Milan Hejný

Многообразие $\mathcal{V}_3 \subset \mathbf{P}_5$ и его применение к изучению комплекса прямых $\mathbf{P}_3$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 4, 633–665

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100862

Чехословацкий математический журнал, т. 18 (93) 1968, Прага

МНОГООБРАЗИЕ $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{P}_5$ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ $\mathbf{P}_3$

MILAN HEJNÝ (Милан Гейны), Bratislava

(Поступило в редакцию 26/V. 1967 г.)

ВВЕДЕНИЕ

В статье [2] авторы пишут: „*Проективно-дифференциальная теория комплекса прямых представляет собой один из трудных разделов линейчатой геометрии, так как до сих пор не удалось осуществить достаточно симметричный репераж, который позволил бы проникнуть в свойства комплекса, связанные с дифференциальной окресностью достаточно высокого порядка*“. Достаточно высоким порядком здесь авторы повидимому подрозумывают именно порядок 3. Известно, что окрестность третьего порядка общего комплекса прямых содержит 7 инвариантов [1]; однако о геометрической природе этих инвариантов почти ничего не знаем.

В настоящей работе решены упомянутые задачи в модели Клейна, т.е. для трехмерного многообразия $\mathscr{V}_3$ принадлежащего регулярной гиперквадрике $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}_5$ сигнатуры (3; 3). Без затруднений мы одновременно решили те-же вопросы и для гиперповерхности четырехмерного конформного пространства $\mathbf{C}_4$, так как при перенесении Дарбу она является многообразием $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q}$, где теперь гиперквадрика $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}_5$ сигнатуры (5; 1).

В первой главе изучаем свойства многообразия $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{P}_5$, во второй специализируем многобразие $\mathscr{V}_3$ ограничением $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{P}_5$, где $\mathbf{Q}$ гиперквадрика пространства $\mathbf{P}_5$ со сигнатурой (3; 3) или (5; 1).

СИМВОЛИКА

На протряжении всего изложения пользуемся следующей символикой. Малые латинские индексы i, j, k, принимают значения $0, \ldots, 5$; болшие латинские индексы A, B, C, L, M, N, X, Y и Z принимают значения 1, 2 и 3.

Суммирование производится по индексам i, j, k, A, B, C, X, Y и Z но не по индексам L, M и N.

Если в какой-то формуле встречаются хотя бы 2 из индексов A, B и C или хотя бы 2 из индексов L, M, N, то $(A, B, C) = \pi_+(1, 2, 3)$ или $(L, M, N) = \pi_+(1, 2, 3)$, где π_+ обозначает четную перестановку. Корни $\sqrt{\ } = \sqrt[2]{\ }$ и $\sqrt[3]{\ }$ понимаются как однозначные функции (в локальном изложении). В случае действительности предполагаем $\sqrt{\ } \geqq 0$. Символ $\mathrm{ct}\,(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ обозначает степень соприкосновения объектов A и B в точке A_0. Все многообразия предполагаются класса дифференцируемости C^3.

Прямую проходящую точкой A_0 и лежащую в пространстве τ иногда называем направлением.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

МНОГООБРАЗИЕ $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{P}_5$

1. Окрестность первого порядка. Пусть в пятимерном пространстве $\mathbf{P}_5$ дано вещественное трехмерное многообразие

$$\mathscr{V}_3 : \mathrm{P} = \mathrm{P}(u, v, w)\,; \quad (u, v, w) \in \Omega\,,$$

которое предполагается непрерывно дифференцируемым вплоть до третьего порядка во всей односвязной области Ω.

Для координатного вычисления будем пользоваться системой координат

$$\mathrm{X} = x^0\mathrm{A}_0 + x^1\mathrm{A}_1 + x^2\mathrm{A}_2 + x^3\mathrm{A}_3 + x^4\mathrm{A}_4 + x^5\mathrm{A}_5 \tag{1}$$

или ее подсистемой

$$\mathrm{X} = x^0\mathrm{A}_0 + x^1\mathrm{A}_1 + x^2\mathrm{A}_2 + x^3\mathrm{A}_3 \tag{1'}$$

основанной на вершинах сопровождающего репера

$$\mathbf{A} : \mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4. \mathrm{A}_5\,.$$

Дифференциалы dA_i выражаются уравнениями

$$\mathrm{dA}_i = \omega_i^j \mathrm{A}_j \tag{2}$$

и, в качестве координат выступающие здесь формы Пфаффа, подчинены уравнениям структуры проективного пространства:

$$\mathrm{d}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j\,. \tag{3}$$

Репер $\mathbf{A}$ *называется репером нультого порядка, или просто О-репером многообразия* $\mathscr{V}_3$, *если только выполняется*

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{P}(u, v, w)\,.$$

Если более того точки A_1, A_2 и A_3 *поместить в касательное пространство* τ *многообразия* $\mathscr{V}_3$ *в точке* A_0, *то репер* $\mathbf{A}$ *называется репером первого порядка, или просто* 1-*репером многообразия* $\mathscr{V}_3$.

1-репер аналитически выражается уравнениями

(4) $$\omega_0^4 = 0\,, \quad \omega_0^5 = 0\,.$$

Формы $\omega^A = \omega_0^A$ ($A = 1, 2, 3$), будучи главными, влекут для вторичных параметров π_i^j тождества

(5) $$\pi_0^1 = \pi_0^2 = \pi_0^3 = \pi_0^4 = \pi_0^5 = 0\,.$$

2. Окрестность второго порядка — классификация. Внешнее дифференцирование системы (4) дает

$$\omega^A \wedge \omega_A^4 = 0\,, \quad \omega^A \wedge \omega_A^5 = 0$$

откуда, в силу теоремы Картана вытекает

(6) $$\omega_A^4 = f_{AB}\omega^B\,, \quad \omega_A^5 = g_{AB}\omega^B\,,$$

где матрицы $\|f_{AB}\|$ и $\|g_{AB}\|$ симметричны.

Символом Φ обозначим пучок гиперплоскостей φ с центром τ. Станем искать множество $\sum$ тех кривых σ, соприкасающаяся плоскость (в точке A_0) которых принадлежит постоянно взятой гиперповерхности $\varphi \in \Phi$. Это условие можно писать

$$\mathrm{ct}\,(\sigma, \varphi) \geqq 2\,.$$

Теорема 1. *Матрицы* $\|f_{AB}\|$ *и* $\|g_{AB}\|$, *которые даются уравнениями* (6), *пропорциональны тогда и только тогда, если существует гиперплоскость* $\varphi \in \Phi$ *содержащая соприкасающуюся плоскость любой кривой* $\sigma \subset \mathscr{V}_3$ *в точке* $A_0 \in \sigma$.

Доказательство. Пусть сначала $\mu\|f_{AB}\| = \lambda\,.\,\|g_{AB}\|$, $\lambda^2 + \mu^2 > 0$. Тогда уравнения (6) влекут

(*) $$\mu\omega_A^4 = \lambda\,.\,\omega_A^5\,,$$

или

$$d^2A_0 = d(\omega_0^0 A_0 + \omega^A A_A) = (\lambda A_4 + \mu A_5)\,\omega^A\omega_A^5 + 0 \bmod A_1A_2A_3A_0\,.$$

Гиперповерхность $\varphi \equiv A_0A_1A_2A_3(\lambda A_4 + \mu A_5) \equiv (\tau, \lambda A_4 + \mu A_5)$ является искомой гиперповерхностью пучка Φ.

Пусть наоборот для постоянной гиперплоскости $\varphi \in \Phi$ выполняется $d^2A_0 \in \varphi$ тождественно. Обозначая $\varphi \equiv (\tau, \lambda A_4 + \mu A_5)$ где λ и μ постоянные не одновременно равные нулью, дадим условию $d^2A_0 \in \varphi$ вид тождества

$$\omega^A(\omega_A^4 A_4 + \omega_A^5 A_5) = \lambda A_4 + \mu A_5$$

которое в силу независимости форм $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ влечет (*) ч.т.д.

Специальный случай многообразия $\mathscr{V}_3$, о котором идет речь в теореме 1 исключает

Ограничение 1. *Для многообразия $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{P}_5$, матрицы $\|f_{AB}\|$ и $\|g_{AB}\|$ предполагаются не пропорциональными.*

Теорема 2. *В касательном пространстве τ многообразия $\mathscr{V}_3$ существует пучок Ψ квадратических конусов ψ с общей вершиной в точке A_0 так, что выполняется*

1° *любой гиперплоскости $\varphi \in \Phi$ соответствует равно один конус $\psi \in \Psi$ так, что условия*

$$\mathrm{ct}\,(\sigma, \varphi) \geqq 2 \quad \textit{и} \quad \mathrm{ct}\,(\sigma, \psi) \geqq 1$$

ровносильны для всех кривых σ, $A_0 \in \sigma \subset \mathscr{V}_3$;

2° *соответствие*

$$\pi : \Phi \to \Psi : \varphi \to \psi$$

описанное в пункте 1° является проективным соответствием пучков Φ и Ψ; существует обратимый проективитет π^{-1}.

Доказательство. Если гиперплоскость $\varphi \in \Phi$ в координатной системе (1) определяется уравнением

$$\varphi(\alpha, \beta) \equiv \alpha x^4 + \beta x^5 = 0 \tag{7}$$

то, учитывая

$$d^2 A_0 = \omega^A \omega_A^4 A_4 + \omega^A \omega_A^5 A_5 = (f_{AB} A_4 + g_{AB} A_5)\, \omega^A \omega^B$$

$(\mathrm{mod}\ \tau)$, можем условие

$$\mathrm{ct}\,(\sigma, \varphi) \geqq 2 \quad \text{т.е.} \quad d^2 A_0 \in \varphi(\alpha, \beta)$$

писать в виде

$$(\alpha f_{AB} + \beta g_{AB})\, \omega^A \omega^B = 0\,.$$

Последнее уравнение определяет направление кривой σ т.е. ее касательную в точке A_0, которой служит любая образующая конуса

$$\psi(\alpha, \beta) \equiv (\alpha f_{AB} + \beta g_{AB})\, x^A x^B = 0 \tag{8}$$

написанного в координатной системе (1′).

Благодаря ограничению 1 символ $\psi(\alpha, \beta)$ всегда обозначает конус с вершиной A_0, лежащий в пространстве τ. Параметры α и β являются однородными координатами как для пучка Φ, так и для пучка Ψ и их равенство определяет проективитет

$$\pi[\varphi(\alpha, \beta)] = \psi(\alpha, \beta)\,.$$

Насколько этот проективитет не вырождает, существует также π^{-1}. Теорема доказана.

Полученный результат предоставляет нам возможность классифицировать окресность второго порядка многообразия $\mathscr{V}_3$, используясь хорошо известную классификацию пучков конических сечений. С точки зрения будущих рассуждений теряют интереса те пучки ψ, которые состоятся только из вырождающих конусов. Этот факт оправдает нас ввести

Ограничение 2. *Для многообразия $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{P}_5$ пучок конусов ψ из теоремы 2 содержит по крайней мере один не вырождающийся конус.*

Чтобы упростить наши высказывания заменим пучок Ψ конусов $\psi(\alpha, \beta)$ пучком $\tilde{\Psi}$ конических сечений $\tilde{\psi}(\alpha, \beta) = \psi(\alpha, \beta) \cap A_1A_2A_3$. Базисную точку пучка $\tilde{\Psi}$ будем называть *асимптотической точкой* (многообразия $\mathscr{V}_3$ в A_0) и обозначать буквой C. Точку плоскости $A_1A_2A_3$ с одной и той же полярой относительно всех конических сечений $\tilde{\psi}$ пучка $\tilde{\Psi}$ будем называть *главной точкой* (многообразия $\mathscr{V}_3$ в A_0). Главная точка называется *развертывающейся,* если она в то же время является также асимптотической; в обратном случае она называется косой.

При помощи только что принятых терминов наглядным образом вводим термины: асимптотическое направление, главное (развертывающееся или косое) направление, а также асимптотическая кривая, главная (развертывающаяся или косая) кривая многообразия $\mathscr{V}_3$.

Основанием для этих терминов служит геометрия прямых пространства $\mathbf{P}_3$.

Классификацию окресности второго порядка многообразия $\mathscr{V}_3$ устанавливает

Теорема 3. *Окресность второго порядка точки $A_0 \in \mathscr{V}_3 \subset \mathbf{P}_5$ принадлежит одному и только одному из типов следующей таблицы*

тип		число асимптот. направлений								число главных напр.			
		крат. — 1		крат. — 2		крат. — 3		крат. — 4		разверт.		косых	
		д	м	д	м	д	м	д	м	д	м	д	м
I	а	4										3	
	б	2	2									1	2
	в		4									3	
II	а	2		1						1		1	
	б		2	1						1		1	
III	а			2						2			
	б				2						2		
IV		1				1				1			
V								1		1			

сокращения: крат. = кратность, д = действительность, м = мнимость.

Доказательство сводится к известной классификации пучков конических сечений, содержащих хотя бы одно регулярное сечение. Поэтому здесь доказательство выпускаем.

В сущности эта таблица совпадает с таблицей 1 книги [1] стр. 87. Кованцов не различает действительность объектов и наша таблица не содержит тип исключенный ограничением 1. Однако переимущество наших результатов заключается именно в том, что теорема 2 касается более широкого класса многообразий чем комплексов прямых в $\mathbf{P}_3$.

Геометрия, которую пучок Ψ или $\tilde{\Psi}$ индуцирует в касательном пространстве τ, позволяет нам построить 2-репер. Так как природа 2-репера для различных типов многообразия $\mathscr{V}_3$ совсем различна, то почти все типы надо разбирать отдельно. В этой работе ограничимся только теми из типов таблицы, для которых существует равно три главных действительных направления.

Ограничение 3. *Многообразие $\mathscr{V}_3$ предполагается либо типа Ia, либо типа Iв таблицы из теоремы* 3.

Продолжаем репераж. Используем известный результат линейной независимости главных прямых, которые теперь образуют полярный трехгранник относительно любого из конусов пучка Ψ.

1-*репер* **A** *грани* A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 *которого совпадают с главными направлениями многообразия $\mathscr{V}_3$ в A_0, будем называть репером второго порядка или просто* 2-*репером многообразия $\mathscr{V}_3$*.

Не сложно установить аналитическую форму последной специализации: матрицы

$$\|f_{AB}\| \quad \text{и} \quad \|g_{AB}\|$$

принимают диагональный вид. Упростив обозначения следующим образом

$$f_{LL} = f_L\,, \quad g_{LL} = g_L$$

можно систему (6) писать

$$\omega^4_L = f_L\omega^L\,; \quad \omega^L_5 = g_L\omega^L\,. \tag{9}$$

Далее будем предполагать что репер **A** является всегда 2-репером.

3. Геометрия окресности второго порядка. Сначала покажем, что в § 2. введенное понятие асимптотического направления находится в полном согласии с его общеупотребляемым значением.

Теорема 4. *Касательная кривой $\sigma \subset \mathscr{V}_3$ в точке $A_0 \in \sigma$ является асимптотическим направлением многообразия $\mathscr{V}_3$ в A_0 в том и только том случае, если*

$$\mathrm{ct}\,(\sigma, \tau) \geqq 2\,.$$

Доказательство. В силу соотношения

$$d^2A_0 = f_0A_4 + g_0A_5 + 0 \bmod \tau\,,$$

где мы обозначили

$$(10)\qquad \begin{aligned} f_0 &= f_1(\omega^1)^2 + f_2(\omega^2)^2 + f_3(\omega^3)^2 \\ g_0 &= g_1(\omega^1)^2 + g_2(\omega^2)^2 + g_3(\omega^3)^2\,, \end{aligned}$$

условие $\operatorname{ct}(\sigma, \tau) \geqq 2$ равносильно системе

$$f_0 = 0\,, \quad g_0 = 0\,,$$

решение $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$ которой, повидимому определяет асимптотическое направление; ч.т.д.

Решая последнюю систему двух уравнений и обозначая

$$(11)\qquad h_L = \begin{vmatrix} f_M & f_N \\ g_M & g_N \end{vmatrix}$$

находим асимптотические точки

$$(12)\qquad \begin{aligned} C_1 &= \sqrt{(h_1)}\,A_1 + \sqrt{(h_2)}\,A_2 + \sqrt{(h_3)}\,A_3 \\ C_2 &= -\sqrt{(h_1)}\,A_1 + \sqrt{(h_2)}\,A_2 + \sqrt{(h_3)}\,A_3 \\ C_3 &= \sqrt{(h_1)}\,A_1 - \sqrt{(h_2)}\,A_2 + \sqrt{(h_3)}\,A_3 \\ C_4 &= \sqrt{(h_1)}\,A_1 + \sqrt{(h_2)}\,A_2 - \sqrt{(h_3)}\,A_3\,. \end{aligned}$$

Из этих уравнений сразу вытекает, что асимптотические направления

$$A_0C_1,\ A_0C_2,\ A_0C_3 \quad \text{и} \quad A_0C_4$$

попарно различны в том и только том случае, если выполняется

$$(13)\qquad h_1h_2h_3 \neq 0\,.$$

Если бы не предполагать последнее, то наши рассуждения охватывали бы также многообразия типа IIIа и IIIб таблицы из теоремы 3. Однако, условие (13) играет очень важную роль и мы его будем предполагать в силе.

Относительно действительности упомянутых объектов можно сказать, что точки C_1, C_2, C_3 и C_4 действительны тогда и только тогда, если

$$\operatorname{sign} h_1 = \operatorname{sign} h_2 = \operatorname{sign} h_3\,;$$

в обратном случае среди этих точек не существует действительной. Первому случаю отвечает многообразие типа Iа, второму многообразие типа Iв.

Обратим внимание на вырождающиеся конусы пучка Ψ. Не трудно проверить, что вырождающиеся конусы пучка Ψ выражаются в системе координат (1′) уравнениями

$$\psi_A \equiv \psi_A(-g_A, f_A) \equiv -h_C(x^B)^2 - h_B(x^C)^2 = 0\,. \tag{14}$$

Гиперплоскости φ_A которые отвечают конусам ψ_A в проективитете π даются в системе координат (1) уравнениями

$$\varphi_A \equiv \varphi_A(-g_A, f_A) \equiv -g_A x^4 + f_A x^5 = 0\,. \tag{14′}$$

Хотя нам удалось построить довольно много инвариантных объектов — три главные и четыре асимптотические направления, три вырождающиеся конусы ψ_A пучка ψ и три, этим конусам π-отвечающие гиперплоскости φ_A пучка Φ — которые напрашивала нам окресность второго порядка, все-таки инварианта здесь нет.

Теорема 5. *Окресность второго порядка многообразия $\mathscr{V}_3$ не обладает ни одним инвариантом.*

Доказательство. Внешним дифференцированием уравнений (9) и вариацией вторичных параметров π^i_j находим 12 уравнений

$$\begin{aligned} &f_L(\pi^0_0 - 2\pi^L_L + \pi^4_4) + \delta f_L - g_L\pi^4_5 = 0\\ &g_L(\pi^0_0 - 2\pi^L_L + \pi^5_5) + \delta g_L - f_L\pi^5_4 = 0\\ &\pi^1_2 = \pi^2_1 = \pi^3_2 = \pi^2_3 = \pi^1_3 = \pi^3_1 = 0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Видно, что полное исключение параметров π^i_j из этих уравнений не возможно, итак инварианта нет ч.т.д.

Следствием соотношений (15) является

$$\frac{\delta h_L}{h_L} = -2\pi^0_0 + 2\pi^M_M + 2\pi^N_N - \pi^4_4 - \pi^5_5 \tag{15′}$$

что понадобиться нам в далнейшем.

Относительно репеража отметим

1° В качестве базисных конусов $\psi(1,0)$ и $\psi(0,1)$ пучка Ψ можно взять два из трех вырождающихся конусов ψ_A. Это влечет соотношения

$$f_L = 0 \quad \text{и} \quad g_M = 0\,,$$

которые, хотя упрощают вычисления, нарушают симметрию репеража и поэтому для нас они не удобны.

2° Нормировкой параметров f_A и g_A или h_A станем заниматься только в § 11.

4. Окресность третьего порядка. Дифференцируя уравнения (9) внешеним образом и развертывая полученные соотношения по базисным формам ω^A, находим 12 независимых уравнений ($L = 1, 2, 3$):

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
-f_L(\omega_0^0 - 2\omega_L^L + \omega_4^4) - \mathrm{d}f_L - g_L\omega_5^4 &= F_{LA}\omega^A\\
-g_L(\omega_0^0 - 2\omega_L^L + \omega_5^5) - \mathrm{d}g_L - f_L\omega_4^5 &= G_{LA}\omega^A\\
f_M\omega_N^M + f_N\omega_M^N &= F_0\omega^L + F_{MN}\omega^M + F_{NM}\omega^N\\
g_M\omega_N^M + g_N\omega_M^N &= G_0\omega^L + G_{MN}\omega^M + G_{NM}\omega^N
\end{aligned}
$$

Благодаря (13) можем последние две из символических уравнений (16) заменить им равносильными

$$
(16')\quad
\begin{aligned}
\omega_M^L h_N &= \begin{vmatrix} F_{LM} & f_M \\ G_{LM} & g_M \end{vmatrix} \omega^L + \begin{vmatrix} F_{ML} & f_M \\ G_{ML} & g_M \end{vmatrix} \omega^M + \begin{vmatrix} F_0 & f_M \\ G_0 & g_M \end{vmatrix} \omega^N\\
-\omega_L^M h_N &= \begin{vmatrix} F_{LM} & f_L \\ G_{LM} & g_L \end{vmatrix} \omega^L + \begin{vmatrix} F_{ML} & f_L \\ G_{ML} & g_L \end{vmatrix} \omega^M + \begin{vmatrix} F_0 & f_L \\ G_0 & g_L \end{vmatrix} \omega^N
\end{aligned}
$$

Геометрическое построение 3-репера исполняется при помощи точек пересечения главных прямых A_0A_L со смежными. Пусть

$$U = \alpha A_0 + A_L$$

точка пересечения главной прямой A_0A_L и смежной с ней прямой при смещении в направлении

$$u : \omega^L = u^L\omega\,,$$

где $\omega \neq 0$ форма Пфаффа. Отметим, что случай совпадения точек U и A_0 в виду специального выражения точки U является исключенным. Этот случая настолько тривиален, что не представляет для нас никакого интереса.

Если символом d_u обозначить дифференцирование в направлении u, то точка U характеризируется условием

$$d_u U = 0 \bmod A_0A_L\,,$$

которое, имея в виду

$$dU = (\alpha\omega^M + \omega_L^M)\,A_M + (\alpha\omega^N + \omega_L^N)\,A_N + f_L\omega^L A_4 + g_L\omega^L A_5 + 0 \bmod A_0A_L\,,$$

равносильно системе

$$
\begin{aligned}
\alpha\omega^M + \omega_L^M &= 0\,, & f_L\omega^L &= 0\,,\\
\alpha\omega^N + \omega_L^N &= 0\,, & g_L\omega^L &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Решая эту систему, заметим сначала, что уравнения

$$f_L = 0\,, \quad g_L = 0$$

одновременно не могут иметь места, так как это противоречит требованию (13). Отсюда следует $\omega^L = 0$, т.е. $u^L = 0$. При помощи уравнений (16′) и обозначения $\omega^L = u^L\omega$ верхняя система пишется теперь в виде

$$\begin{aligned} &u^L && = 0 \\ &u^M\left(\begin{vmatrix} F_{ML} & f_L \\ G_{ML} & g_L \end{vmatrix} - \alpha h_N\right) + u^N \begin{vmatrix} F_0 & f_L \\ G_0 & g_L \end{vmatrix} && = 0 \\ &u^M \begin{vmatrix} F_0 & f_L \\ G_0 & g_L \end{vmatrix} + u^N\left(\begin{vmatrix} F_{NL} & f_L \\ G_{NL} & g_L \end{vmatrix} + \alpha h_M\right) && = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Желанное не тривиальное решение $u^1 : u^2 : u^3$ последней системы существует только тогда, если выполняется соотношение

$$\begin{aligned} &\alpha^2 h_M h_N + \alpha\left(h_N \begin{vmatrix} F_{NL} & f_L \\ G_{NL} & g_L \end{vmatrix} - h_M \begin{vmatrix} F_{ML} & f_L \\ G_{ML} & g_L \end{vmatrix}\right) + \\ &+ \begin{vmatrix} F_0 & f_L \\ G_0 & g_L \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} F_{ML} & f_L \\ G_{ML} & g_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{NL} & f_L \\ G_{NL} & g_L \end{vmatrix} = 0\,, \end{aligned} \tag{18}$$

которое, в силу (13) является квадратическим уравнением относительно параметра α. Корням $(\alpha_L)_1$ и $(\alpha_L)_2$ уравнения (18) отвечают (не объязательно однозначно) направления смещения, удовлетворяющее системе (17). Тем самым доказана

Теорема 6. *Число точек* $\mathrm{U} \neq \mathrm{A}_0$, *которые служят точками пересечения главной прямой* $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_L$ *и смежной с ней прямой* (*при подходящих смещениях*) *равно двум. Действительность или взаимное совпадение этих точек находится в полном согласии из действительностью или совпадением корней уравнения* (18).

Точки, о которых идет речь в теореме 6, обозначим U_L и V_L; им соответствующие направления смещения обозначим u_L и v_L. Только что определенные точки

$$\mathrm{U}_L = (\alpha_L)_1\,\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_L\,, \quad \mathrm{V}_L = (\alpha_L)_2\,\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_L$$

позволяют построить 3-репер.

2-*репер* **A**, *для которого, для всех индексов* $L = 1, 2, 3$ *выполняется*: *двойное отношение*

$$(\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_L, \mathrm{U}_L, \mathrm{V}_L) = -1 \quad \textit{в случае} \quad \mathrm{U}_L \neq \mathrm{V}_L$$

и

$$\mathrm{U}_L = \mathrm{A}_L \qquad \textit{в случае} \quad \mathrm{U}_L = \mathrm{V}_L$$

будем называть репером третьего порядка, или просто 3-репером многообразия $\mathscr{V}_3$.

Отметим, что точка A_L остается действительной даже в случае мнимых U_L, V_L, потому что здесь точки U_L и V_L комплексно сопряженны.

С аналитической точки зрения 3-репер определяется уравнением

$$(\alpha_L)_1 + (\alpha_L)_2 = 0\,, \quad (L = 1, 2, 3)$$

которое равносильно анулированию линейного коэффициента уравнения (18). Последний факт оправдает нас ввести обозначения

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{1}{h_L h_M}\begin{vmatrix} F_{NL} & f_L \\ G_{NL} & g_L \end{vmatrix} = \frac{1}{h_L h_N}\begin{vmatrix} F_{ML} & f_L \\ G_{ML} & g_L \end{vmatrix} \\ D_L &= \frac{1}{h_L\sqrt{h_M}\sqrt{h_N}}\begin{vmatrix} F_0 & f_L \\ G_0 & g_L \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{19}$$

Тем самым мы окончились репераж для первой главы. В полученном 3-репере продолжается стройка геометрии окресности третьего порядка многообразия $\mathscr{V}_3$. Этим вопросам посвященны три следующие параграфа.

5. Конус $\varkappa$. В предыдущем исследовании системы (17) мы ответили только на вопрос о существовании ее решения. Относительно решения самого говорит

Теорема 7. *В качестве направления по которому осуществляется смещение упомянутое в теореме* 6 *выступают либо*

1° *две лишь направления плоскости* $A_0A_MA_N$, *либо*

2° *любое из пучка направлений плоскости* $A_0A_MA_N$.

Случай 2° *наступает тогда и только тогда, если имеют места* 2 *уравнения*

$$E_L = 0 \quad \text{и} \quad D_L = 0\,.$$

Доказательство. При помощи обозначений (19) можем уравнение (18) писать просто

$$\alpha^2 = h_L^2(E_L^2 - D_L^2)\,.$$

Внося корни $\pm h_L\sqrt{(E_L^2 - D_L^2)}$ этих уравнений вместе со соотношениями (19) в систему (17), приведем последнюю систему к виду

$$\begin{aligned} &u^L &&= 0 \\ &u^M(E_L \mp \sqrt{(E_L^2 - D_L^2)})\sqrt{(h_N)} + u^N D_L\sqrt{(h_M)} &&= 0 \\ &u^M D_L\sqrt{(h_N)} + u^N(E_L \pm \sqrt{(E_L^2 - D_L^2)})\sqrt{(h_M)} &&= 0 \end{aligned}$$

Направление $\mathrm{u} = u^L : u^M : u^N$ определяется последной системой двухзначно с исключением случая $E_L = D_L = 0$, для которого последние две уравнения обращаются в тождества. Теорема доказана.

Из уравнений выступающих в доказательстве легко найти точки

$$(20) \qquad \mathrm{U}_L = h_L\sqrt{(E_L^2 - D_L^2)}\,\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_L\,, \quad \mathrm{V}_L = -h_L\sqrt{(E_L^2 - D_L^2)}\,\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_L$$

и в случае $D_L \neq 0$ также им отвечающие направления

$$(20') \qquad \begin{aligned} \mathrm{u}_L &= u_L^L : u_L^M : u_L^N = 0 : -D_L\sqrt{(h_M)} : (E_L - \sqrt{(E_L^2 - D_L^2)})\sqrt{(h_N)} \\ \mathrm{v}_L &= v_L^L : v_L^M : v_L^N = 0 : -D_L\sqrt{(h_M)} : (E_L + \sqrt{(E_L^2 - D_L^2)})\sqrt{(h_N)} \end{aligned}$$

В случае $D_L = 0$, $E_L > 0$ соответственно $D_L = 0$, $E_L < 0$ необходимо заменить первое соответственно второе из соотношений (20′) соотношением

$$(20'') \qquad \mathrm{u}_L = u_L^L : u_L^M : u_L^N = 0 : (E_L + \sqrt{(E_L^2 - D_L^2)})\sqrt{(h_M)} : -D_L\sqrt{(h_N)}$$

соответственно

$$\mathrm{v}_L = v_N^L : v_L^M : v_L^N = 0 : (E_L - \sqrt{(E_L^2 - D_L^2)}\sqrt{(h_M)} : - D_L\sqrt{(h_N)}\,.$$

Соотношения (20), (20′) и (20″) позволяют нам дать более подробную информацию о природе объектов U_L, V_L, u_L и v_L.

Теорема 8. *Пусть в точке* $\mathrm{A}_0 \in \mathscr{V}_3$ *не выполняется* $E_L = D_L = 0$. *Тогда наступает один и только из случаев*:

1° $E_L^2 > D_L^2$ *и все объекты* $\mathrm{U}_L \not\equiv \mathrm{V}_L$, $\mathrm{u}_L \not\equiv \mathrm{v}_L$ *действительны*;

2° $E_L^2 < D_L^2$ *и все объекты* $\mathrm{U}_L \not\equiv \mathrm{V}_L$, $\mathrm{u}_L \not\equiv \mathrm{v}_L$ *мнимы*;

3° $E_L^2 = D_L^2$ *и все объекты* $\mathrm{U}_L \equiv \mathrm{V}_L$, $\mathrm{u}_L \equiv \mathrm{v}_L$ *действительны.*

Доказательство наглядно.

Теорема 9. *Если в точке* $\mathrm{A}_0 \in \mathscr{V}_3$ *выполняется* $E_L^2 \neq D_L^2 \neq 0$, *то для двойного отношения прямых* $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_M$, $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_N$, u_L *и* v_L *будет*

$$(21) \qquad (\mathrm{A}_0\mathrm{A}_M, \mathrm{A}_0\mathrm{A}_N, \mathrm{u}_L, \mathrm{v}_L) = \frac{E_L - \sqrt{(E_L^2 - D_L^2)}}{E_L + \sqrt{(E_L^2 - D_L^2)}}\,.$$

Доказательство. При условии $E_L^2 \neq D_L^2 \neq 0$ имеет место (20′). Так как эти соотношения написанны в базисе $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_L$, $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_M$, $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_N$ связки прямых $(\mathrm{A}_0; \tau)$, то утверждение теоремы проверяется мгновенно.

Следствие. *Если в точке* $\mathrm{A}_0 \in \mathscr{V}_3$ *выполняется* $D_L \neq 0$, *то* $E_L = 0$ *в том и только том случае, если*

$$(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_M, \mathrm{A}_0\mathrm{A}_N, \mathrm{u}_L, \mathrm{v}_L) = -1\,.$$

Рядом с пояснением геометрического значения $E_L = 0$ выясним также геометрическое значение уравнения $D_L = 0$.

Теорема 10. *Пусть в точке* $A_0 \in \mathscr{V}_3$ *выполняется* $E_L \neq 0$. *Тогда уравнение* $D_L = 0$ *имеет место в том и только в том случае, если прямые* $u_L \not\equiv v_L$ *совпадают с главными направлениями* A_0A_M *и* A_0A_N. *Если* $E_L \neq 0$ *и* u_L *является главным направлением, то и* v_L *является главным направлением.*

Доказательство. Предполагая $D_L = 0 \neq E_L$ из соотношений (20′) и (20″) следует $u_L \equiv A_0A_M$ и $v_L \equiv A_0A_N$ соответственно $u_L \equiv A_0A_N$ и $v_L \equiv A_0A_M$, если $E_L > 0$ соответственно $E_L < 0$.

Пусть теперь u_L является главным направлением и $E_L \neq 0$. Тогда всегда будет $D_L = 0$ ч.т.д.

Исключив специальные случаи обсужденные теоремой 10, получаем интересный результат относительно 6 направлений u_A и v_A.

Теорема 11. *Пусть для точки* $A_0 \in \mathscr{V}_3$ *выполняется*

$$D_1 D_2 D_3 \neq 0 ;$$

тогда прямые $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ *принадлежат квадратическому конусу* $\varkappa$ *выражающемуся в координатной системе* (1') *уравнением*

$$(22) \qquad 0 = \left(\frac{x^1}{\sqrt{h_1}}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{\sqrt{h_2}}\right)^2 + \left(\frac{x^3}{\sqrt{h_3}}\right)^2 + \\ + 2\frac{E_1}{D_1}\frac{x^2x^3}{\sqrt{(h_2)}\sqrt{(h_3)}} + 2\frac{E_2}{D_2}\frac{x^1x^3}{\sqrt{(h_1)}\sqrt{(h_3)}} + 2\frac{E_3}{D_3}\frac{x^1x^2}{\sqrt{(h_1)}\sqrt{(h_2)}}.$$

Сверх того пересечение плоскости $A_0A_MA_N$ *и конуса* $\varkappa$ *состоится из двух, может быть совпадающих прямых* u_L *и* v_L.

Доказательство. Внося $x^L = 0$ в уравнение (22) получается квадратическое уравнение

$$\left(\frac{x^M}{\sqrt{h_M}}\right)^2 + 2\frac{E_L}{D_L}\frac{x^Mx^N}{\sqrt{(h_M)}\sqrt{(h_N)}} + \left(\frac{x^N}{\sqrt{(h_N)}}\right)^2 = 0 ,$$

геометрическим решением которого является направление (20′). Заметим, что тождество $u_L \equiv v_L$ имеет место не только в случае касания плоскости $A_0A_MA_N$ и конуса $\varkappa$, но также в случае вырождения конуса $\varkappa$ в плоскости для которых прямая $u_L \equiv v_L$ окажется сингулярной.

Теорема 12. *Конус* $\varkappa$ *вырождает в том и только в том случае, если выполняется*

$$\left(\frac{E_1}{D_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{D_2}\right)^2 + \left(\frac{E_3}{D_3}\right)^2 = 2\frac{E_1}{D_1}\frac{E_2}{D_2}\frac{E_3}{D_3} + 1 .$$

Конус $\varkappa$ вырождает в двухкратную плоскость в том и только том случае если выполняется

$$E_1 = D_1\,, \quad E_2 = D_2\,, \quad E_3 = D_4$$

т.е.

$$\varkappa \equiv \left[\frac{x^1}{\sqrt{(h_1)}} + \frac{x^2}{\sqrt{(h_2)}} + \frac{x^3}{\sqrt{(h_3)}}\right]^2 = 0\,.$$

Доказательство сводится к механической проверке утверждений; мы его выпускаем.

До сих пор мы интересовались именно геометрией касательного пространства τ. В следующих двух параграфах устанавливается геометрическая ситуация вне пространства τ.

6. Плоскость ν. Соприкасающуюся плоскость главной кривой γ_L в точке A_0 обозначим ξ_L. Покажем что существует равно одна плоскость пересекающая всякую из плоскостей ξ_1, ξ_2 и ξ_3 в прямой. Эту плоскость обозначим буквой ν; плоскость ν играет очень важную роль в далнейших рассуждениях. Сказанное проверим точно.

Теорема 13. *Существует соприкасающаяся плоскост ξ_L главной кривой γ_L многообразия $\mathscr{V}_3$ в точке $A_0 \in \gamma_L \subset \mathscr{V}_3$. Далее существует одна и только одна плоскость ν удовлетворяющая одновременно соотношениям*

$$\dim(\nu \cap \xi_A) = 1 \quad \text{для} \quad A = 1, 2, \text{и } 3\,.$$

Для плоскости ν выполняется $\nu \cap \tau \equiv A_0$.

Доказательство. Дифференцируя первое из уравнений (2) и учитывая (10) находим

$$\text{(23)} \qquad d^2A_0 = (.)\,A_0 + (d\omega^A + \lambda^A)\,A_A + f_0A_4 + g_0A_5$$

где

$$\text{(24)} \qquad \lambda^A = \omega_0^0\omega^A + \omega^B\omega_B^A\,.$$

Обозначим еще

$$\text{(25)} \qquad K_{LN} = \frac{1}{h_M}\begin{vmatrix} F_{LN} & f_L \\ G_{LN} & g_L \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad K_{LM} = \frac{1}{h_N}\begin{vmatrix} F_{LM} & f_L \\ G_{LM} & g_L \end{vmatrix}$$

и d_L символ дифференцирования в главном направлении индекса L. Заменив в уравнении (23) дифференцирование d на d_L находим

$$d_L^2A_0 = (.)\,A_0 + (.)\,A_L + (\omega^L)^2\,(-K_{LM}A_M + K_{LN}A_N + f_LA_4 + g_LA_5)\,.$$

Соотношение (13) исключает $f_L = g_L = 0$, что осмысляет определение

$$\xi_L \equiv [\mathrm{A}_0, d_L\mathrm{A}_0, d_L^2\mathrm{A}_0]$$

соприкасающихся плоскостей главных кривых многообразия $\mathscr{V}_3$ в точке A_0.

Искомая плоскость ν, пока она существует, содержит точку A_0, вслед чего пересекает гиперплоскость $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5$ в прямой. Обозначив эту прямую через m и далее $\mathrm{N}_L \equiv \mathrm{m} \cap \xi_L$ находим

$$\mathrm{N}_L = \alpha_L\mathrm{A}_L + \beta_L(-K_{LM}\mathrm{A}_M + K_{LN}\mathrm{A}_N + f_L\mathrm{A}_4 + g_L\mathrm{A}_5)\,.$$

Точки N_1, N_2 и N_3 принадлежат прямой m откуда следует что ранг матрицы состовленной из координат точек N_A равен двум:

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} \alpha_1 & -\beta_1K_{12} & \beta_1K_{13} & \beta_1f_1 & \beta_1g_1 \\ \beta_2K_{21} & \alpha_2 & -\beta_2K_{23} & \beta_2f_2 & \beta_2g_2 \\ -\beta_3K_{31} & \beta_3K_{32} & \alpha_3 & \beta_3f_3 & \beta_3g_3 \end{Vmatrix} = 2\,.$$

Чтобы найти решение $\alpha_A : \beta_A$ $(A = 1, 2, 3)$ последнего уравнения, покажем сначала что

$$\beta_1\beta_2\beta_3 \neq 0\,.$$

Если бы, в самом деле, было например $\beta_1 = 0$, то $\alpha_1 \neq 0$ и из определителя $[\mathrm{I}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}]$ образованного столбцами 1, 4 и 5 верхней матрицы вытекает $\beta_2\beta_3h_1 = 0$, или, учитывая (13), также $\beta_2\beta_3 = 0$. Не теряя общности можем предполагать $\beta_2 = 0$ откуда будет

$$\alpha_3 = 0\,, \quad \beta_3f_3 = 0\,, \quad \beta_3g_3 = 0$$

что конечно либо противоречит соотношению (13) (в случае $f_3 = g_3 = 0$), либо приводит точку N_3 к бессмыслице (в случае $\beta_3 = 0$).

Доказанное соотношение $\beta_1\beta_2\beta_3 \neq 0$ оправдает нас нормировать

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1\,.$$

Теперь уже из уравнений

$$[\mathrm{I}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}] = 0\,; \quad [\mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}] = 0\,; \quad [\mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}] = 0$$

не трудно вычислить

$$\alpha_L = h_L^{-1}(h_NK_{NL} - h_MK_{ML})\,,$$

откуда

(26) $$\mathrm{N}_L = h_L^{-1}(h_NK_{NL} - h_MK_{ML})\,\mathrm{A}_L - K_{LM}\mathrm{A}_M + K_{LN}\mathrm{A}_N + f_L\mathrm{A}_4 + g_L\mathrm{A}_5\,.$$

Соотношения (13) и (26) влекут

$$\operatorname{rang} \|A_0, N_L, N_M\| = 3\,, \quad \nu \cap \tau = A_0$$

и

$$h_1 N_1 + h_2 N_2 + h_3 N_3 = 0\,.$$

Теорема доказана.

Плоскость ν, которую мы только что построили, предлагает продолжать репераж условием

$$A_4 \in \nu\,, \quad A_5 \in \nu\,,$$

что аналитически выражается системой

$$K_{12} = K_{21} = K_{23} = K_{32} = K_{13} = K_{31} = 0\,.$$

К сожалению это упрощение не пригодно для наших целей, так как оно противоречит одному из основных требований второй главы. Итак относительно взаимного расположения точек A_4, A_5 и плоскости ν ничего не предполагаем.

7. Гиперквадрика Г. Начинаем с определения. *Гиперквадрикой* Г *многообразия* $\mathscr{V}_3$ *в точке* A_0 будем называть любую действительную гиперквадрику пространства $\mathbf{P}_5$ для которой выполняется

$$\operatorname{ct}(\Gamma, \mathscr{V}_3) \geqq 2\,.$$

Пусть в системе координат (1) гиперквадрика Г дается уравнением

$$\Gamma \equiv \Gamma(X, X) = c_{ij} x^i x^j = 0\,; \quad c_{ij} = c_{ji}\,. \tag{27}$$

По определению будет

$$\Gamma(A_0, A_0) = 0\,, \quad d\Gamma(A_0, A_0) = 0\,, \quad d^2\Gamma(A_0, A_0) = 0$$

т.е.

$$\Gamma(A_0, A_0) = 0\,, \quad \Gamma(dA_0, A_0) = 0$$

и

$$\Gamma(d^2 A_0, A_0) + \Gamma(dA_0, dA_0) = 0\,.$$

Внося сюда уравнения (2), (4) и (23), получаем

$$c_{00} = 0\,, \quad c_{01} = c_{02} = c_{03} = 0 \tag{28}$$

и

$$c_{AA} + f_A c_{04} + g_A c_{05} = 0\,, \quad A = 1, 2, 3\,.$$

Матрица гиперквадрики Γ принимает вид

$$(29)\quad \|c_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c_{04} & c_{05} \\ 0 & -f_1c_{04} - g_1c_{05} & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} \\ 0 & 0 & -f_2c_{04} - g_2c_{05} & 0 & c_{24} & c_{25} \\ 0 & 0 & 0 & -f_3c_{04} - g_3c_{05} & c_{34} & c_{35} \\ c_{04} & c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} \\ c_{05} & c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} \end{Vmatrix}$$

Как видно из этой матрицы, гиперквадрика Γ определяется с произволом 11 однородых параметров:

$$(30)\qquad c_{04},\, c_{05},\, c_{14},\, c_{15},\, c_{24},\, c_{25},\, c_{34},\, c_{35},\, c_{44},\, c_{45},\, c_{55}\,.$$

Количество этих параметров вызывает вопрос о существовании гиперквадрики Γ для которой выполнялось бы даже

$$\mathrm{ct}\,(\Gamma, \mathscr{V}_3) \geqq 3\,,$$

т.е. $\mathrm{d}^3\Gamma(\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_0) = 0$, или

$$\Gamma(\mathrm{d}^3\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_0) + 3\Gamma(\mathrm{d}^2\mathrm{A}_0, \mathrm{d}\mathrm{A}_0) = 0\,.$$

Прежде чем решить этот вопрос необходимо вычислить $\mathrm{d}^3\mathrm{A}_0$. Дифференцируя (23) находим

$$(31)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}^3\mathrm{A}_0 &= (.)\,\mathrm{A}_0 + (.)\,\mathrm{A}_1 + (.)\,\mathrm{A}_2 + (.)\,\mathrm{A}_3 + \\ &+ [(\mathrm{d}\omega^A + \lambda^A)\,\omega_A^4 + \mathrm{d}f_0 + f_0\omega_4^4 + g_0\omega_5^4]\,\mathrm{A}_4 + \\ &+ [(\mathrm{d}\omega^A + \lambda^A)\,\omega_A^5 + \mathrm{d}g_0 + f_0\omega_4^5 + g_0\omega_5^5]\,\mathrm{A}_5\,. \end{aligned}$$

Благодаря (10) и (24) можем коэффициент при A_4 во выражении (31) писать в виде

$$\begin{aligned} &\omega_A^4\,\mathrm{d}\omega^A + \omega_0^0\omega^A\omega_A^4 + \omega^B\omega_B^A\omega_A^4 + \\ &+ 2\sum f_L\omega^L\,\mathrm{d}\omega^L + \sum(\omega^L)^2\,(\mathrm{d}f_L + f_L\omega_4^4 + g_L\omega_5^4)\,,^{1)} \end{aligned}$$

или, учитывая (16), в виде

$$3\omega_A^4\,\mathrm{d}\omega^A + \omega^B\omega_B^A\omega_A^4 - \sum(\omega^L)^2\,(F_{LA}\omega^A - 2f_L\omega_L^L)\,.$$

Если формы ω_B^A в последнем выражении заменить по уравнениям (16′) и если

---

[1]) Здесь и далее символ $\sum$ надо читать $\sum\limits_{L=1}^{3}$.

осуществить аналогическое оформление также для другово коэффициента входящего в уравнение (31), то получаем

$$
(32)\qquad \begin{aligned}
&\mathrm{d}^3\mathrm{A}_0 = (.)\,\mathrm{A}_0 + (.)\,\mathrm{A}_1 + (.)\,\mathrm{A}_2 + (.)\,\mathrm{A}_3 + \\
&+ \left[3F_0\omega^1\omega^2\omega^3 + 3\sum f_L\omega^L(\mathrm{d}\omega^L + \omega^L\omega^L_L) - \sum F_{LL}(\omega^L)^3\right]\mathrm{A}_4 + \\
&+ \left[3G_0\omega^1\omega^2\omega^3 + 3\sum g_L\omega^L(\mathrm{d}\omega^L + \omega^L\omega^L_L) - \sum G_{LL}(\omega^L)^3\right]\mathrm{A}_5\,,
\end{aligned}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\mathrm{d}^3\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_0) &= 3\sum(f_Lc_{04} + g_Lc_{05})\,\omega^L\,\mathrm{d}\omega^L + 3(F_0c_{04} + G_0c_{05})\,\omega^1\omega^2\omega^3 + \\
&+ 3\sum(f_Lc_{04} + g_Lc_{05})\,\omega^L_L(\omega^L)^2 - \sum(F_{LL}c_{04} + G_{LL}c_{05})\,(\omega^L)^3\,.
\end{aligned}
$$

Из (23) находим

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(\mathrm{d}^2\mathrm{A}_0, \mathrm{d}\mathrm{A}_0) = \sum c_{LL}\omega^L(\mathrm{d}\omega^L + \lambda^L) + \\
&+ (f_0c_{04} + g_0c_{05})\,\omega^0_0 + (f_0c_{A4} + g_0c_{A5})\,\omega^A = \sum c_{LL}\omega^L\,\mathrm{d}\omega^L + \sum c_{LL}\omega^L\omega^A\omega^L_A + \\
&+ \left[f_0c_{04} + g_0c_{05} + \sum c_{LL}(\omega^L)^2\right]\omega^0_0 + (f_0c_{A4} + g_0c_{A5})\,\omega^A\,.
\end{aligned}
$$

Имея в виду (28) получаем

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(\mathrm{d}^2\mathrm{A}_0, \mathrm{d}\mathrm{A}_0) = \sum c_{LL}\omega^L\,\mathrm{d}\omega^L + \sum c_{LL}\omega^L_L(\omega^L)^2 + \\
&+ \sum c_{LL}\omega^L(\omega^M\omega^L_M + \omega^N\omega^L_N) + (f_0c_{A4} + g_0c_{A5})\,\omega^A\,.
\end{aligned}
$$

Внося полученные выражения для

$$\Gamma(\mathrm{d}^3\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_0) \quad \text{и} \quad \Gamma(\mathrm{d}^2\mathrm{A}_0, \mathrm{d}\mathrm{A}_0)$$

в уравнение

$$\Gamma(\mathrm{d}^3\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_0) + 3\Gamma(\mathrm{d}^2\mathrm{A}_0, \mathrm{d}\mathrm{A}_0) = 0$$

и пользуясь соотношениями (28) имеем

$$
\begin{aligned}
&3(F_0c_{04} + G_0c_{05})\,\omega^1\omega^2\omega^3 - \sum(F_{LL}c_{04} + G_{LL}c_{05})\,(\omega^L)^3 + \\
&+ 3(f_0c_{A4} + g_0c_{A5})\,\omega^A + 3\sum c_{LL}\omega^L(\omega^M\omega^L_M + \omega^N\omega^L_N) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Смотря по (10), (16) и (16′), можно последнее уравнение привести к виду

$$(33)\qquad e_{XYZ}\omega^X\omega^Y\omega^Z = 0\,,$$

где коэффициенты e_{XYZ} симметричны по любым двум индексам и

$$
(34)\qquad \begin{aligned}
e_{XXX} &= -F_{XX}c_{04} - G_{XX}c_{05} + 3(f_Xc_{X4} + g_Xc_{X5})\,, \\
e_{XXY} &= -F_{XY}c_{04} - G_{XY}c_{05} + f_Xc_{Y4} + g_Xc_{Y5}\,, \quad X \neq Y\,, \\
e_{123} &= -F_0c_{04} - G_0c_{05}\,.
\end{aligned}
$$

Совокупность направлений $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$, которые удовлетворяют условию (33), образует кубический конус выражающийся в системе координат (1′) уравнением

$$(33') \qquad \beta(\Gamma) \equiv e_{XYZ}x^X x^Y x^Z = 0\,.$$

Соответствие, сопостовляющее каждой гиперквадрике Γ конус β(Γ) не является взаимно однозначным. Из тождества $\beta(\Gamma_1) \equiv \beta(\Gamma_2)$ никак не вытекает $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$. Существуют даже такие гиперквадрики Γ, для которых имеет место

$$e_{XYZ} = 0 \quad \text{для всех наборов индексов}\,,$$

что конус β(Γ) превращает в многообразие всех направлении, т.е. в связку прямых x: $A_0 \in x \subset \tau$; для обозначения упомянутой связки будем пользоваться тем же самым символом β(Γ). Полученное резюмирует

Теорема 14. *Для гиперквадрики Γ многообразия* $\mathscr{V}_3$ *в точке* A_0 *и соответствующего ей многообразия* (33′) *данного системой* (34) *выполняется*:

$$\operatorname{ct}(\Gamma, \mathscr{V}_3) \geqq 3$$

в том и только в том случае, если β(Γ) *является связкой. Если* $\operatorname{ct}(\Gamma, \mathscr{V}_3) = 2$, *то для кривой* $\gamma \subset \mathscr{V}_3$ *условие* $\operatorname{ct}(\gamma, \mathscr{V}_3) \geqq 3$ *равносильно условию* $\operatorname{ct}(\beta(\Gamma), \gamma) \geqq 1$.

Заметим, что условие $\operatorname{ct}(\beta(\Gamma), \gamma) \geqq 1$ является символической записью факта „касательная кривой γ в точке A_0 является образующей конуса β(Γ)“.

В общем случае многообразие β(Γ) окажается связкой только тогда, если гиперквадрика Γ вырождает в пару гиперплоскостей. В самом деле, если левые части всех уравнений системы (34) привести к нулям и решить полученную систему относительно неизветных c_{04}, c_{05}, c_{14}, c_{15}, c_{24}, c_{25}, c_{34} и c_{35}, то находим (в общем случае) только тривиальное решение, что влечет

$$\Gamma \equiv c_{44}(x^4)^2 + 2c_{45}x^4x^5 + c_{55}(x^5)^2 = 0\,.$$

Главная роль гиперквадрики Γ и соответствующего ей многообразия β(Γ) заключается в том, что именно эти объекты предоставляют нам возможность найти геометрическое значение инвариантов окрестности третьего порядка многообразия $\mathscr{V}_3$, инвариантов, которые повидимомй образованы только на основе функций

$$F_{XY},\ G_{XY},\ F_0 \quad \text{и} \quad G_0\,.$$

С точки зрения дальнейшего исследования интересуют нас только те из гиперквадрик Γ для которых хотя бы один из коэффициентов c_{04} и c_{05} является различным от нуля. В обратном случае ни одна из последнее написанных функций не входит в уравнение многообразия β(Γ).

Итак, относительно гиперквадрики Г далее предполагается

$$c_{0P} \neq 0\,, \tag{35}$$

где $P = 4$ в случае $c_{04} \neq 0$ и $P = 5$ в случае $c_{04} = 0$.

8. Вырождающая гиперквадрика Г. Результаты этого последнего параграфа первой главы во второй главе не используются; итак его можно выпустить. Однако, мы решили что-то сказать также про вырождающиеся гиперквадрики Г, так как в случае далнейшей разработки геометрии многообразия $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{P}_5$ именно они оказываются полезным орудием работы. В леммах находятся общеупотребляемые аналитические соотношения. Теоремы 15 и 16 показывают другой способ введения основных понятий: главная прямая и гиперплоскость φ_A.

Лемма 1. *Пусть для вырождающейся гиперквадрики* (27) *имеет место* (35). *Тогда*

$$4 \leqq \operatorname{rang} \|c_{ij}\| \leqq 5\,.$$

Доказательство. Неравенство

$$\operatorname{rang} \|c_{ij}\| \leqq 5$$

является следствием вырождения гиперквадрики Г. Чтобы доказать второе из требуемых неравенств, напомним что система уравнений

$$c_{XX} = 0\,, \quad c_{YY} = 0\,, \quad X \neq Y$$

т.е. система

$$f_X c_{04} + g_X c_{05} = 0\,, \quad f_Y c_{04} + g_Y c_{05} = 0$$

обладает в силу (13) только тривиальным решением $c_{04} = c_{05} = 0$. Последнее противоречит требованию (35). Из этого вытекает

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{Vmatrix} \geqq 2 \tag{36}$$

и также

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c_{0P} \\ 0 & c_{11} & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & c_{22} & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & c_{33} & * \\ c_{0P} & * & * & * & * \end{Vmatrix} \geqq 4$$

что и требовалось доказать.

Будем различать два случая:

1° rang $\|c_{ij}\| = 5$ и вершина гиперквадрики Г 0-размерна,

2° rang $\|c_{ij}\| = 4$ и вершина гиперквадрики Г 1-размерна.

Полезнейшим для наших целей окажется случай 1°. Пусть 1° rang $\|c_{ij}\| = 5$. Вводим обозначение

$$k_i = \begin{vmatrix} c_{04} & c_{05} \\ c_{i4} & c_{i5} \end{vmatrix}$$

и предполагаем сначала

а) $c_{LL} = 0$. Теперь из (29) вытекает

$$k_L^2 c_{MM} c_{NN} = \det |c_{ij}| = 0$$

что, благодаря выше доказанному факту $c_{LL} = 0 \Rightarrow c_{MM}c_{NN} \neq 0$ влечет $k_L = 0$; всед соотношения (35) L-тая строка матрицы (29) окажется пропорциональной строке 0-той. В качестве координат s^i вершины

$$\mathrm{S} = s^i \mathrm{A}_i$$

гиперконуса Г можно брать алгебраические дополнения элементов c_{iL} матрицы $\|c_{ij}\|$ умноженные надлежащим коэффициентом. Прямое вычисление дает

$$\mathrm{S} = \lambda \mathrm{A}_0 - \mathrm{A}_L \tag{37}$$

где λ определяется из векторного уравнения

$$(c_{L4}, c_{L5}) = \lambda(c_{04}, c_{05})\,. \tag{37'}$$

Пусть далее

б) $c_{11}c_{22}c_{33} \neq 0$. В качестве координат s^i вершины S возмем алгебраические дополнения элементов c_{i5} (или c_{i4}) матрицы $\|c_{ij}\|$ если $P = 4$ (или $P = 5$).

Таким образом находим

$$\mathrm{S} = s^0 \mathrm{A}_0 + k_1 c_{11}^{-1} \mathrm{A}_1 + k_2 c_{22}^{-1} \mathrm{A}_2 + k_3 c_{33}^{-1} \mathrm{A}_3 + c_{05} \mathrm{A}_4 - c_{04} \mathrm{A}_5 \tag{38}$$

где

$$s^0 = c_{0P}^{-1}\left(k_P - k_1 \frac{c_{1P}}{c_{11}} - k_2 \frac{c_{2P}}{c_{22}} - k_3 \frac{c_{3P}}{c_{33}}\right). \tag{38'}$$

Теорема 15. *Пусть гиперквадрика* (27) *является гиперконусом с* О*-размерной вершиной* S. *Тогда равносильны утверждения*

а) $\mathrm{S} \in \tau$,

б) $\mathrm{S} \in \mathrm{A}_0\mathrm{A}_L$, $\mathrm{S} \neq \mathrm{A}_0$,

в) $c_{LL} = 0$, $c_{MM}c_{NN} \neq 0$

и также утверждения

а$'$) $S \notin \tau$,

б$'$) $S \notin \varphi_1$, $S \notin \varphi_2$, $S \notin \varphi_3$,

в$'$) $c_{11}c_{22}c_{33} \neq 0$.

Доказательство. Пусть сначала $c_{11}c_{22}c_{33} = 0$. Тогда из (36) следует в) и наряду с этим утверждением выполняется также а) и б) – это было показано в пункте 1°а).

Пусть теперь имеет место в$'$). Из пункта 1°б) вытекает, что здесь имеет место (38) и смотря по (35) также а$'$). При помощи уравнений (14$'$) и (38) соотношение $S \in \varphi_L$ выражается аналитически уравнением

$$f_L c_{04} + g_L c_{05} = 0\,,$$

т.е. $c_{LL} = 0$. Итак б$'$) $\Leftrightarrow$ в$'$) и теорема доказана.

Обсудим еще одно специальное положение вершины S в пространстве $\mathbf{P}_5$: $S \in \in \nu$. В этом случае имеем

$$S = \alpha^0 A_0 + \alpha^1 N_1 + \alpha^2 N_2$$

или, учитывая (27) и (38), получаем

$$\begin{aligned} s^0 &= \alpha^0 + \alpha^1(.) + \alpha^2(.) \\ k_1 c_{11}^{-1} &= \alpha^1(h_3K_{31} - h_2K_{21}) + \alpha^2 h_2 K_{21} \\ k_2 c_{22}^{-1} &= -\alpha^1 h_1 K_{12} + \alpha^2(h_1K_{12} - h_3K_{32}) \\ k_3 c_{33}^{-1} &= \alpha^1 h_1 K_{13} - \alpha^2 h_2 K_{23} \\ c_{05} &= \alpha^1 h_1 f_1 + \alpha^2 h_2 f_2 \\ -c_{04} &= \alpha^1 h_1 g_1 + \alpha^2 h_2 g_2\,. \end{aligned}$$

Внося решение

$$\alpha^1 = -\frac{c_{22}}{h_1h_3}\,; \quad \alpha^2 = \frac{c_{11}}{h_2h_3}$$

последних двух из вехной системы уравнений в остальные уравнения этой системы, получаем аналитическую запись условия $S \in \nu$:

$$\begin{aligned} & K_{21}c_{11}c_{33} + K_{31}c_{11}c_{22} = -k_1h_1 \\ (39) \qquad & K_{12}c_{22}c_{33} \qquad\qquad + K_{32}c_{11}c_{22} = -k_2h_2 \\ & K_{13}c_{22}c_{33} + K_{23}c_{11}c_{33} \qquad\qquad = -k_3h_3\,. \end{aligned}$$

Лемма 2. *Пусть гиперквадрика* (27) *является гиперконусом с О-размерной вершиной* S. *Тогда* $S \in \nu$ *в том и только в том случае, если выполняется* (39).

Пусть далее выполняется

2° rang $\|c_{ij}\| = 4$. Имея в виду соотношение (35) вытекает из предпосылки $c_{11}c_{22}c_{33} = 0$. Пусть тогда $c_{LL} = 0$; отсюда вытекает $c_{MM}c_{NN} \neq 0$, что вместе с

$$0 = \det |c_{ij}| = k_L^2 c_{MM} c_{NN}$$

влечет $k_L = 0$. Не теряя общности можем систему

$$c_{LL} = 0\,, \quad k_L = 0$$

привести к виду

$$\begin{aligned} c_{04} &= g_L\,, & c_{L4} &= \lambda g_L \\ c_{05} &= -f_L\,, & c_{L5} &= -\lambda f_L\,. \end{aligned} \tag{40}$$

При условиях (40) ранг матрицы $\|c_{ij}\|$ равняется рангу матрицы

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{04} & c_{05} \\ 0 & c_{MM} & 0 & c_{M4} & c_{M5} \\ 0 & 0 & c_{NN} & c_{N4} & c_{N5} \\ c_{04} & c_{M4} & c_{N4} & c_{44} & c_{45} \\ c_{05} & c_{M5} & c_{N5} & c_{45} & c_{55} \end{Vmatrix}.$$

Согласно предположению ранг последней матрицы 4 что равносильно условию

$$\begin{aligned} &h_N(f_L c_{N4} + g_L c_{N5})^2 - h_M(f_L c_{M4} + g_L c_{M5})^2 + \\ &\quad + h_M h_N(f_L^2 c_{44} + 2 f_L g_L c_{45} + g_L^2 c_{55}) = 0\,. \end{aligned} \tag{40'}$$

Если будет rang $\|c_{ij}\| = 4$, то имеет место система (40), (40′) и наоборот — вплоть до множителя.

В качестве точек определяющих прямую являющуюся вершиной гиперконуса Г можно взять точки

$$\mathrm{S} = \lambda \mathrm{A}_0 - \mathrm{A}_L \tag{41}$$

и

$$\mathrm{S}' = s^0 \mathrm{A}_0 + s^M \mathrm{A}_M + s^N \mathrm{A}_N + s^4 \mathrm{A}_4 + s^5 \mathrm{A}_5\,.$$

Вычисление коэффициентов является механической задачей; имеем

$$\begin{aligned} s^M &= -h_M(f_L c_{M4} + g_L c_{M5})\,, & s^4 &= f_L h_M h_N \\ s^N &= h_N(f_L c_{N4} + g_L c_{N5})\,, & s^5 &= g_L h_M h_N \\ s^0 &= -c_{0P}^{-1}(s^M c_{MP} + s^N c_{NP} + h_M h_N k_P)\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Результаты резюмирует

Теорема 16. *Пусть гиперквадрика* (27) *является гиперконусом с* 1*-размерной вершиной* s. *Тогда, с точностью до множителя справедливо* (40) *и* (40'); *прямая* s *пересекает пространство* τ *в точке главной прямой* A_0A_L *отлишной от точки* A_0. *Обозначив эту точку буквой* S *и точку пересечения прямой* s *с гиперплоскостью* $A_0A_MA_NA_4A_5$ *буквой* S' *то имеет место* (41) *и* (42).

ГЛАВА ВТОРАЯ

МНОГООБРАЗИЕ $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{P}_5$

9. Квадратическая структура. В следующей главе мы занимаемся специальным классом многообразий $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{P}_5$ а именно теми, для которых рядом с предположениями первой главы имеет место следующее

Ограничение 4. *Многообразие* $\mathscr{V}_3$ *является подмногообразием постоянной гиперквадрики* $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}_5$ *со сигнатурой* (3; 3) *или* (5; 1).

Значение ограничения ясно: многообразие $\mathscr{V}_3$ является теперь либо образом комплекса прямых пространства $\mathbf{P}_3$ (при перенесении Плюккера), либо образом гиперповерхности четырехмерного конформного пространства $\mathbf{C}_4$ (при перенесении Дарбу).

Чтобы дать ограничению аналитический вид, вводим понятие $\mathbf{Q}$-допустимого репера в $\mathbf{P}_5$. Пусть в пространстве $\mathbf{P}_5$ дана постоянная гиперквадрика $\mathbf{Q}$: : $(X, X) = 0$ со сигнатурой (3; 3) соответственно (5; 1). Аналитический репер **A** будем называть $\mathbf{Q}$-допустимым репером если точки A_i удовлетворяют системе 21 уравнений

$$(43) \qquad (A_i, A_j) = 0 \quad \text{для всех пар } i, j \text{ кроме}$$

$$(A_0, A_5) = (A_1, A_1) = e(A_2, A_2) = (A_3, A_3) = e(A_4, A_4) = c \neq 0\,,$$

где $e = -1$ соответственно $e = +1$.

Гиперквадрика $\mathbf{Q}$ в системе координат (1) выражается уравнением

$$\mathbf{Q} : 2x^0x^5 + (x^1)^2 + e(x^2)^2 + (x^3)^2 + e(x^4)^2 = 0\,.$$

Пусть теперь **A** является подвижным $\mathbf{Q}$-допустимым репером и функция c из (43) постоянной. Дифференцируя уравнения (43) и учитывая (2) находим

$$\omega_i^k(A_k, A_j) + \omega_j^k(A_i, A_k) = 0$$

для всех пар индексов i, j. Внося сюда снова соотношения (43) получаем систему

$$
\begin{aligned}
&\omega_0^5 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_4^4 = \omega_5^0 = 0\,, \\
&\omega_0^1 + \omega_1^5 = 0\,, \quad e\omega_0^2 + \omega_2^5 = 0\,, \quad \omega_0^3 + \omega_3^5 = 0\,, \\
&e\omega_4^1 + \omega_1^4 = 0\,, \quad e\omega_4^3 + \omega_3^4 = 0\,, \quad \omega_4^2 + \omega_2^4 = 0\,, \\
&e\omega_3^2 + \omega_2^3 = 0\,, \quad e\omega_2^1 + \omega_1^2 = 0\,, \quad \omega_3^1 + \omega_1^3 = 0\,, \\
&\omega_1^0 + \omega_5^1 = 0\,, \quad e\omega_2^0 + \omega_5^2 = 0\,, \quad \omega_3^0 + \omega_5^3 = 0\,, \\
&e\omega_0^4 + \omega_4^5 = 0\,, \quad e\omega_4^0 + \omega_5^4 = 0\,, \quad \omega_0^0 + \omega_5^5 = 0\,.
\end{aligned} \tag{44}
$$

Если наоборот, система (44) выполняется для репера **A** тождественно во всей области Ω и система (43) хотя бы в одной точке, то повидимому репер **A** тождественно удовлетворяет системе (43) во всей области Ω. Итак справедлива

Теорема 17. *Подвижный репер* **A** *многообразия* $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{P}_5$ *является* **Q**-*допустимым во всей области* Ω *в том и только том случае, если сразу выполняется* (44) *во всей области* Ω *и* (43) *хотя бы в одной точке области* Ω.

Система (44) окажется замкнутой относительно внешнего дифференцирования. Если эту систему добавить к системе проективной структуры (3), то полученную расширенную систему удобно назвать системой уравнений **Q**-квадратической структуры.

Многообразие $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{P}_5$ *является многообразием* $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q}$ *в том и только том случае если для него существует сопровождающий* **Q**-*допустимый репер.*

10. Q-допустимый 2-репер. Ради простоты будем говорить 0**Q**-репер, 1**Q**-репер, ... вместо **Q**-допустимый 0-репер **Q**-допустимый 1-репер, ... Особенность многообразия $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q}$ сводит 0-репер к 0**Q**-реперу; его геометрический вид определяется условиями (43). Точки A_0 и A_5 помещены на **Q** и точки A_1, A_2, A_3 и A_4 помимо **Q** так, что любая пара A_i, A_j кроме A_0, A_5 полярно сопряжена относительно **Q**. Если более того являются в силе ограничения 1, 2 и 3, то 0**Q**-репер окажется 2**Q**-репером. Дадим аналитическое следствие этого факта.

Из сравнения (5), (9) и (44) заключается

$$\omega_4^5 = 0 \tag{45}$$

и также

$$
\begin{aligned}
-e\omega_4^1 &= \omega_1^4 = f_1\omega^1\,, & -\ \omega_1^5 &= \omega^1\,, & g_1 &= -1\,, \\
-\ \omega_4^2 &= \omega_2^4 = f_2\omega^2\,, & -e\omega_2^5 &= \omega^2\,, & g_2 &= -e\,, \\
-e\omega_4^3 &= \omega_3^4 = f_3\omega^3\,, & -\ \omega_3^5 &= \omega^3\,, & g_3 &= -1\,.
\end{aligned} \tag{46}
$$

Пользуясь последними уравнениями можем упростить обозначение (11):

$$h_1 = ef_3 - f_2\,, \quad h_2 = f_1 - f_3\,, \quad h_3 = f_2 - ef_1 \tag{47}$$

откуда следует

$$h_1 + eh_2 + h_3 = 0\,. \tag{48}$$

Переходя в (44) к вторичным параметрам можем уравнения (15) и (15′) привести к виду

$$\begin{aligned} f_1\pi_0^0 + \delta f_1 - \ \pi_5^4 &= 0\,,\\ f_2\pi_0^0 + \delta f_2 - e\pi_5^4 &= 0\,,\\ f_3\pi_0^0 + \delta f_3 - \ \pi_5^4 &= 0\,, \end{aligned} \tag{49}$$

и

$$\frac{\delta h_1}{h_1} = \frac{\delta h_2}{h_2} = \frac{\delta h_3}{h_3} = -2\pi_0^0\,, \tag{50}$$

откуда получается

$$\delta\left(\frac{h_A}{h_B}\right) = 0\,.$$

Тем самым для **2Q**-репера существует 6 инвариантов:

$$H_2^1,\, H_3^2,\, H_1^3,\, H_1^2,\, H_3^1 \quad \text{и} \quad H_2^3$$

где мы обозначили

$$H_B^A = \frac{h_A}{h_B}. \tag{51}$$

Нетрудно проверить, что, благодаря (48) все эти инварианты попарно зависимы. Чтобы сохранить симметрию, вводим здесь в качестве базисного инварианта функцию

$$H = \tfrac{3}{2} + eH_2^1 + H_1^3 + eH_3^2 \tag{52}$$

т.е.

$$-H = \tfrac{3}{2} + eH_1^2 + H_3^1 + eH_2^3\,,$$

так как непосредственной подстановкой убеждаемся, что из (51) и (47) следует

$$\begin{aligned} &(eH_1^2 + H_1^3) + e(H_2^1 + H_2^3) + (H_3^1 + eH_3^2) = \\ &= -\frac{h_1}{h_1} - e\frac{eh_2}{h_2} - \frac{h_3}{h_3} = -3\,. \end{aligned}$$

При этом обозначении инварианты eH_2^1, H_1^3, eH_3^2 или eH_1^2, H_3^1, eH_2^3 выступают как корни кубического уравнения

$$x^3 - x^2(H - \tfrac{3}{2}) - x(H + \tfrac{3}{2}) - 1 = 0 \tag{53}$$

или

$$x^3 - x^2(H + \tfrac{3}{2}) - x(H - \tfrac{3}{2}) - 1 = 0\,.$$

Наряду с уравнениями (49) относительно вторичных параметров выполняется система

$$\begin{aligned} &\pi^i_j = 0 \quad \text{для всех пар } i, j \text{ кроме} \\ (54) \qquad &\pi^0_1 + \pi^1_5 = 0\,, \quad e\pi^0_2 + \pi^2_5 = 0\,, \quad \pi^0_3 + \pi^3_5 = 0\,, \\ &\pi^0_0 + \pi^5_5 = 0\,, \quad e\pi^0_4 + \pi^4_5 = 0\,, \end{aligned}$$

являющаяся следствием системы (44) и соотношений (5), (15), (45) и (46).

Система (49) вместе со ситемой (54) образует полную систему вторичных уравнений второго порядка многообразия $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q}$.

Одним лишь инвариантом вытекающим из этих уравнений является инвариант H. Его геометрическое значение выясним в теореме 19.

Теорема 18. *Для* 2**Q**-*репера прямая* A_0A_4 *является инвариантной. Прямая* A_0A_4 *и смежная с ней по главном направлении* A_0A_L *пересекаются в точке*

$$(55) \qquad W_L = -eg_Lf_LA_0 + A_4\,.$$

Если прямая A_0A_4 *пересекается со смежной с ней по направлению* w, *то* w *является главным направлением многообразия* $\mathscr{V}_3$ *в точке* A_0.

Доказательство. Прямая A_0A_4 полярно сопряженная с пространством τ относительно гиперквадрики **Q** и принадлежит касательной гиперплоскости φ_0 гиперквадрики **Q** в A_0; отсюда следует ее инвариантность.

Пусть далее

$$W = \alpha A_0 + A_4$$

точка пересечения прямой A_0A_4 со смежной с ней по направлению $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$. Тогда, учитывая (2), (45), (46) и (44), имеем

$$dW = (.)\,A_0 + (\alpha - ef_1)\,\omega^1A_1 + (\alpha - f_2)\,\omega^2A_2 + (\alpha - ef_3)\,\omega^3A_3\,.$$

Желанное условие $dW \in A_0A_4$ равносильно системе

$$(\alpha - ef_1)\,\omega^1 = 0\,, \quad (\alpha - f_2)\,\omega^2 = 0\,, \quad (\alpha - ef_3)\,\omega^3 = 0\,.$$

Тривиальное решение $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3 = 0 : 0 : 0$ не имеет геометрического значения итак можно предполагать например $\omega^1 \neq 0$, откуда $\alpha = ef_1$ и, вслед обозначения (47) последние две уравнения системы принимают вид $h_3\omega^2 = 0$ и $h_2\omega^3 = 0$; учитывая (13) получаем $\omega^2 = 0$, $\omega^3 = 0$. Аналогично обстоит дело в случае

$\omega^2 \neq 0$ или $\omega^3 \neq 0$. Чтобы полученные решения

$$\omega^1 \neq 0 = \omega^2 = \omega^3\,, \quad \alpha = ef_1\,,$$
$$\omega^2 \neq 0 = \omega^1 = \omega^3\,, \quad \alpha = \ f_2\,,$$
$$\omega^3 \neq 0 = \omega^1 = \omega^2\,, \quad \alpha = ef_3$$

писать в сжатой форме, пользуемся обозначениями (46):

$$\omega^L \neq 0 = \omega^M = \omega^N\,, \quad \alpha = -ef_L g_L\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 19. *Пусть* $\varphi_0 \equiv x^5 = 0$ *касательная гиперплоскость гиперквадрики* $\mathbf{Q}$ *в точке* A_0. *Тогда многообразие* $\psi_0 \equiv \tau \cap \mathbf{Q}$ *является конусом пространства* τ *и, наряду со соотношениями* $\varphi_0 \in \Phi$, $\psi_0 \in \Psi$, $\pi : \varphi_0 \to \psi_0$ *имеют место также*

$$(56)\qquad \begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_L, \varphi_M, \varphi_N) = (\psi_0, \psi_L, \psi_M, \psi_N) = (A_0, W_L, W_M, W_N) = eg_L H_N^M\,, \\ (\varphi_0, \varphi_L, \varphi_N, \varphi_M) = (\psi_0, \psi_L, \psi_N, \psi_M) = (A_0, W_L, W_N, W_M) = eg_L H_M^N\,. \end{aligned}$$

Доказательство. Пользуясь в §§ 2 и 3 введенной символикой можем писать $\varphi_0 \equiv \varphi(0, 1)$ и $\psi_0 \equiv \psi(0, 1)$, откуда вытекают первые три утверждения теоремы. Непосредственной подстановкой (14), (14′) и (55) в известную формулу для вычисления двойного отношения, проверяем с учетом (46) и (52) истинность уравнений (56), т.ч.д.

Последняя теорема в удовлетворительной степени обсуждает геометрию окрестности второго порядка многообразия $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{P}_5$. Относительно самого 2**Q**-репера полезное утверждение гласит

Теорема 20. *Для* 2**Q**-*репера координатная система плоскости* $A_1A_2A_3$ *вполне определена.*

Доказательство. Так как координатные точки A_1, A_2 и A_3 определяются геометрически однозначно, то необходимо дать геометрическое построение только единичной точки $\mathbf{I} = A_1 + A_2 + A_3$, или любой другой, с ней равносильной. В качестве желанной точки, благодаря (13) и инвариантности отношения $\sqrt{h_1} : \sqrt{h_2} : \sqrt{h_3}$ служит любая из асимптотических точек $C_1, \ldots, C_4$ кторые определяются уравнениями (12).

11. 3Q-репер и его инварианты. Для 3-репера вместе с неподвижностю точки A_0 остаются неподвижным итакже точки A_1, A_2 и A_3. Для 3**Q**-репера сверх того точка A_4 принадлежит прямой A_0W_1 (теорема 18) и, вслед (43), точка A_5 вполне определяется точкой A_4. Произвол репера **A** сводится к произволу единичной точки (она уже также частично определена) и точки A_4 на прямой A_0A_4.

Стройку геометрии 3**Q**-репера начинаем с аналитической подготовки; упростим уравнения §§ 4—7 посредством соотношений (44). Внося (44) и (46) в последное из уравнений (16) и учитывая $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$, находим

$$G_0 = G_{MN} = G_{NM} = 0 \tag{57}$$

для всех пар $M \neq N$ индексов 1, 2, 3.

На основании (57), с учетом (46), соотношения (19) и (25) принимают вид

$$\begin{aligned} g_L F_{NL} &= E_L h_L h_M\,, \qquad g_L F_{ML} = E_L h_L h_N\,,\\ g_L F_0 &= D_L h_L \sqrt{(h_M)}\sqrt{(h_N)}\,,\\ g_N K_{LM} &= -eE_M h_M\,, \qquad g_M K_{LN} = -eE_N h_N\,, \end{aligned} \tag{58}$$

и уравнения (16) или (16′), будучи расписаны, приобретают вид

$$\begin{aligned} f_1\omega_0^0 + df_1 - \omega_5^4 &= h_2h_3(-F_1\omega^1 + eE_2\omega^2 + E_3\omega^3)\,,\\ f_2\omega_0^0 + df_2 - e\omega_5^4 &= h_1h_3(\ \ E_1\omega^1 + \ F_2\omega^2 + E_3\omega^3)\,,\\ f_3\omega_0^0 + df_3 - \omega_5^4 &= h_1h_2(\ \ E_1\omega^1 + eE_2\omega^2 - F_3\omega^3)\,,\\ \omega_3^2 = -e\omega_2^3 &= \sqrt{(h_2)}\sqrt{(h_3)}\,D_1\omega^1 + h_3E_3\omega^2 + eh_2E_2\omega^3\,,\\ \omega_1^3 = -\ \omega_3^1 &= h_3E_3\omega^1 + e\sqrt{(h_1)}\sqrt{(h_3)}\,D_2\omega^2 + h_1E_1\omega^3\,,\\ e\omega_2^1 = -\ \omega_1^2 &= eh_2E_2\omega^1 + h_1E_1\omega^2 + \sqrt{(h_1)}\sqrt{(h_2)}\,D_3\omega^3\,, \end{aligned} \tag{59}$$

где мы обозначаем

$$h_M h_N F_L = F_{LL}\,. \tag{59′}$$

Смотря по (47) вычислим из уравнений (59) выражения $\mathrm{d}h_L/h_L$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h_1}{h_1} + \omega_0^0 &= (eh_2 - h_3)\,E_1\omega^1 + (h_2E_2 + h_3F_2)\,\omega^2 - (eh_2F_3 + h_3E_3)\,\omega^3\,,\\ \frac{\mathrm{d}h_2}{h_2} + \omega_0^0 &= -(h_3F_1 + h_1E_1)\,\omega^1 + e(h_3 - h_1)\,E_2\omega^2 + (h_3E_3 + h_1F_3)\,\omega^3\,,\\ \frac{\mathrm{d}h_3}{h_3} + \omega_0^0 &= (h_1E_1 + eh_2F_1)\,\omega^1 - (h_1F_2 + h_2E_2)\,\omega^2 + (h_1 - eh_2)\,E_3\omega^3\,. \end{aligned} \tag{60}$$

Тем самым аналитическая подготовка окончена.

Теорема 21. *Полная система инвариантов третьего порядка многообразия* $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{P}_5$ *состоится из 7 инвариантов*:

$$D_0,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ F_1,\ F_2,\ F_3 \tag{61}$$

которые определяются уравнениями (59) *и*

$$D_0 = \frac{F_0}{\sqrt[3]{(h_1^2 h_2^2 h_3^2)}}$$

и (58).

Доказательство. Продифференцировав внешним образом первое из уравнений (59) и пользуясь соотношениями (3), (44), (47) и (59) получаем уравнение

$$\begin{gathered}\omega^1 \wedge [2h_2h_3F_1\omega_0^0 + \mathrm{d}(h_2h_3)\,F_1 + h_2h_3\,\mathrm{d}F_1] - \\ - e\omega^2 \wedge [2h_2h_3E_2\omega_0^0 + \mathrm{d}(h_2h_3)\,E_2 + h_2h_3\,\mathrm{d}E_2 - h_3\omega_2^0] - \\ - \omega^3 \wedge [2h_2h_3E_3\omega_0^0 + \mathrm{d}(h_2h_3)\,E_3 + h_2h_3\,\mathrm{d}E_3 + h_2\omega_3^0] + \\ + (.)\,\omega^1 \wedge \omega^2 + (.)\,\omega^2 \wedge \omega^3 + (.)\,\omega^3 \wedge \omega^1 = 0\,.\end{gathered}$$

Раскрывая это уравнение по лемме Картана и переходя к вторичным параметрам, с учетом из (51) вытекающего уравнения

$$2h_2h_3\omega_0^0 + \delta(h_2h_3) = 0$$

находим

$$\delta F_1 = 0\,, \quad \pi_2^0 - h_2\delta E_2 = 0\,, \quad \pi_3^0 + h_3\delta E_3 = 0\,.$$

Подобно из второго и третьего уравнения системы (59) имеем

$$\begin{gathered}\delta F_2 = 0\,, \quad \pi_3^0 - h_3\delta E_3 = 0\,, \quad \pi_1^0 + h_1\delta E_1 = 0\,, \\ \delta F_3 = 0\,, \quad \pi_1^0 - h_1\delta E_1 = 0\,, \quad \pi_2^0 + h_2\delta E_2 = 0\end{gathered}$$

и в результате

$$\delta E_1 = \delta E_2 = \delta E_3 = \delta F_1 = \delta F_2 = \delta F_3 = 0 \tag{62}$$

и

$$\pi_1^0 = \pi_2^0 = \pi_3^0 = 0\,.$$

Аналогичным образом из последних трех уравнений системы (59), кторие уже доказанного, обнаруживаем

$$\delta D_1 = \delta D_2 = \delta D_3 = 0\,. \tag{63}$$

Заметим, что из второго уравнения системы (58) следует, что инварианты D_1, D_2, D_3 зависимы. В качестве инварианта симметричного относительно инвариантов D_A можно брать например функцию D_0. Несложно проверить $\delta D_0 = 0$.

Независимость инвариантов (61) вытекает из их определения и полнота из системы (59), которая вместе с (58) характеризирует окресность третьего порядка. Теорема доказана.

Более того, из сравнения (62) и (54) вытекает

Лемма 3. *Для 3*$\mathbf{Q}$*-репера все вторичные параметры* π^i_j *нулевые кроме четырех, для которых имеет место*

$$\pi^0_0 + \pi^5_5 = 0\,, \quad \pi^4_5 + e\pi^0_4 = 0\,.$$

Отметим, что произвол вторичных параметров π^0_0 и π^0_4 является следствием произвола функций f_1, f_2, f_3.

12. Канонический Q-репер.

Чтобы привести все вторичные параметры к нулю и дойти до канонического $\mathbf{Q}$-репера многообразия $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q}$, откажемся от произвола выборки конуса

$$\psi(0, 1) \equiv f_1(x^1)^2 + f_2(x^2)^2 + f_3(x^3)^2 = 0\,,$$

который вместе с конусом

$$\psi(1, 0) \equiv -(x^1)^2 - e(x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$$

образует пучок Ψ из §-а 2. Сверх того фиксируем конус $\psi(0,1)$ даже аналитически, т.е. нормируем его уравнение.

Конечно здесь напрашивется количество возможностей, ну, к сожалению такой, которая выступала бы à priori мы не видим.[2]) Именно по этой причине мы не спешили из этим шагом канонизации.

3$\mathbf{Q}$-*репер* $\mathbf{A}$ *будем называть каноническим* $\mathbf{Q}$-*репером* (*многообразия* $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q}$) *если для него выполняются уравнения*

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1 \quad \text{и} \quad f_1 + f_2 + f_3 = 0\,. \tag{64}$$

Первое из последних уравнений служит нормировкой, второе выделяет в качестве базисного конуса $\psi(0,1)$ пучка Ψ конус проходящий точкой $\mathrm{J} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3$, геометрическая определенность которой вытекает из теоремы 20. Отметим что точки J, C_1, C_2, C_3 и C_4 попарно различны; см. (12).

Теорема 22. *Для канонического репера* $\mathbf{A}$ *многообразия* $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q}$ *имеют место уравнения*

$$\pi^i_j = 0 \quad \text{для всех пар индексов} \quad i, j = 0, \ldots, 5\,,$$

$$\delta f_1 = \delta f_2 = \delta f_3 = 0 \quad \text{и} \quad \delta h_1 = \delta h_2 = \delta h_3 = 0\,.$$

---

[2]) Выбирая ту или другую из возможностей нам всетаки не удается избавиться от чувства искусственности этого шага.

Доказательство. Переходя к вторичным параметрам, первые три из уравнений (59) принимают вид

$$f_1\pi_0^0 + \delta f_1 - \pi_5^4 = 0\,, \quad f_2\pi_0^0 + \delta f_2 - e\pi_5^4 = 0\,, \quad f_3\pi_0^0 + \delta f_3 - \pi_5^4 = 0\,.$$

Наглядной линейной комбинацией этих уравнений, используя (64) и (65) получаем

$$\pi_5^4 = 0\,, \quad \pi_0^0 = 0$$

и потом

$$\delta f_A = 0 \quad \text{для} \quad A = 1, 2 \text{ и } 3\,.$$

Сравнивая $\pi_5^4 = \pi_0^0 = 0$ из утверждением леммы 3 находим

$$\pi_j^i = 0\,.$$

Соотношения (47) влекут окончательно

$$\delta h_A = 0 \quad \text{для} \quad A = 1, 2 \text{ и } 3\,.$$

Теорема доказана.

Новые инварианты f_A и h_A принадлежат еще окресности второго порядка, так как их можно, смотря по (47), (48), (51) и (64) писать как функции от инвариантов H_B^A.

Итак нам удалось построить для многообразия $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q}$ канонический симметричный репер **A**. Надо еще выяснить геометрическое значение инвариантов (61). Вместо инварианта D_0 лучше пользоваться функцией F_0, которая вслед (64) также является инвариантной.

13. Геометрическое значение инвариантов 3Q-репера.

Теорема 23. *Инвариантное* 3-*мерное пространство* $A_1A_2A_3A_4$ *пересекает плоскость* ν *в точке*

$$\text{(65)} \qquad N_0 = E_1A_1 + E_2A_2 + E_3A_3 - \frac{e}{2}A_4\,.$$

Доказательство. В § 6 мы построили инвариантную плоскость $\nu \equiv \equiv A_0N_1N_3$, где точки N_1 и N_3 даются уравнениями (26). Если в последние уравнения вносят (58), то имеет место

$$\begin{aligned} N_1 &= E_1(h_3 - eh_2)\,A_1 - eE_2h_2A_2 + E_3h_3A_3 + f_1A_4 - A_5\,,\\ N_3 &= -E_1h_1A_1 + eE_2h_2A_2 + E_3(eh_2 - h_1)\,A_3 + f_3A_4 - A_5\,. \end{aligned}$$

Наглядно, что для точки

$$N_0 = \alpha A_0 + \beta N_1 + \gamma N_3$$

выполняется $N_0 \in A_1A_2A_3A_4$ в том и только в том случае если $\alpha = 0$ и $\beta + \gamma = 0$. Полагая здесь $\beta = (2eh_2)^{-1} = -\gamma$ обнаруживаем (65) ч.т.д.

Теорема 23 показывает геометрическое значение инвариантов E_1, E_2 и E_3. Для определения геометрического значения инвариантов $F_0, \ldots, F_3$, достаточно найти теперь значение отношений $E_A : F_B$ или $E_A : F_0$.

Теорема 24. *Пусть прямая* A_4A_5 *полярно сопряжена с плоскостью* $A_1A_2A_3$ *относительно гиперквадрики* (27). *Тогда присоединенный кубический конус* $\beta(\Gamma)$ *приобратает вид*

$$e_{XYZ}x^Xx^Yx^Z = 0\,,$$

где

$$(66)\qquad \begin{aligned} e_{111} &= -F_1h_2h_3\,, & e_{122} &= E_1h_1h_3\,, & e_{133} &= E_1h_1h_2\,, \\ e_{222} &= -F_2h_1h_3\,, & e_{211} &= eE_2h_2h_3\,, & e_{233} &= eE_2h_2h_1\,, \\ e_{333} &= -F_3h_1h_2\,, \quad e_{311} = E_3h_3h_2\,, & e_{322} &= E_3h_3h_1\,, & e_{123} &= -F_0\,. \end{aligned}$$

Доказательство. Для гиперквадрики Γ из (27) по предположению теоремы будет

$$c_{X4} = 0 \quad \text{и} \quad c_{X5} = 0 \quad \text{для} \quad X = 1, 2 \text{ и } 3\,.$$

Внося эти уравнения вместе со соотношениями (57) и (58) в уравнения (34), находим (66) ч.т.д.

Итак, вопрос о симметрическом репере многообразия $\mathscr{V}_3 \subset \mathbf{Q}$ и геометрическом значении 7 инвариантов окресности третьего порядка решен. Остался лишь очень специальный случай и именно выяснить геометрическое значение инвариантов $F_0, \ldots, F_3$ для многообразия для которого $E_1 = E_2 = E_3 = 0$. В последнем случае теорема 24 определяет лишь отношения инвариантов $F_0, \ldots, F_3$ а не их значения.

Литература

[1] *Кованцов Н. И.:* Теория комплексов. Издательство киевского университета 1963.

[2] *Щербаков Р. Н., Бочило Г. П.:* К проективно-дифференциальной геометрии комплекса прямых. Труды томсково государственного университета 1965.

Адрес автора, Bratislava: Šmeralova 2/b, ČSSR (Prírodovedecká fakulta UK).