Helmut Wegmann

Die Hausdorffsche Dimension von Mengen reeller Zahlen, die durch Zifferneigenschaften einer Cantorentwicklung charakterisiert sind

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 4, 622–632

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100861

Czechoslovak Mathematical Journal, 18 (93) 1968, Praha

DIE HAUSDORFFSCHE DIMENSION VON MENGEN REELLER ZAHLEN, DIE DURCH ZIFFERNEIGENSCHAFTEN EINER CANTORENTWICKLUNG CHARAKTERISIERT SIND

HELMUT WEGMANN, Stuttgart

(Eingegangen am 18. April 1967)

1. In zwei Arbeiten ([4] und [5]) hat T. ŠALÁT die Hausdorffsche Dimension von gewissen Mengen reeller Zahlen berechnet, deren Elemente vorgegebene Ziffern-eigenschaften bezüglich einer Cantorentwicklung besitzen. Er benutzte dabei im wesentlichen Methoden von H. G. EGGLESTON und B. VOLKMANN. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß unter Verwendung einer Methode von P. BILLINGSLEY [2] zusammen mit einem Satz des Verfassers [6] einige der Ergebnisse von T. Šalát verschärft, verallgemeinert und dabei die Beweise vereinfacht werden können.

Sei $q_1, q_2, \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $q_i > 1$ für alle $i = 1, 2, \ldots$ Dann besitzt jede reelle Zahl x aus dem halboffenen Einheitsintervall $E = [0, 1)$ genau eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i(x)}{q_1 q_2 \ldots q_i}, \tag{1}$$

wobei die „Ziffern" $e_i(x)$ ganze Zahlen mit $0 \leqq e_i(x) < q_i$ für $i = 1, 2, \ldots$ sind, und $e_i(x)$ unendlich oft von $q_i - 1$ verschieden ist[1]).

Wir wählen eine feste Folge (q_i) mit gewissen Eigenschaften und berechnen unter anderem die Hausdorff-Dimensionen der Mengen der $x \in E$, für die

a) bei einer festen Folge (a_i) natürlicher Zahlen

$$e_i(x) < a_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots$$

gilt,

b) die Folge der Ziffern beschränkt ist,

c) bei einer festen Menge R nichtnegativer ganzer Zahlen

$$e_i(x) \notin R \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots$$

gilt,

[1]) Vgl. O. Perron [3], S. 113.

d) bei einer endlichen Menge K von Ziffern jedes Element von K mit vorgegebener Häufigkeit in der Entwicklung von x auftritt.

2. Wir bezeichnen im folgenden die Menge der natürlichen Zahlen mit N, die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen mit N_0 und das halboffene Einheitsintervall $[0, 1)$ mit E.

Es sollen nun die in der Einleitung erwähnten Sätze von P. Billingsley in der hier benötigten Form angegeben werden.

Sei $\mathfrak{B}$ die Algebra der Borelmengen von E, λ das Lebesgue-Maß und (e_i) ein stochastischer Prozess mit höchstens abzählbarem Zustandsraum auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(E, \mathfrak{B}, \lambda)$. Dann wird nach P. Billingsley [1] durch den Prozess (e_i) ein Dimensionsbegriff $\dim_{(e_i)}$ auf E definiert.

Wir bezeichnen für $n \in N$ und $x \in E$ mit $I_n(x)$ [2]) die Menge der $y \in E$ mit

$$e_i(y) = e_i(x) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

und setzen über den Prozess (e_i) voraus, daß

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n(x)) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in E \tag{2}$$

gilt. Dann erlauben die folgenden Sätze von P. Billingsley die Berechnung der Dimension gewisser Teilmengen von E.

Satz 1[3]). *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E, \mathfrak{B})$, $0 \leqq \delta \leqq 1$ und*

$$M \subseteq \left\{ x \in E : \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log \lambda(I_n(x))} \leqq \delta \right\}.$$

Dann ist

$$\dim_{(e_i)} M \leqq \delta\,.$$

Satz 2. *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E, \mathfrak{B})$, $0 \leqq \delta \leqq 1$ und M eine Teilmenge von E mit:*

(a) *Die Menge M besitzt positives äußeres μ-Maß*

(b) $$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log \lambda(I_n(x))} \geqq \delta \quad \textit{für alle} \quad x \in M\,.$$

Dann ist

$$\dim_{(e_i)} M \geqq \delta\,.$$

---

[2]) Diese Menge nennen wir im folgenden den „n-Zylinder von x".

[3]) Satz 1 und Satz 2 sind Spezialisierungen von Theorem 1 und 2 von P. Billingsley [2].

Einen Zusammenhang zwischen dem Billingsleyschen und dem Hausdorffschen Dimensionsbegriff gibt

Satz 3. ([6]). *Sei* (e_i) *ein stochastischer Prozess mit höchstens abzählbarem Zustandsraum auf* $(E, \mathfrak{B}, \lambda)$, *der folgende Voraussetzungen erfüllt:*

(a) *Der Prozess* (e_i) *befriedigt* (2).

(b) *Die Zylinder* $I_n(x)$ *sind Intervalle für alle* $x \in E$ *und* $n \in N$.

(c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \lambda(I_n(x))}{\log \lambda(I_{n+1}(x))} = 1 \quad \textit{für alle} \quad x \in E\,.$$

Dann ist für jede Teilmenge M von E

$$\dim_{(e_i)} M = \dim M\,,$$

wobei dim M *die Hausdorff-Dimension von* M *ist.*

Die im folgenden angewendete Methode besteht nun darin, bei einer gegebenen Teilmenge M von E einen Prozess (e_i) im Rahmen der Voraussetzungen von Satz 3 und ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ so zu wählen, daß die Sätze 1 und 2 zur Abschätzung der Dimension von M geeignet sind.

3. Sei (q_i) eine Folge natürlicher Zahlen mit $q_i > 1$ für $i = 1, 2, \dots$, und sei der Prozess (e_i) durch die zu (q_i) gehörige Cantorentwicklung (1) definiert. Dann ist (e_i) ein unabhängiger Prozess mit Zustandsraum N_0. Die zu diesem Prozess gehörigen n-Zylinder sind Intervalle, nämlich gerade die Intervalle n-ter Stufe der Cantorentwicklung[4]). Außerdem gilt für alle $x \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n(x)) = \lim_{n\to\infty} (q_1 q_2 \cdots q_n)^{-1} = 0\,.$$

Die Voraussetzung (c) von Satz 3 bedeutet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log q_1 q_2 \cdots q_n}{\log q_1 q_2 \cdots q_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\log q_{n+1}}{\log q_1 q_2 \cdots q_{n+1}}\right) = 1\,,$$

also

(3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log q_n}{\log q_1 q_2 \cdots q_n} = 0\,.$$

Diese Voraussetzung über die Folge (q_i) soll im folgenden durchweg gegeben sein. Sie ist äquivalent mit der entsprechenden von T. Šalát benötigten Voraussetzung

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{(q_1 q_2 \cdots q_n)^{\varepsilon}} < \infty \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0\,^{4})\,.$$

[4]) Vgl. T. Šalát [4], S. 20.

Mit Voraussetzung (3) ist nach Satz 3 somit

$$\dim_{(e_i)} M = \dim M \quad \text{für alle} \quad M \subseteq E\,,$$

und die Sätze 1 und 2 liefern Abschätzungen für die Hausdorff-Dimension von M.

4. Der folgende Satz 4 zeigt besonders deutlich die Wirksamkeit der Billingsleyschen Methode.

Sei (a_i) eine Folge natürlicher Zahlen und

$$M_{(a_i)} = \{x \in E : e_i(x) < a_i \text{ für } i = 1, 2, \ldots\}\,.$$

Satz 4. (Šalát [4]): *Unter der Voraussetzung* (3) *gilt*

$$\dim M_{(a_i)} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \prod_{i=1}^{n} \min(a_i, q_i)}{\log \prod_{i=1}^{n} q_i}\,.$$

Beweis von Satz 4: Da die von den Funktionen e_i, $i = 1, 2, \ldots$ auf E erzeugte σ-Algebra gleich $\mathfrak{B}$ ist, genügt es zur Definition eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf E die gemeinsamen Verteilungen der Funktionen e_i anzugeben.

Die Zufallsvariablen e_i, $i = 1, 2, \ldots$ seien unabhängig auf $(E, \mathfrak{B}, \mu)$, und es gelte für $n \in N_0$

$$\mu(e_i = n) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls} \quad n \geqq \min(a_i, q_i) \\ (\min(a_i, q_i))^{-1} & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann ist, wie man leicht sieht,

$$\mu(M_{(a_i)}) = 1$$

und für alle $x \in M_{(a_i)}$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log \lambda(I_n(x))} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \prod_{i=1}^{n} \min(a_i, q_i)}{\log \prod_{i=1}^{n} q_i}\,.$$

Daraus folgt mit Satz 1 und 2 die Behauptung.

Wählt man speziell eine konstante Folge (s) mit $s \in N$, so ist $M_{(s)} = M_s$ die Menge der $x \in E$ mit $e_i(x) < s$ für alle $i = 1, 2, \ldots$ Sei M_∞ die Menge der $x \in E$ mit beschränkter Ziffernfolge. Dann gilt wegen

$$M_\infty = \bigcup_{s=1}^{\infty} M_s\,.$$

Satz 5.

$$\dim M_\infty = \lim_{s\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \prod_{i=1}^{n} \min(s, q_i)}{\log \prod_{i=1}^{n} q_i}.$$

Bemerkung. Dieses Ergebnis ist von T. Šalát [5] nicht explizit als Satz formuliert, doch wird es als einfache Folgerung aus Satz 1 [4] an mehreren Stellen seiner Arbeit [5] verwendet.

Aus Satz 5 folgt, daß im allgemeinen die Menge M_∞ die Dimension 0 besitzt. Genauer:

Satz 6. (T. Šalát). *Die Dimension von* M_∞ *ist genau dann gleich* 0, *wenn*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \cdots q_n)} = \infty$$

ist.

Beweis. Wegen $n \log 2 \leqq \log \prod_{i=1}^{n} \min(s, q_i) \leqq n \log s$ $(s \geqq 2)$ ist

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log \prod_{i=1}^{n} \min(s, q_i)}{\log \prod_{i=1}^{n} q_i}$$

genau dann gleich 0, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \prod_{i=1}^{n} q_i = \infty \quad \text{also} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \cdots q_n)} = \infty$$

ist. Daraus folgt die Behauptung.

Setzen wir voraus, daß

$$(5) \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \cdots q_n)} < \infty$$

ist, dann gilt

Satz 7. *Unter den Voraussetzungen* (3) *und* (5) *ist*

$$\dim M_\infty = 1 - \lim_{s\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{\substack{i\leqq n\\ q_i > s}} \log q_i}{\sum_{i\leqq n} \log q_i}.$$

Bemerkung. Als einfache Folgerung von Satz 7 ergibt sich eine Verschärfung von Satz 7 von T. Šalát [5], denn unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen dieses Satzes ist

$$\lim_{s\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{\substack{i\leqq n\\ q_i>s}} \log q_i}{\sum\limits_{i\leqq n} \log q_i} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\delta(n)/n}{\log a + (\delta(n)/n)} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\log a}{\log a + (\delta(n)/n)}\right) = 1 - \frac{\log a}{\log a + \limsup (\delta(n)/n)},$$

also

$$\dim M = \frac{\log a}{\log a + \limsup (\delta(n)/n)}.$$

Beweis von Satz 7: Nach Satz 5 ist

$$\dim M_\infty = \lim_{s\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \sum\limits_{\substack{i\leqq n\\ q_i<s}} \log q_i + \frac{1}{n} \sum\limits_{\substack{i\leqq n\\ q_i\geqq s}} \log s}{\frac{1}{n} \sum\limits_{i\leqq n} \log q_i}.$$

Sei U_s die Menge der natürlichen Zahlen i mit $q_i > s$ und $U_s(n)$ die Anzahlfunktion von U_s. Dann ist wegen[5])

$$\lim_{s\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{U_s(n)}{n} = 0$$

$$\dim M_\infty = \lim_{s\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \sum\limits_{\substack{i\leqq n\\ q_i<s}} \log q_i + \frac{U_s(n)}{n} \log s}{\frac{1}{n} \sum\limits_{i\leqq n} \log q_i} =$$

$$= 1 - \lim_{s\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{q_i\geqq s,\, i\leqq n} \log q_i}{\sum\limits_{i\leqq n} \log q_i}.$$

Damit ist Satz 7 bewiesen.

5. In diesem Abschnitt soll die Hausdorff-Dimension der Menge der Elemente $x \in E$ berechnet werden, in deren Cantorschen Entwicklung gewisse Ziffern nicht

---

[5]) Vgl. Folgerung zu Satz 3 [5].

auftreten. Dieses Problem ist von T. Šalát [4] nur für den Fall $q_i = i + 1$ für $i = 1, 2, \dots$ behandelt worden.[6])

Für eine Teilmenge R von N_0 und eine natürliche Zahl n sei $R'(n)$ die Anzahl der Elemente von R, die kleiner als n sind. Dies ist nicht die in der Zahlentheorie übliche Anzahlfunktion, da die 0 mitgezählt aber n nicht mitgezählt wird. Die obere asymptotische Dichte von R sei mit $\bar{D}^*(R)$ bezeichnet. Weiter sei

$$M(R) = \{x \in E : e_i(x) \notin R \quad \text{für alle} \quad i = 1, 2, \dots\}.$$

Satz 8. *Unter der Voraussetzung* (3) *gilt*

$$\dim M(R) = \liminf_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \log (q_i - R'(q_i))}{\sum_{i=1}^{n} \log q_i}.$$

Dabei soll der Limes inferior gleich 0 *gesetzt werden, wenn für wenigstens ein* $i \in N : R'(q_i) = q_i$ *gilt.*

Beweis. Gilt $R'(q_i) = q_i$ für wenigstens ein i, so ist $M(R)$ leer und so die Behauptung trivial. Sei also $R'(q_i) < q_i$ für alle i.

Wir konstruieren ähnlich wie beim Beweis von Satz 4 ein auf die Menge $M(R)$ konzentriertes Maß μ durch Angabe der Verteilungen der Funktionen e_i, $i = 1, 2, \dots$ Die Zufallsvariablen e_i sollen auf $(E, \mathfrak{B}, \mu)$ unabhängig sein, und es sei für $n \in N_0$

$$\mu(e_i = n) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad n \geqq q_i \quad \text{oder} \quad n \in R \\ (q_i - R'(q_i))^{-1} & \text{sonst}. \end{cases}$$

Dann ist $\mu(M(R)) = 1$ und für alle $x \in M(R)$ gilt

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log \lambda(I_n(x))} = \liminf_{n \to \infty} \frac{\log \sum_{i=1}^{n} (q_i - R'(q_i))}{\log \sum_{i=1}^{n} q_i}.$$

Daraus folgt mit Satz 1 und 2 die Behauptung.

Besitzt die Folge (q_i) keinen endlichen Häufungspunkt, so ist im allgemeinen die Dimension von $M(R)$ gleich 1. Genauer:

---

[6]) Herr Prof. T. Šalát teilte mir freundlicherweise mit, dass er in einer im Druck befindlichen Arbeit (T. Šalát, Über die Cantorschen Reihen, Czechosl. Mat. Journ., Sätze 2.1 und 2.4) bereits die Sätze 8 und 9 in etwas allgemeinerer Form bewiesen hat.

Satz 9. *Ist* $\lim_{i \to 1} q_i = \infty$ *und erfüllt die Folge* (q_i) *die Voraussetzung* (3), *so ist für alle Teilmengen* R *von* N_0 *mit* $\bar{D}^*(R) < 1$

$$\dim M(R) = 1 .$$

Bemerkung. Da die Folge $(q_i = i)$ alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt, ist Satz 9 eine Verallgemeinerung des Satzes 2 von T. Šalát [4] und eine Verallgemeinerung und Verschärfung von Satz 4 [4]. Im Falle $\bar{D}^*(R) < 1$ verschärft Satz 9 auch Satz 3 [4]. Im Falle $\bar{D}^*(R) = 1$ dagegen zeigt eine einfache Rechnung, daß mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 3 [4] aus Satz 8

$$l(R) \leqq \dim M(R) \leqq L(R)$$

folgt.

Beweis von Satz 9: Aus den Voraussetzungen $\bar{D}^*(R) < 1$ und $\lim_{i \to \infty} q_i = \infty$ folgt die Existenz einer reellen Zahl $\alpha < 1$ und einer natürlichen Zahl n_0 derart, daß

$$R'(q_n) < \alpha q_n \quad \text{für alle} \quad n > n_0$$

gilt. Daraus folgt mit Satz 8

$$\dim M(R) \geqq \liminf_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=n_0}^{n} \log ((1 - \alpha)\, q_i)}{\sum_{i=1}^{n} \log q_i} .$$

Da wegen $\lim_{i \to \infty} q_i = \infty$

$$n \,.\, (\sum_{i=1}^{n} \log q_i)^{-1} = o(1)$$

ist, folgt

$$\dim M(R) \geqq \liminf_{n \to \infty} \left(1 + \frac{(n - n_0) \log (1 - \alpha)}{\sum_{i=1}^{n} \log q_i}\right) = 1 .$$

Damit ist Satz 9 bewiesen.

6. In diesem Abschnitt soll die Dimension der Menge der reellen Zahlen im Einheitsintervall abgeschätzt werden, in deren Cantorentwicklung die Ziffern $r_1, r_2, \ldots, r_k$ mit vorgegebenen Häufigkeiten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ auftreten. Wir setzen über die Folge (q_i) neben (3) noch voraus, daß sie monoton nicht fallend und divergent ist.

Sei $K = \{r_1, \ldots, r_k\}$ eine endliche Teilmenge von N_0, und seien $\xi_1, \ldots, \xi_k$ positive reelle Zahlen mit

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_k < 1 .$$

Die Anzahl der natürlichen Zahlen $i \leqq n$ mit $e_i(x) = r_j$ bzw. $e_i(x) \in K$ bezeichnen wir mit $N_n(x, r_j)$ bzw. $N_n(x, K)$. Sei

$$M(K, \xi) = \left\{x \in E : \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_n(x, K) \geqq \xi\right\}$$

und

$$M(r_1, \ldots, r_k; \xi_1, \ldots, \xi_k) = \left\{x \in E : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_n(x, r_i) = \xi_i\,, \quad i = 1, \ldots, k\right\}.$$

Schließlich sei

$$l(\xi) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i \leqq n\xi} \log q_i}{\sum_{i \leqq n} \log q_i} \quad \text{und} \quad L(\xi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{n-\xi n < i \leqq n} \log q_i}{\sum_{\leqq n} \log q_i}.$$

Man sieht leicht, daß die Funktionen $l(\xi)$ und $L(\xi)$ monoton nicht fallend und für alle ξ mit $0 < \xi < 1$ stetig sind.

Satz 10. *Sei (q_i) eine monoton nicht fallende, divergente Folge, die (3) erfüllt. Dann ist*

$$l(1 - \xi) \leqq \dim M(r_1, \ldots, r_k; \xi_1, \ldots, \xi_k) \leqq \dim M(K, \xi) \leqq L(1 - \xi)\,.$$

Bemerkungen: 1. Im Falle $q_i = i$ für alle i ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i \leqq n} \log q_i}{n \log n} = 1\,,$$

und daher $l(\xi) = L(\xi) = \xi$ für alle ξ. Die Sätze 5 und 6 von T. Šalát [4] sind daher Spezialfälle von Satz 10.

2. Durch eine einfache Modifikation des Beweises kann man zeigen, daß der Satz auch richtig bleibt, wenn man nur

$$0 \leqq \xi_i \leqq 1 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k \quad \text{und} \quad 0 \leqq \xi \leqq 1$$

voraussetzt.

3. Ist $l(1 - \xi) = L(1 - \xi)$, so folgt aus Satz 10

$$\dim M(r_1, \ldots, r_k; \xi_1, \ldots, \xi_k) = l(1 - \sum_{i=1}^{k} \xi_i)\,;$$

die Dimension hängt also nur von der Summe der Häufigkeiten ξ_i nicht aber von den Häufigkeiten selbst ab. Es ist zu vermuten, daß dies auch im allgemeinen Fall richtig ist.

4. Erwähnenswert ist, daß auch im Falle $\sum_{i=1}^{n} (q_i)^{-1} < \infty$ die Menge $M(r_1, \ldots, r_k; \xi_1, \ldots, \xi_k)$ positive Dimension besitzen kann.

Beweis von Satz 10: Es genügt zu zeigen, daß

$$\dim M(K, \xi) \leqq L(1 - \xi) \tag{6}$$

und

$$\dim M(r_1, \ldots, r_k; \xi_1, \ldots, \xi_k) \geqq l(1 - \xi) \tag{7}$$

ist.

Dazu konstruieren wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(E, \mathfrak{B})$ durch Angabe der Verteilungen der e_i, $i = 1, 2, \ldots$ unter der Voraussetzung, daß sie unabhängig sind. Sei die natürliche Zahl m so groß, daß

$$q_i > \max\{r_1, \ldots, r_k\} \quad \text{für alle} \quad i > m$$

ist, und sei

$$\mu(e_i = n) = \lambda(e_i = n) \quad \text{für alle} \quad i \leqq m \quad \text{und} \quad n \in N_0$$

sowie für $i > m$ und $n \in N_0$

$$\mu(e_i = n) = \begin{cases} \xi_j\,, & \text{falls} \quad n = r_j\,, \quad j = 1, \ldots, k\,, \\ \dfrac{1 - \xi}{q_i - k}\,, & \text{falls} \quad n < q_i \quad \text{und} \quad n \notin K\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen ist

$$\mu(M(r_1, \ldots, r_k;\ \xi_1, \ldots, \xi_k)) = 1\,. \tag{8}$$

Außerdem gilt für $n > m$

$$(\mu(I_n(x)))^{-1} = \prod_{i \leqq m} q_i \cdot \prod_{i=1}^{k} \xi_i^{N_n(x, r_i) - N_m(x, r_i)} \cdot \prod_{\substack{m < i \leqq n \\ i \in A_x}} \frac{q_i - k}{1 - \xi}\,, \tag{9}$$

wobei A_x die Menge $\{i \in N : e_i(x) \notin K\}$ ist.

Daraus folgt, wenn wir $\prod_{i \leqq m} q_i$ mit C bezeichnen,

$$(\mu(I_n(x)))^{-1} \leqq C(1 - \xi)^{-n} \prod_{\substack{i \leqq n \\ i \in A_x}} q_i \leqq C(1 - \xi)^{-n} \prod_{N_n(x, K) < i \leqq n} q_i\,.$$

Ist $\xi' < \xi$ und $x \in M(K, \xi)$, so gibt es unendlich viele $n \in N$ mit

$$N_n(x, K) > \xi' n\,.$$

Also ist für alle $x \in M(K, \xi)$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log \lambda(I_n(x))} \leqq \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{N_n(x,K)<i\leqq n} \log q_i}{\sum_{i\leqq n} \log q_i} \leqq L(1-\xi') .$$

Mit Satz 1 folgt daher wegen der Stetigkeit von $L(1 - \xi')$ an der Stelle ξ die Behauptung (6).

Es ist noch (7) zu zeigen. Sei $x \in M(r_1, \ldots, r_k; \xi_1, \ldots, \xi_k)$ und

$$\xi_0 = \min \{\xi_1, \ldots, \xi_k\} .$$

Dann folgt aus (9)

$$(\mu(I_n(x)))^{-1} \geqq \xi_0^{N_n(x,K)} \cdot \prod_{\substack{m<i\leqq n\\ i\in A_x}} (q_i - k) \geqq \xi_0^{N_n(x,K)} \prod_{m<i\leqq n-N_n(x,K)} (q_i - k) .$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x, K)}{n} = \xi$$

ist, folgt, wenn man die Stetigkeit von $l(\xi)$ und $n(\sum_{i\leqq n} \log q_i)^{-1} = o(1)$ ausnutzt,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log \lambda(I_n(x))} \geqq \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{m<i\leqq(1-\xi+o(1))n} \log (q_i - k)}{\sum_{i\leqq n} \log q_i} = l(1 - \xi) .$$

Daraus folgt zusammen mit (8) und Satz 2 die Behauptung (7), und Satz 10 ist bewiesen.

Literatur

[1] *P. Billingsley:* Hausdorff dimension in probability theory I, Ill. Journ. Math. *4* (1960), 187—209.

[2] *P. Billingsley:* Hausdorff dimension in probability theory II, Ill. Journ. Math. *5* (1960), 291—298.

[3] *O. Perron:* Irrationalzahlen, Berlin—Leipzig, 1921.

[4] *T. Šalát:* Cantorsche Entwicklungen der reellen Zahlen und das Hausdorffsche Maß, Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci. VI, (1961), 15—41.

[5] *T. Šalát:* Über die Hausdorffsche Dimension der Menge der Zahlen mit beschränkten Folgen von Ziffern in Cantorschen Entwicklungen, Czechosl. Math. Journ. *15* (*90*), (1965), 540—553.

[6] *H. Wegmann:* Über den Dimensionsbegriff in Wahrscheinlichkeitsräumen von P. Billingsley II, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie u. verw. Geb. *9* (1968), 222—231.

Anschrift des Verfassers: Technische Hochschule Stuttgart, 7000 Stuttgart 1, Keplerstrasse 10, BRD.