{68}$$

schreiben. Nun ist offensichtlich nach (21)

$$S(x) \ll \lg x \tag{69}$$

und

$$S(x) - S(x/2) \ll \sum_{\sqrt{x/2} < k \leqq \sqrt{x}}' \frac{1}{k} \ll 1\,. \tag{70}$$

Man setze $\lambda = \lg^{-1/2} x$. Die Funktionen $M(x)$ und $S(x)$ sind nichtnegativ und nichtfallend, also gilt (siehe (68)–(70))

$$\begin{aligned} \lambda x M(x) &\geqq \int_{x(1-\lambda)}^{x} M_1(y)\,\mathrm{d}y = M_2(x) - M_2(x(1-\lambda)) = \\ &= N(x^3\, S(x) - x^3(1-\lambda)^3\, S(x(1-\lambda))) + O(x^3) = \\ &= Nx^3(S(x) - (1-\lambda)^3\,(S(x) + O(1))) + O(x^3) = \\ &= 3\lambda N x^3\, S(x) + O(x^3\lambda^2\, S(x)) + O(x^3) = 3\lambda N x^3\, S(x) + O(x^3) \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\lambda x\, M(x) \leqq \int_{x}^{x(1+\lambda)} M_1(y)\,\mathrm{d}y = 3\lambda N x^3\, S(x) + O(x^3)\,,$$

wo

$$N = \frac{M^2}{24\pi^2 \Gamma^2(3/2)}\,.$$

Aus diesen beiden Beziehungen bekommen wir

$$M(x) = 3Nx^2\, S(x) + O(x^2 \lg^{1/2} x) \tag{71}$$

und so nach dem Lemma 8 auch

$$M(x) = \frac{M^2 K_3}{8\pi^2 \Gamma^2(3/2)} x^2 \lg x + O(x^2 \lg^{1/2} x)\,. \tag{72}$$

Aus (67) folgt durch Vergleich mit (11), d. h. für $r > 3$, dass die Konstante K genau dann positiv ist, wenn wenigstens eine der Zahlen $S_{h,k}$ von Null verschieden ist. Eine ähnliche Behauptung für $r = 3$ ist aus dem expliziten Ausdrucke von (72) und (64) nicht ersichtlich. Wir schreiten darum folgenderweise fort: es gilt (12) und (71). Sei $S_{h,k} \neq 0$ für ein bestimmtes Zahlenpaar h, k. Da die Zahlen $S_{h,k}$ bei gegebenem k nur von der Restklasse von h mod k abhängen, kann man $0 < h \leqq k$ voraussetzen. Wenn man $A = (2D \prod_{j=1}^{3} M_j^2)^2 Hh$ setzt, bekommt man aus der Beziehung (22) vom Lemma 3

$$k^{-3}|S_{h,k}|^2 = |S_{h,k+nA}|^2 (k + nA)^{-3}$$

für alle n. Es ist also

$$S(x) \geqq \frac{|S_{h,k}|^2}{h^2 k^3} \sum_{1 \leqq n \leqq \sqrt{(x)} - k/A} \frac{1}{k + An}$$

d. h.

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{S(x)}{\lg x} > 0$$

und daher folgt sofort, dass die Konstante K in (12) bei den angeführten Voraussetzungen positiv ist.

Damit ist der Hauptsatz 1 vollkommen bewiesen.

Bemerkung. Den Hauptsatz 1 kann man verhältnismässig einfach für $r > 8$ aus der Verallgemeinerung des sogenannten ersten Peterssonschen Satzes ([6], Satz 1) herleiten. Eine schwierige Abschätzung der gleichen Summe wie im Lemma 6 ist aber nicht zu vermeiden. Für kleine Werte von r $(4 < r \leqq 8)$ bekommen wir zwar eine zu (11) analoge Beziehung, aber mit einem schwächeren Restglied $(O(x^{3r/4} \lg x))$; für $r \leqq 4$ ist dieses Verfahren nicht mit Erfolg benützbar.

4. BEWEIS DES HAUPTSATZES 2

Lemma 9. *Im singulären Fall gilt*

$$M_\varrho(x) \ll x^{r/2+\varrho-1/2} . \tag{73}$$

Beweis. Es liege der singuläre Fall vor und es sei $\varrho > 1$. Man kann also die Beziehungen (16) (ohne $O(x^{\varrho-1})$) (27) und (33) anwenden. Den Beweis der Beziehung (73) könnte man analog wir den Beweis des Hauptsatzes im vorgehenden Paragraph durchführen. Die Abschätzung des zu S_2 analogen Ausdruckes wäre aber nicht weniger kompliziert als in der zitierten Arbeit [3]. Durch einen einfachen Kunstgriff (analog wie in [2]) kann man aber eine wesentliche Vereinfachung erreichen. Den Beweis zerteilen wir in drei Teile. Man bemerke, dass

$$F(s) = \Theta(s) , \quad G(s') = \overline{\Theta(\bar{s}')} \tag{74}$$

ist.

1) Mit Rücksicht auf (16), (74) und (36) kann man (stets setzen wir $s = x^{-1} + it$,

$s' = x^{-1} + it'$ d. h. $a = b = x^{-1}$ in (16))

$$M_\varrho(x) \ll \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(s)\,G(s')}{ss'(s+s')^\varrho} \right| \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t' \tag{75}$$

schreiben. Nach den Beziehungen (46) und (47) ist

$$M_\varrho(x) \ll T_1 + T_2 + T_3 \tag{76}$$

wo

$$T_1 = \int_{-2w}^{2w} \int_{-2w}^{2w} \dots \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t', \tag{77}$$

$$T_2 = \int_{-w}^{w} \int_{2w}^{\infty} \dots \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t' + \int_{-w}^{w} \int_{-\infty}^{-2w} \dots \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t' \tag{78}$$

$$T_3 = \int_{w}^{\infty} \int_{w}^{\infty} \dots \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t' + \int_{w}^{\infty} \int_{-\infty}^{-w} \dots \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t' \tag{79}$$

(der Integrand überall wie in (75)).

2) Nach (77) und (28) ergibt sich

$$T_1 \ll x^{r/2+\varrho} \int_0^{2w} \left(\int_0^t \frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x(t-t'))^\varrho} \right) \mathrm{d}t \ll x^{r/2+\varrho-1/2}. \tag{80}$$

Wenn $|t'| \leqq w$, $|t| \geqq 2w$, $t \in \mathfrak{B}_{\pm h,k}$, $h > 0$ ist, ist nach (26) und (37) $|s| \gg h/k$, $|s + s'| \gg h/k$ und also nach (28), (33) und (26) bekommen wir ($t = (2\pi h/k) + u$)

$$T_2 \ll x^{r/4+1/2} \int_0^w \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} x^{r/4} \left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1} \int_0^{c/k\sqrt{x}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}t' \ll \tag{81}$$

$$\ll x^{r/2-1/2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^\varrho \ll x^{r/2+\varrho/2} \ll x^{r/2+\varrho-1/2}.$$

3) Da für nichtnegative Zahlen a und b $ab \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ gilt, gilt offensichtlich ($|s| > |t|$, $|s'| > |t'|$)

$$T_3 \ll \int_w^\infty \int_w^\infty \frac{|F(s)|^2 + |G(s)|^2}{tt'\left(\dfrac{1}{x} + |t-t'|\right)^\varrho} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'. \tag{82}$$

Es sei $t \geqq w$ und man setze

$$T = \int_w^\infty \frac{\mathrm{d}t'}{t'\left(\dfrac{1}{x} + |t-t'|\right)^\varrho}. \tag{83}$$

Nachdem $(xt \geqq xw \gg \sqrt{x})$

$$(84)\qquad \int_{t-1/x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t'}{t'\left(\frac{1}{x} + |t - t'|\right)^{\varrho}} \ll \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\left(\frac{1}{x} + |u|\right)^{\varrho}} \ll \frac{x^{\varrho - 1}}{t}$$

gilt, bleibt zur Abschätzung des Ausdruckes (83) für $t - x^{-1} > w$ das folgende Integral übrig:

$$\int_{w}^{t-1/x} \frac{\mathrm{d}t'}{t'\left(\frac{1}{x} + t - t'\right)^{\varrho}}.$$

Nachdem

$$(85)\qquad \int_{w}^{t-1/x} \frac{\mathrm{d}t'}{t'\left(\frac{1}{x} + t - t'\right)^{\varrho}} \leq x^{\varrho-2}\int_{w}^{t-1/x} \frac{\mathrm{d}t'}{t'(t-t')^2} =$$

$$= x^{\varrho-2}\int_{w}^{t-1/x}\left(\frac{1}{t^2 t'} + \frac{1}{t^2(t-t')} + \frac{1}{t(t-t')^2}\right)\mathrm{d}t' =$$

$$= \frac{x^{\varrho-2}}{t^2}\lg\frac{\left(t - \frac{1}{x}\right)(t-w)}{wx^{-1}} + \frac{x^{\varrho-2}}{t}\left(x - \frac{1}{t-w}\right),$$

bekommt man mit Rücksicht auf die Beziehungen $(t > w + x^{-1})$

$$\lg\left(t - \frac{1}{x}\right) \ll \lg xt\,, \quad \lg(t - w) \ll \lg xt\,, \quad \lg w \ll \lg xt$$

und $\lg x \ll \lg xt$ sofort aus (85)

$$(86)\qquad \int_{w}^{t-1/x} \frac{\mathrm{d}t'}{t'\left(\frac{1}{x} + t - t'\right)^{\varrho}} \ll \frac{x^{\varrho-1}}{t}\,\frac{\lg xt}{xt} + \frac{x^{\varrho-1}}{t} \ll \frac{x^{\varrho-1}}{t}.$$

Aus (83), (84) und (86) folgt

$$T \ll \frac{x^{\varrho-1}}{t}.$$

Durch Einsetzung in (82) ergibt sich mit Benützung von (33) und (37)

$$(87)\qquad T_3 \ll x^{\varrho-1}\int_{w}^{\infty} \frac{|F(s)|^2 + |G(s)|^2}{t^2}\,\mathrm{d}t \ll x^{r/2+\varrho-1}\sum_{k \leqq \sqrt{x}}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{k^2}{h^2}\int_{0}^{c/k\sqrt{x}}\mathrm{d}u \ll$$

$$\ll x^{r/2+\varrho-3/2}\sum_{k \leqq \sqrt{x}} k \ll x^{r/2+\varrho-1/2}\,.$$

Aus den Beziehungen (76), (80), (81) und (87) bekommt man für $\varrho > 1$

$$M_\varrho(x) \ll x^{r/2+\varrho-1/2}\,.$$

Nun ist aber nach dem eben bewiesenen:

$$x\,M(x) \leqq \int_x^{2x} M_1(y)\,\mathrm{d}y = M_2(2x) - M_2(x) \ll x^{r/2+3/2}$$

und also

$$M(x) \ll x^{r/2+1/2}\,.$$

Es gilt also (73) auch für $\varrho = 1$ und das Lemma ist vollkommen bewiesen.

Lemma 10.[4]) *Sei eine beliebige Form* (1) *gegeben, und es seien* (14) *beliebige reelle Zahlen. Ist* Re $A(x) \not\equiv 0$ *bzw.* Im $A(x) \not\equiv 0$, *dann gilt*

(88) $$\liminf_{x\to+\infty} x^{-(r+3)/4} \int_0^x \max\,(0, \operatorname{Re} P(y))\,\mathrm{d}y > 0$$

$$\liminf_{x\to+\infty} x^{-(r+3)/4} \int_0^x \max\,(0, -\operatorname{Re} P(y))\,\mathrm{d}y > 0$$

bzw.

(89) $$\liminf_{x\to+\infty} x^{-(r+3)/4} \int_0^x \max\,(0, \operatorname{Im} P(y))\,\mathrm{d}y > 0$$

$$\liminf_{x\to+\infty} x^{-(r+3)/4} \int_0^x \max\,(0, -\operatorname{Im} P(y))\,\mathrm{d}y > 0\,.$$

Wenn also $A(x) \not\equiv 0$ *ist, ist auch*

(90) $$\liminf_{x\to+\infty} x^{-(r+3)/4} \int_0^x |P(y)|\,\mathrm{d}y > 0$$

also

(91) $$\liminf_{x\to+\infty} x^{-(r+1)/2} M(x) > 0\,.$$

Beweis. Sei $0 < \lambda_1' < \lambda_2' < \dots$ die Folge aller Werte $\bar{Q}((m_j/M_j) - \alpha_j) > 0$ und

$$a_n' = \sum \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^r \frac{b_j}{M_j}\, m_j\right),$$

wo über alle Systeme $m_1, m_2, \dots, m_r$, für die $\bar{Q}(m_j/M_j - \alpha_j) = \lambda_n'$ ist, summiert wird.

---

[4]) Dieses Lemma entspricht dem Satz 2 in [7].

Im Spezialfall $M_1 = M_2 = \ldots = M_r = 1$ bewies Landau (siehe [4], S. 25) für $\varrho > r/2$ folgende Identität (I_ν ist die Besselsche Funktion I. Art mit dem Index ν):

$$(92) \qquad P_\varrho(x) = \frac{Mx^{r/4+\varrho/2}}{\pi^{\varrho+r/2}} \sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n' \frac{I_{r/2+\varrho}(2\pi \sqrt{(\lambda_n' x)})}{\lambda_n'^{r/4+\varrho/2}},$$

wo ($t > 0$) $P_0(t) = P(t)$ und (für $\varrho \geqq 1$) $P_\varrho(t) = \int_0^t P_{\varrho-1}(y) \, dy$ ist.

Mittels einer Transformation ($M_l M_j a_{lj}$ statt a_{lj}, b_j/M_j statt b_j, $\alpha_j M_j$ statt α_j für $j = 1, 2, \ldots, r$) ist leicht zu sehen, dass (92) auch im allgemeinen Fall gilt. Weiter gehen wir wörtlich wie Jarník in [1], § 4, S. 81–3 fort (für die Funktion Re $P_\varrho(x)$ bzw. Im $P_\varrho(x)$) und beweisen die Beziehungen (88) bzw. (89); (90) ist deren unmittelbare Folgerung und (91) folgt aus (90) mit Benutzung der Ungleichung

$$\int_0^x |P(y)| \, dy \leqq \sqrt{[x \, M(x)]} \, .$$

Der Beweis des Hauptsatzes 2 folgt sofort aus (73) und (91).

5. BEWEIS DES HAUPTSATZES 3

Lemma 11.[5]) *Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ beliebige reelle Zahlen, $\varrho \ll 1$. Dann ist*

$$M_\varrho(x) \ll x^{r+\varrho-2}$$

für $r > 3$,

$$M_\varrho(x) \ll x^{r+\varrho-2} \lg x$$

für $r = 3$ und

$$M_\varrho(x) \ll x^{r+\varrho-3/2}$$

für $r = 2$.

Beweis. Wir gehen analog wie bei dem Beweis vom Lemma 9 fort. Wir benutzen also die Beziehung

$$M_\varrho(x) \ll T_1 + T_2 + T_3 + x^{\varrho-1} \, ,$$

wo T_1, T_2 und T_3 nach (77)–(79) definiert sind. Es sei zuerst $\varrho > r/2$. Für T_1 bekommen wir analog die Abschätzung

$$T_1 \ll x^{r/2+\varrho-1/2} \, .$$

---

[5]) In der Arbeit [8], die zufallsweise früher erschien, ist eine allgemeine O-Abschätzung bewiesen, von der man, als eine Folgerung, die Behauptung vom Lemma 11 für $\varrho = 1$ herleiten kann.

Untersuchen wir T_2. Für $|t'| \leqq w$, $|t| \geqq 2w$, $t \in \mathfrak{B}_{\pm h,k}$, $h > 0$ ist so wie bevor nach (26) $|s| \gg h/k$, $|s + s'| \gg h/k$ und also (siehe (28) und (30))

$$T_2 \ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{k^{\varrho+1}}{h^{\varrho+1}} \int_0^w x^{r/4+1/2} \int_0^{c/k\sqrt{x}} \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}(1 + x^2u^2)^{r/4}} \, du \, dt' \ll$$

$$\ll x^{3r/4-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^{\varrho+1-r/2} \int_0^{c\sqrt{(x)}/k} \frac{dv}{(1+v)^{r/2}},$$

d. h.

$$T_2 \ll x^{3r/4-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^{\varrho+1-r/2} \ll x^{r/2+\varrho-1/2}$$

für $r > 2$,

$$T_2 \ll x^{3r/4-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^{\varrho} \lg x \ll x^{r/2+\varrho-1/2}$$

für $r = 2$.

Für T_3 bekommen wir wieder wie bevor (siehe (30))

$$T_3 \ll x^{\varrho-1} \int_w^{\infty} \frac{|F(s)|^2 + |G(s)|^2}{t^2} \, dt \ll x^{\varrho-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{k^2}{h^2} \int_0^{c/k\sqrt{x}} \frac{x^r \, du}{k^r(1 + x^2u^2)^{r/2}} \ll$$

$$\ll x^{r+\varrho-2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{k^{r-2}} \int_0^{c\sqrt{(x)}/k} \frac{dv}{(1+v)^r} \ll x^{r+\varrho-2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{k^{r-2}}$$

d. h.

$$T_3 \ll x^{r+\varrho-2}$$

für $r > 3$

$$T_3 \ll x^{r+\varrho-2} \lg x$$

für $r = 3$ und

$$T_3 \ll x^{r+\varrho-3/2}$$

für $r = 2$.

Aus den erhaltenen Abschätzungen bekommt man die Behauptung vom Lemma für $\varrho > r/2$. Da aber für beliebige ϱ

$$x\, M_\varrho(x) \leqq \int_x^{2x} M_\varrho(y) \, dy = M_{\varrho+1}(2x) - M_{\varrho+1}(x)$$

bekommt man schrittweise, dass die Behauptung des Lemmas für ein beliebiges $\varrho \ll 1$ gilt.

Der Beweis des Hauptsatzes 3 bekommt man nun sofort aus Lemma 10 und Lemma 11 mit $\varrho = 1$.

Literaturverzeichnis

[1] *V. Jarník:* Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Mathematische Zeitschrift *33* (1931), 62—84.

[2] *V. Jarník:* Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Zweite Abhandlung, Mathematische Zeitschrift *33* (1931), 85—97.

[3] *V. Jarník:* Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 5. Abhandlung ,Časopis pro pěst. matematiky *69* (1940), 148—179.

[4] *E. Landau:* Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre, Berlin 1962.

[5] *B. Novák:* On lattice points in high-dimensional ellipsoids (Preliminary communication), Comment. Math. Univ. Carolinae *7* (1966), 479—484.

[6] *B. Novák:* Verallgemeinerung eines Peterssonschen Satzes und Gitterpunkte mit Gewichten, Acta Arithmetica *XIII* (1967), 423—454.

[7] *B. Novák:* Über Gitterpunkte mit Gewichten in mehrdimensionalen Ellipsoiden: Mittelwertsätze, Czech. math. J. *17* (*92*) 1967) 609—623.

[8] *B. Novák:* Mean value theorems in the theory of lattice points with weight, Comment. Math. Univ. Carolinae *8* (1967), 710—731.

[9] *B. Novák:* On lattice points with weights in high-dimensional ellipsoids, Acta Arithmetica *XIV* (1968), 371—397.

[10] *A. Walfisz:* Über die Koeffizientsummen einiger Modulformen, Mathematische Annalen *108* (1933), 75—90.

[11] *А. З. Вальфиш:* Абсциссы сходимости некоторых рядов Дирхле, Труды Тбулисского мат. института *22* (1956) 33—75.

Anschrift des Verfassers: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta KU).