Czechoslovak Mathematical Journal

Josef Vala

Über die Regelflächenpaare mit einer nicht abwickelbaren Quasifleknodalfläche

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 3, 527–529,530–531,532–559

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100850`

Czechoslovak Mathematical Journal, 18 (93) 1968, Praha

ÜBER DIE REGELFLÄCHENPAARE MIT EINER NICHT ABWICKELBAREN QUASIFLEKNODALFLÄCHE

JOSEF VALA, Brno

(Eingegangen am 5. Mai 1967)

Es wird die Klassifikation der Regelflächenpaare mit einer nicht abwickelbaren Quasifleknodalfläche durchgeführt. Man findet die geometrischen Eigenschaften verschiedener Typen der angeführten Flächenpaare.

a) Betrachten wir im projektiven dreidimensionalen Raum P_3 das Paar P der Regelflächen. Die Flächen des angeführten Paares seien durch die Geraden $q(u)$, $\bar{q}(u)$ gebildet. Der gemeinsame Parameter nimmt alle Werte aus dem offenen Intervall I an. Setzen wir weiter voraus, daß die zum demselben Werte des Parameters u gehörigen Erzeugenden beider Regelflächen für alle Werte von $u \in I$ windschief sind und daß die durch die Geraden q, $\bar{q}$ gebildeten Flächen im Intervall I keine Torsalerzeugenden haben. Die *Quasifleknodalgeraden* des Paares P für $u = u_0 \in I$ schneiden die entsprechenden Geraden $q(u_0)$, $\bar{q}(u_0)$ und die zu diesen Geraden nacheinanderfolgenden Erzeugenden der angeführten Regelflächen. Die Schnittpunkte der Quasifleknodalgeraden des Paares P (für $u = u_0$) mit den Geraden $q(u_0)$, $\bar{q}(u_0)$ sind nach IVLEV die *Quasifleknodalpunkte* der Flächen des Paares P. Wenn wir alle Werte von $u \in I$ betrachten, dann bilden die Quasifleknodalpunkte auf beiden Flächen die *Quasifleknodalkurven*. Die Quasifleknodalgeraden längs des Paares der Quasifleknodalkurven bilden allgemein die *Quasifleknodalfläche*.

Betrachten wir im Raum P_3 vier linear unabhängige Punkte B_1, B_2, B_3, B_4. Jeder dieser Punkt sei eine Funktion des Parameters $u \in I$. Für das Paar $B_4(u)$, $B_3(u)$ der linear unabhängigen Punkte sei weiter die Relation

$$(B_4, B_3, B_4', B_3') \neq 0 \tag{1}$$

für alle Werte von $u \in I$ erfüllt. Die Striche bedeuten Ableitungen nach u. Die Gleichung (1) ist die Bedingung, daß die Verbindungsgerade $p(u)$ der Punkte $B_4(u)$, $B_3(u)$ im Intervall I nicht torsal ist. Die Geraden (B_4, B_3) bilden dann die Regelfläche Φ, die keine Torse ist.

Setzen wir voraus, daß die Koordinaten der Punkte $B_4(u)$, $B_3(u)$ Funktionen des Parameters u der Differentialklasse C^4 sind. Wenn die Relation $B_4' = B_1$, $B_3' = B_2$

gelten, dann kann man nach M. BARNER [1] voraussetzen, daß das System der Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad \mathrm{d}B_1 &= [\beta_{11}B_1 + \beta_{12}B_2 + \alpha_{12}B_3 + \alpha_{11}B_4]\,\mathrm{d}u\,,\\
\mathrm{d}B_2 &= [\beta_{21}B_1 + \beta_{22}B_2 + \alpha_{22}B_3 + \alpha_{21}B_4]\,\mathrm{d}u\,,\\
\mathrm{d}B_3 &= B_2\,\mathrm{d}u\,,\\
\mathrm{d}B_4 &= B_1\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

erfüllt ist. Die Koeffizienten $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$, $i, k = 1, 2$, sind Funktionen des Parameters u der Differentialklasse C^2.

Die Fläche $\Phi = (B_4, B_3)$ sei die Quasifleknodalfläche des Paares P, $(B_4(u))$ sei die Quasifleknodalkurve des Paares P. $(B_4(u))$ liege auf der Fläche, die durch die Geraden $q(u)$ erzeugt wird. $(B_3(u))$ sei auch die Quasifleknodalkurve des Paares P. $(B_3(u))$ liege auf der Fläche, die durch die Geraden $\bar{q}(u)$ erzeugt wird. Für die Erzeugenden der Flächen des Paares P gilt dann:

$$q = (B_4, c_1B_4 + c_2B_3 + c_5B_1 + c_6B_2)\,, \qquad \bar{q} = (B_3, c_3B_4 + c_4B_3 + c_7B_1 + c_8B_2)\,.$$

Nach der Definition der Quasifleknodalgeraden bekommen wir dann:

$$p\,.\,q = 0\,, \quad p\,.\,\bar{q} = 0\,, \quad p\,.\,q' = 0\,, \quad p\,.\,\bar{q}' = 0\,.$$

Daraus folgt $c_6 = c_7 = 0$; die Gerade q ist die Tangente der Fläche Φ immer im entsprechenden Punkte B_4, die Gerade $\bar{q}$ ist die Tangente der Fläche Φ immer im entsprechenden Punkte B_3. Man kann noch die Koordinaten der Geraden $q, \bar{q}$ so umnormen, daß $c_5 = -c_8 = +2$ gilt. Diese Umnormung ist immer möglich, es gilt $c_5\,.\,c_8 \neq 0$ für alle Werte des Parameters $u \in I$. Unter der Voraussetzung $c_5 = 0$ für $u = u_0 \in I$ fällt nämlich die Gerade $q(u_0)$ mit der Geraden $p(u_0)$ zusammen, sie schneidet aber dann die Gerade $\bar{q}(u_0)$ und das ist nach den Voraussetzungen für die Geraden $q(u)$, $\bar{q}(u)$ unmöglich. Dasselbe gilt für den Fall $c_8 = 0$.

Setzen wir voraus, daß die angeführte Umnormung durchgeführt ist. Es gilt dann:

$$(3a) \qquad q = (B_4, c_1B_4 + c_2B_3 + 2B_1)\,,$$

$$(3b) \qquad \bar{q} = (B_3, c_3B_4 + c_4B_3 - 2B_2)\,.$$

Setzen wir voraus, daß c_1, c_2, c_3, c_4 Funktionen des Parameters $u \in I$ der Differentialklasse C^2 sind. (Diese Voraussetzung gilt in den Abschnitten f), g) nicht.)

Die Gleichung der Fläche Φ sei in der Form

$$(4) \qquad X = B_4 + vB_3\,,$$

wo der Parameter v alle reellen Werte annimmt.

Die Differentialgleichung der Asymptotenkurven der Fläche Φ ist:

$$2v' + \beta_{12} + v(\beta_{22} - \beta_{11}) - v^2\beta_{21} = 0 \,. \tag{5}$$

Wenn für $u = u_0 \in I$ die Relation $c_2 = -\beta_{12}$ gilt, dann ist die Gerade $q(u_0)$ die asymptotische Tangente der Fläche Φ im Punkte $B_4(u_0)$. Wenn für $u = u_1 \in I$ die Relation $c_3 = \beta_{21}$ gilt, dann ist die Gerade $\bar{q}(u_1)$ die asymptotische Tangente der Fläche Φ im Punkte $B_3(u_1)$.

Die Gleichung der Fleknodalkurven der Fläche Φ ist der Gestalt:

$$\begin{aligned}\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \tfrac{1}{4}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) + v[(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \tfrac{1}{2}(\beta'_{22} - \beta'_{11}) +\\ + \tfrac{1}{4}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2)] + v^2[-\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} - \tfrac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11})] = 0 \,.\end{aligned} \tag{6}$$

Das Paar der Kurven $(B_4(u))$, $(B_3(u))$ ist auf der Fläche Φ im Intervall I *im Sinne von Terracini* [5] *konjugiert*, wenn für alle Werte von $u \in I$ die Relation $\beta_{12} \cdot \beta_{21} \neq 0$ und

$$\beta_{21}[-\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta'_{12} - \tfrac{1}{2}\beta_{11}\beta_{12}] = \beta_{12}[\alpha_{21} - \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{22}] \tag{7}$$

gilt.

Die Riccatische Schar (R-Schar) der Kurven der Fläche Φ hat die Differentialgleichung:

$$v' + \alpha(u) + 2\,\beta(u)\,v + \gamma(u)\,v^2 = 0\,;$$

$\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$ sind die gegebenen Funktionen des Parameters u. Die R-Scharen sind entweder allgemein, oder quadratisch, oder schichtbildend (Mayer [4], Barner [1]). Die asymptotische Schar gehört auch zu den R-Scharen.

Das Paar der Kurven (B_4), (B_3) ist unter Voraussetzung $\beta_{12}\beta_{21} \neq 0$ $(u \in I)$ auf der Fläche Φ zum Paare von zwei asymptotischen Kurven apolar, wenn

$$\beta_{12}\beta_{21}(\beta_{22} - \beta_{11}) - \beta'_{21}\beta_{12} + \beta'_{12}\beta_{21} = 0 \tag{8}$$

gilt. Diese Relation folgt aus der Gleichung (5).

b) Betrachten wir ein neues Koordinatesystem mit den Eckpunkten

$$\begin{aligned}A_1 = 2B_1 + c_2B_3 + c_1B_4\,, \quad A_2 = -2B_2 + c_4B_3 + c_3B_4\,,\\ A_3 = B_3\,, \quad A_4 = B_4\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Es gilt nach (9):

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = -4(B_1, B_2, B_3, B_4)\,.$$

Die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 sind also für alle Werte von $u \in I$ linear unabhängig.

Die durch die Geraden (A_i, A_k) gebildeten Regelflächen für $u \in I$ bezeichnen wir mit $R(i, k)$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$. Es gilt also $\Phi = R(4, 3)$. Das Paar P wird durch die Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ gebildet.

Nach den angeführten Voraussetzungen haben die Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ im Intervall I keine Torsalerzeugende, es gilt:

$$(A_4, A_1, dA_4, dA_1) \neq 0, \quad (A_3, A_2, dA_3, dA_2) \neq 0, \tag{9a}$$

für alle Werte von $u \in I$.

Durch die Differentiation des Systems (9) bekommen wir bei Benützung der Gleichungen (2):

$$\begin{aligned}
& dA_i = \omega_i^k A_k = u_i^k \, du A_k \,; \quad i, k = 1, 2, 3, 4 \,; \\
& \omega_1^1 = \tfrac{1}{2}(c_1 + 2\beta_{11}) \, du \,, \quad \omega_1^2 = -\tfrac{1}{2}(c_2 + 2\beta_{12}) \, du \,, \\
& \omega_1^3 = [c_2' + 2\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}c_2(c_1 + 2\beta_{11}) + \tfrac{1}{2}c_4(c_2 + 2\beta_{12})] \, du \,, \\
& \omega_1^4 = [c_1' + 2\alpha_{11} - \tfrac{1}{2}c_1(c_1 + 2\beta_{11}) + \tfrac{1}{2}c_3(c_2 + 2\beta_{12})] \, du \,, \\
& \omega_2^1 = \tfrac{1}{2}(c_3 - 2\beta_{21}) \, du \,, \quad \omega_2^2 = -\tfrac{1}{2}(c_4 - 2\beta_{22}) \, du \,, \\
& \omega_2^3 = [c_4' - 2\alpha_{22} - \tfrac{1}{2}c_2(c_3 - 2\beta_{21}) + \tfrac{1}{2}c_4(c_4 - 2\beta_{22})] \, du \,, \\
& \omega_2^4 = [c_3' - 2\alpha_{21} - \tfrac{1}{2}c_1(c_3 - 2\beta_{21}) + \tfrac{1}{2}c_3(c_4 - 2\beta_{22})] \, du \,, \\
& \omega_3^1 = 0 \,, \quad \omega_3^2 = -\tfrac{1}{2} du \,, \quad \omega_3^3 = \tfrac{1}{2}c_4 \, du \,, \quad \omega_3^4 = \tfrac{1}{2}c_3 \, du \,, \\
& \omega_4^1 = \tfrac{1}{2} du \,, \quad \omega_4^2 = 0 \,, \quad \omega_4^3 = -\tfrac{1}{2}c_2 \, du \,, \quad \omega_4^4 = -\tfrac{1}{2}c_1 \, du \,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Die Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ haben nach den Voraussetzungen im Intervall I keine Torsalerzeugenden, es gilt also nach (9a), (10) für alle Werte von $u \in I$:

$$c_2 \,.\, (c_2 + 2\beta_{12}) \neq 0, \quad c_3 \,.\, (c_3 - 2\beta_{21}) \neq 0 \,. \tag{10a}$$

Setzen wir voraus, daß die Geraden

$$\bar{p}(u) = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_4, \mu_1 A_2 + \mu_2 A_3) \,, \quad \lambda_i = \lambda_i(u) \,, \quad \mu_i = \mu_i(u) \,, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

die Quasifleknodalgeraden des Paares P der Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ für alle Werte von $u \in I$ sind. Weiter setzen wir voraus, daß sie von den entsprechenden Geraden $p(u)$ verschieden sind. Es gilt für den festen Wert des Parameters u $(u = u_0 \in I)$:

$$q \,.\, \bar{p} = 0 \,, \quad \bar{q} \,.\, \bar{p} = 0 \,, \quad q' \,.\, \bar{p} = 0 \,, \quad \bar{q}' \,.\, \bar{p} = 0 \,. \tag{12}$$

Wenn u alle Werte aus dem Intervall I annimmt, dann bilden die Geraden $\bar{p}$ im allgemeinen eine weitere Quasifleknodalfläche $\bar{\Phi}$. Wir werden die Bedingungen der Existenz und die Eigenschaften der Fläche $\bar{\Phi}$ betrachten. Die ersten zwei Gleichungen sind offenbar nach (11) erfüllt, aus den weiteren Gleichungen folgt nach (3), (10):

$$-\lambda_2\mu_1 u_4^3 + \lambda_1\mu_2 u_1^2 - \lambda_1\mu_1 u_1^3 = 0 \,, \quad -\lambda_1\mu_1 u_2^4 - \lambda_1\mu_2 u_3^4 + \lambda_2\mu_1 u_2^1 = 0 \,. \tag{13}$$

Setzen wir voraus, daß das Paar P eine Quasifleknodalfläche $\bar{\Phi}$ hat. Diese kann auch zerfallen.

Wenn dann für $u = u_0 \in I$ die Gleichung $\lambda_1 = 0$ gilt, dann folgt aus der Gleichung (13):

$$\lambda_2 \mu_1 u_4^3 = 0\,, \quad \lambda_2 \mu_1 u_2^1 = 0\,.$$

Nach (11) schließen wir $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ aus, nach den Voraussetzungen muß man auch den Fall $\lambda_1 = \mu_1 = 0$ ausschließen. Es bleibt also nur die Bedingung $u_4^3 = u_2^1 = 0$. Dann gilt aber nach (10) $c_2 = 0$, das ist nach (10a) unmöglich. Es gilt also $\lambda_1 \neq 0$ und ähnlich $\mu_1 \neq 0$ für alle Werte von $u \in I$.

Die Gleichungen (13) kann man in der Form

$$-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) u_4^3 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) u_1^2 - u_1^3 = 0\,, \quad -u_2^4 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) u_3^4 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) u_2^1 = 0$$

einführen. Wenn wir nun $\lambda_1 = \mu_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$, $\mu_2 = \mu$ wählen, dann haben die eingeführten Gleichungen die Gestalt:

$$(14) \qquad c_2\lambda - (c_2 + 2\beta_{12})\,\mu = 2u_1^3\,, \quad (c_3 - 2\beta_{21})\,\lambda - c_3\mu = 2u_2^4\,.$$

Es existiert im allgemeinen eine Lösung der Gleichungen (14) für die Unbekannten λ, μ. Unter Bezeichnung:

$$(15) \qquad \varepsilon = -c_2' - 2\alpha_{12} + c_2\beta_{11}\,, \quad \bar{\varepsilon} = -c_3' + 2\alpha_{21} + c_3\beta_{22}\,,$$

$$\Delta = \beta_{21}c_2 - \beta_{12}c_3 + 2\beta_{12}\beta_{21}\,,$$

bekommen wir diese Lösung im Falle $\Delta \neq 0$ in der Form:

(16)

$$\lambda = -c_1 + \frac{1}{\Delta}\left[-\varepsilon c_3 + \bar{\varepsilon}(c_2 + 2\beta_{12})\right], \quad \mu = -c_4 + \frac{1}{\Delta}\left[-\varepsilon(c_3 - 2\beta_{21}) + \bar{\varepsilon}c_2\right].$$

Definition. Wir bezeichnen mit $\bar{P}_2$ das Paar der Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$, das im Intervall I die Quasifleknodalfläche Φ und nur eine einzige Quasifleknodalfläche $\bar{\Phi}$ hat; ihre Erzeugenden sind für alle Werte von u von den entsprechenden Erzeugenden der Fläche Φ verschieden.

Die Lage der Geraden q, $\bar{q}$ ist nicht von den Größen c_1, c_4 abhängig, die Größen c_1, c_4 bestimmen aber die Lage der Punkte A_1, A_2 auf den Geraden q, bzw. $\bar{q}$. Wenn also die Flächen $R(4, 1)$, $R(2, 3)$ das $\bar{P}_2$-Paar bilden, dann kann man

$$(17) \qquad c_1 = \frac{1}{\Delta}\left[-\varepsilon c_3 + \bar{\varepsilon}(c_2 + 2\beta_{12})\right], \quad c_4 = \frac{1}{\Delta}\left[-\varepsilon(c_3 - 2\beta_{21}) + \bar{\varepsilon}c_2\right]$$

wählen; es gilt dann:

$$(18) \qquad u_1^3 = u_2^4 = 0\,,$$

die Geraden (A_1, A_2) bilden die zweite Quasifleknodalfläche des Paares $\bar{P}_2$.

Betrachten wir den Fall, daß für $u = u_0 \in I$ die Lösung der Gleichungen (14) nicht existiert. In diesem Falle existiert für $u = u_0$ keine Quasifleknodalgerade des Paares der Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$, die von der Geraden $p(u_0)$ verschieden ist.

Definition. Mit $\bar{P}_1$ bezeichnen wir das Paar der Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$, das im I nur eine Quasifleknodalfläche hat.

Nach den Gleichungen (14) bekommen wir für das Paar $\bar{P}_1$ die folgende Bedingung:

$$\Delta = 0 . \tag{19}$$

Weiter gilt für alle Werte von $u \in I$ wenigstens eine der folgenden Ungleichheiten:

$$-\varepsilon c_3 + \bar{\varepsilon}(c_2 + 2\beta_{12}) \neq 0 , \quad -\varepsilon(c_3 - 2\beta_{21}) + \bar{\varepsilon} c_2 \neq 0 . \tag{20}$$

Aus der Gleichung (19) bekommen wir nach (15) unter Voraussetzung $\beta_{12}\beta_{21} \neq 0$:

$$c_2 = -\beta_{12}(1 - c) , \quad c_3 = \beta_{21}(1 + c) . \tag{21}$$

Es gilt $c = c(u)$; $c \neq \pm 1$ für keinen Wert des Parameters $u \in I$. Im Falle $c = 1$ ist nämlich die entsprechende Gerade der Fläche $R(4, 1)$ die Torsalerzeugende, nach a) ist es aber unmöglich. Ähnlich kann nicht $c = -1$ gelten.

Wenn wir für c_2, c_3 aus den Gleichungen (21) in die Relationen (20) einsetzen, dann bekommen wir nur eine Bedingung:

$$\begin{aligned} &\beta_{21}[\beta'_{12}(1 - c) - 2\alpha_{12} - \beta_{12}\beta_{11}(1 - c)] - \\ &- \beta_{12}[-\beta'_{21}(1 + c) + 2\alpha_{21} + \beta_{21}\beta_{22}(1 + c)] \neq 0 . \end{aligned} \tag{22}$$

Wenn die Kurven (A_4), (A_3) im Intervall I die asymptotischen Kurven der Fläche Φ nicht berühren, dann bezeichnen wir das $\bar{P}_1$ – Paar mit P_1. Die Gleichungen (21) und die Ungleichung (22) bestimmen also das Paar P_1.

Definition. Mit $P(4, 3)$ bezeichnen wir das Paar P, welches durch die Tangenten der Fläche Φ längs der Kurven (A_4), (A_3) gebildet wird. Das $P(4, 3)$-Paar, welches P_1, bzw. $\bar{P}_2$-Paar ist, bezeichnen wir mit $P_1(4, 3)$, bzw. $\bar{P}_2(4, 3)$.

Satz 1. *Alle $P_1(4, 3)$-Paare bilden allgemein eine Paarenmenge, die von einer beliebigen Funktion $c = c(u)$ abhängt. Wenn die Flächen $R(4,1)$, $R(3,2)$ ein $P_1(4,3)$-Paar bilden, dann ist das Doppelverhältnis der Tangente der Kurve (A_4), der zu der Kurve (A_4) konjugierten Tangente der Fläche Φ, der Erzeugenden der Fläche Φ und der Erzeugenden der Fläche $R(4, 1)$ für alle Werte von $u \in I$ immer dem entsprechenden Doppelverhältnis der Tangente der Kurve (A_3), der zu der Kurve (A_3) konjugierten Tangente der Fläche Φ, der Erzeugenden der Fläche $R(3, 2)$ und der Erzeugenden der Fläche Φ gleich.*

Beweis. Die Lage der Erzeugenden der Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ hängt nur von den Funktionen c_2, c_3 ab. Nach (21) hängt die Lage der entsprechenden Geraden des $P_1(4, 3)$-Paares nur von der Funktion $c = c(u)$ ab. (Bei der Gültigkeit von (22).)

Wir werden weiter voraussetzen, daß die Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ ein $P_1(4, 3)$-Paar bilden. Auf der Fläche Φ ist zu der Tangente (A_4, A_4') die Tangente $(A_4, -2\beta_{12}A_3 + 2A_4')$ konjugiert. Ähnlich ist auf der Fläche Φ zur Tangente (A_3, A_3') die Tangente $(A_3, 2\beta_{21}A_4 - 2A_3')$ konjugiert. Für das Doppelverhältnis D der Tangente der Kurve (A_4), der zu dieser Geraden auf der Fläche Φ konjugierten Tangente, der Erzeugenden der Fläche Φ und der Erzeugenden der Fläche $R(4, 1)$ gilt im Falle $u = u_0 \in I$

$$D = \frac{c_2 + 2\beta_{12}}{c_2}. \tag{23a}$$

Im Falle $u = u_0 \in I$ gilt ähnlich für das Doppelverhältnis $\bar{D}$ der Tangente der Kurve (A_3), der zu dieser Geraden auf der Fläche Φ konjugierten Tangente, der Erzeugenden der Fläche $R(3, 2)$ und der Erzeugenden der Fläche Φ:

$$\bar{D} = \frac{c_3}{c_3 - 2\beta_{21}}. \tag{23b}$$

Die Relation $D = \bar{D}$ ist für alle Werte von $u \in I$ nur dann erfüllt, wenn für $u \in I$ die Relation $\Delta = 0$ gilt.

Betrachten wir im folgenden den Fall, daß die Gleichungen (14) im Intervall I unendlich viele Lösungen haben. Zu dem gegebenen $P(4, 3)$-Paar existieren dann unendlich viele verschiedene Quasifleknodalflächen. Dann gilt:

$$\Delta = 0\,, \quad -\varepsilon c_3 + \bar{\varepsilon}(c_2 + 2\beta_{12}) = 0\,, \quad -\varepsilon(c_3 - 2\beta_{21}) + \bar{\varepsilon}c_2 = 0\,. \tag{20a}$$

Diese Relation kann man unter Voraussetzung $\beta_{12}\beta_{21} \neq 0$ in die Form

$$\begin{aligned} \Delta = 0\,, \quad & \beta_{21}[\beta_{12}'(1 - c) - 2\alpha_{12} - \beta_{12}\beta_{11}(1 - c)] - \\ & - \beta_{12}[-\beta_{21}'(1 + c) + 2\alpha_{21} + \beta_{21}\beta_{22}(1 + c)] = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

überführen.

Definition. Wir bezeichnen mit $\bar{P}_0(4, 3)$ ein $P(4, 3)$-Paar, für welches die Relationen (20a) für alle Werte von $u \in I$ gelten. Im Falle $\beta_{12} \cdot \beta_{21} \neq 0$ bezeichnen wir ein solches Paar mit $P_0(4, 3)$.

Satz 2. *Es existiert allgemein nur ein $P_0(4, 3)$-Paar. Das $P_0(4, 3)$-Paar ist durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ nur dann gebildet, wenn die Kurven (A_4), (A_3) im Sinne von Terracini konjugiert sind. Das $P_0(4, 3)$-Paar existiert nicht, wenn die Kurven (A_4), (A_3) apolar zum Paar der Asymptotenkurven der Fläche Φ sind und nicht im Sinne von Terracini konjugiert sind.*

Beweis. Die zweite Relation (24) ist für c linear. Wenn $c = 0$ gilt, dann sind die Geraden $q, \bar{q}$ nach (21), (3), (4), (5) asymptotische Tangenten der Fläche Φ. Zur Erfüllung der Relation (24) ist dann die Bedingung (7) für alle Werte von $u \in I$ notwendig. Wenn die Bedingung (7) für irgendeinen Wert $u = u_0 \in I$ nicht erfüllt ist, aber für alle Werte von $u \in I$ die Relation (8) gilt, dann ist die zweite Relation (24) für $u = u_0$ nicht erfüllt, das $P_0(4, 3)$-Paar existiert dann nicht. Wenn aber das Paar der Kurven $(A_4), (A_3)$ im Intervall I im Sinne von Terracini konjugiert ist und wenn auf der Fläche Φ zwei im Intervall I zum Paare der Kurven $(A_4), (A_3)$ apolare Asymptotenkurven existieren, dann ist die zweite Gleichung (24) für alle Werte von c erfüllt.

Satz 3. *Setzen wir voraus, daß die Kurven $(A_4), (A_3)$ im Intervall I im Sinne von Terracini konjugiert sind und daß sie zum Paare der Asymptotenkurven der Fläche Φ apolar sind. Es existieren dann unendlich viele $P_0(4, 3)$-Paare, aber es existiert kein $P_1(4, 3)$-Paar.*

Beweis. Bei den angeführten Voraussetzungen ist die Relation (22) nicht erfüllt. Aus dem Beweise des Satzes 2 folgt dann die Behauptung des Satzes 3.

Im folgenden werden wir die $\bar{P}_2$-Paare betrachten. Weiter werden wir voraussetzen, daß die Fläche $\bar{\Phi}$ durch die Geraden (A_1, A_2) gebildet wird, es gilt dann $u_1^3 = 0$, $u_2^4 = 0$.

Wenn die Fläche $\bar{\Phi}$ für $u = u_0 \in I$ eine Torsalgerade hat, dann gilt für $u = u_0$:

$$(A_1, A_2, u_1^4 A_4, u_2^3 A_3) = 0 .$$

Das ist in folgenden Fällen möglich: $u_1^4 = 0$, $u_2^3 = 0$, $u_1^4 = u_2^3 = 0$. A_1 ist im ersten Falle der Kuspidalpunkt der Fläche $\bar{\Phi}$, A_2 ist im zweiten Falle der Kuspidalpunkt der Fläche $\bar{\Phi}$, im dritten Falle gilt für $u = u_0$:

$$\mathrm{d}(A_1, A_2) = (\omega_1^1 + \omega_2^2)(A_1, A_2), \tag{25}$$

d. h. die Gerade (A_1, A_2) ist stazionär.

Definition. Mit $P_2(t_1)$ (4, 3)-Paar bezeichnen wir ein $\bar{P}_2(4, 3)$-Paar, das die Quasifleknodaltorse $\bar{\Phi}$ hat. Die Kehlkurve der angeführten Torse liegt in diesem Falle auf der Fläche $R(4, 1)$. Ähnlich hat das $P_2(t_2)$ (4, 3)-Paar die Quasifleknodaltorse $\bar{\Phi}$ mit der Kehlkurve auf der Fläche $R(3, 2)$. Wir bezeichnen weiter mit $P_2(t_0)$ (4, 3) das $\bar{P}_2(4, 3)$-Paar der Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$, die zu einem speziellen linearen Komplex gehören.

Setzen wir im folgenden voraus, daß für alle Werte von $u \in I$

$$u_1^3 = u_2^4 = u_1^4 = 0$$

gilt. Wenn u_2^3 nicht für alle Werte von $u \in I$ gleich Null ist, dann haben wir ein $P_2(t_1)$ (4, 3)-Paar. Wenn wir aus den Gleichungen (17) für c_1, c_4 in die Gleichung

$u_1^4 = 0$ einsetzen, dann bekommen wir die Differentialgleichung, die die Beziehung zwischen den Größen c_2, c_3 gibt. Wenn c_2 die gegebene Funktion des Parameters u ist, dann ist diese Differentialgleichung für c_3 von zweiter Ordnung. Diese Ordnung ist nur in dem Falle niedriger, wenn $c_2 + 2\beta_{12} = 0$ gilt. Dann aber gilt nach (10): $\mathrm{d}A_1 = \omega_1^1 A_1$, die Fläche $\bar{\Phi}$ und auch die Fläche $R(4, 1)$ ist ein Kegel, das ist aber nach (10a) unmöglich.

Ähnlich kann man auch die $P_2(t_2)$ (4, 3)-Paare betrachten.

Setzen wir im folgenden voraus, daß für alle Werte von $u \in I$

$$u_1^3 = u_2^4 = u_1^4 = u_2^3 = 0$$

gilt. Dann gilt

$$\mathrm{d}(A_1, A_2) = (\omega_1^1 + \omega_2^2)(A_1, A_2),$$

d. h. die Gerade $\bar{p}$ ist fest. Das angeführte Paar ist ein $P_2(t_0)$ (4, 3)-Paar.

Definition. Im folgenden werden wir mit $P_2(4,3)$ ein solches Paar $\bar{P}_2(4, 3)$ bezeichnen, zu dem die einzige gehörende Fläche $\bar{\Phi}$ im Intervall I keine Torsalerzeugende hat.

Betrachten wir also das $P_2(4,3)$-Paar und die zu ihm gehörende Fläche $\bar{\Phi}$ mit den Erzeugenden (A_1, A_2), es gilt dann für $u \in I$:

$$u_1^3 = u_2^4 = 0\,, \quad u_2^3 \neq 0\,, \quad u_1^4 \neq 0\,.$$

Wir werden nun die Gleichung der Asymptotenkurven der Fläche $\bar{\Phi}$ suchen.

Die Differentialgleichungen der Leitkurven der Fläche $\bar{\Phi}$ sind der Gestalt:

$$\begin{aligned} A_1'' &= P_{11}A_1 + P_{12}A_2 + Q_{11}A_1' + Q_{12}A_2'\,, \\ A_2'' &= P_{21}A_1 + P_{22}A_2 + Q_{21}A_1' + Q_{22}A_2'\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Nach (2), (9), (10) bekommen wir dann:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1}{u_1^4}\left[u_1^1 u_1^4 + (u_1^4)' + u_1^4 u_4^4\right], \\ Q_{12} &= \frac{1}{u_2^3}\left[u_1^2 u_2^3 + u_1^4 u_4^3\right], \\ P_{12} &= u_1^1 u_1^2 + (u_1^2)' + u_1^2 u_2^2 - \frac{u_1^2}{u_1^4}\left[u_1^1 u_1^4 + (u_1^4)' + u_1^4 u_4^4\right] - \\ &\quad - \frac{u_2^2}{u_2^3}\left[u_1^2 u_2^3 + u_1^4 u_4^3\right], \\ Q_{21} &= \frac{1}{u_1^4}\left[u_2^1 u_1^4 + u_2^3 u_3^4\right], \end{aligned} \tag{27}$$

$$Q_{22} = \frac{1}{u_2^3}\left[u_2^2 u_2^3 + (u_2^3)' + u_2^3 u_3^3\right],$$

$$P_{21} = (u_2^1)' + u_2^1 u_1^1 + u_2^2 u_2^1 - \frac{u_1^1}{u_1^4}\left[u_2^1 u_1^4 + u_2^3 u_3^4\right] -$$

$$- \frac{u_2^1}{u_2^3}\left[u_2^2 u_2^3 + (u_2^3)' + u_2^3 u_3^3\right].$$

Wenn wir die Gleichung der Fläche $\bar{\Phi}$ in der Form $X = A_1 + \bar{v} A_2$ betrachten, dann bekommen wir leicht die Differentialgleichung der Asymptotenkurven der Fläche $\bar{\Phi}$:

$$2\bar{v}' + Q_{12} + (Q_{22} - Q_{11})\,\bar{v} - Q_{21}\bar{v}^2 = 0\,. \tag{28}$$

Nach (28) ist also die asymptotische Tangente der Fläche $\bar{\Phi}$ im Punkte A_1 durch die Punkte

$$(A_1, A_1' - \tfrac{1}{2}Q_{12}A_2) = (A_1, [u_1^2 - \tfrac{1}{2}Q_{12}]\, A_2 + u_1^4 A_4)$$

bestimmt. Diese Tangente fällt mit der Geraden (A_1, A_4) nur dann zusammen, wenn $u_1^2 - \frac{1}{2}Q_{12} = 0$ ist, d. h. nach (27), (10), wenn

$$c_2 u_1^4 - (c_2 + 2\beta_{12})\, u_2^3 = 0 \tag{29}$$

gilt. Ähnlich bekommen wir die asymptotische Tangente der Fläche $\bar{\Phi}$ im Punkte A_2.

$$(A_2, -A_2' + \tfrac{1}{2}Q_{21}A_1) = (A_2, [-u_2^1 + \tfrac{1}{2}Q_{21}]\, A_1 - u_2^3 A_3)\,.$$

Diese Tangente fällt mit der Geraden (A_2, A_3) nur dann zusammen, wenn $-u_2^1 + \frac{1}{2}Q_{21} = 0$ gilt; es gilt also in diesem Falle nach (27), (10):

$$(c_3 - 2\beta_{21})\, u_1^4 - c_3 u_2^3 = 0\,. \tag{30}$$

Satz 4. *Es existiert kein solches $P_2(4, 3)$-Paar, daß seine Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ asymptotische Tangenten der zugehörigen nicht abwickelbaren Fläche $\bar{\Phi}$ wären.*

Beweis. Wenn ein solches Paar existiert, dann gilt nach (29), (30)

$$\frac{u_1^4}{u_2^3} = \frac{c_2 + 2\beta_{12}}{c_2} = \frac{c_3}{c_3 - 2\beta_{21}},$$

d. h. es gilt $\Delta = 0$, das betrachtete Paar ist also kein $P_2(4, 3)$-Paar.

c) Betrachten wir alle Quergeraden der sich entsprechenden Erzeugenden der Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ des Paares $P(4, 3)$ (für alle Werte des Parameters u im Intervall I). Diese Quergeraden bilden allgemein eine dreiparametrische Schar $K(4, 3)$, sie gehören also zu einem *quasispeziellen Komplex* (Kovancov [3]). Die Erzeugenden der angeführten Schar haben einen Inflexmittelpunkt auf der Fläche $R(4, 1)$ und einen Inflexmittelpunkt auf der Fläche $R(3, 2)$.

Betrachten wir zuerst die Möglichkeit, daß die $K(4, 3)$-Schar zur Geradenkongruenz, bzw. zur Regelfläche gehört. Wenn wir mit r die Erzeugenden der $K(4, 3)$-Schar bezeichnen, dann gilt:

$$r = (A_1 + \lambda A_4, A_2 + \mu A_3) ;$$

u, λ, μ sind die Parameter.

Wenn die Geraden r zur Kongruenz, bzw. zur Regelfläche gehören, dann sind die Kleinschen Punkte $r, \partial r/\partial u, \partial r/\partial \lambda, \partial r/\partial \mu$ für alle Werte der Parameter linear abhängig. Wir bekommen leicht:

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = -(A_2, A_4) - \mu(A_3, A_4),$$

$$\frac{\partial r}{\partial \mu} = (A_1, A_3) - \lambda(A_3, A_4),$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (A_1, A_4)\left[u_2^4 + \mu u_3^4 - \lambda u_2^1\right] + (A_2, A_3)\left[-u_1^3 + \mu u_1^2 - \lambda u_4^3\right] +$$
$$+ \varrho_1(A_1, A_2) + \varrho_2(A_1, A_3) + \varrho_3(A_2, A_4) + \varrho_4(A_3, A_4).$$

Die Koeffizienten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ werden wir nicht im folgenden brauchen. Die Glieder mit $(A_1, A_4), (A_2, A_3)$ sind nur im Ausdruck für $\partial r/\partial u$. Es gilt also für alle Werte von u, λ, μ:

(31) $$u_2^4 + \mu u_3^4 - \lambda u_2^1 = 0, \quad -u_1^3 + \mu u_1^2 - \lambda u_4^3 = 0.$$

Setzen wir voraus, daß $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ entweder ein $\bar{P}_2(4, 3)$, oder ein $\bar{P}_1(4, 3)$, oder ein $\bar{P}_0(4, 3)$-Paar bilden. Nach (31) gilt dann $u_3^4 = u_4^3 = 0$, d. h. nach (10) $c_2 = c_3 = 0$. Das ist aber nach den Voraussetzungen (10a) unmöglich.

Im folgenden werden wir also voraussetzen, daß $K(4, 3)$ nicht zur Kongruenz oder Regelfläche gehört.

In der $K(4, 3)$-Schar existiert allgemein eine zweiparametrische Schar $E_1(4, 3)$ der Geraden, die die Fläche $R(4, 1)$ berühren. Die Fläche Φ gehört auch zur $E_1(4, 3)$-Schar. Ähnlich existiert in der $K(4, 3)$-Schar allgemein eine zweiparametrische Schar $E_2(4, 3)$ der Geraden, die die Fläche $R(3, 2)$ berühren. Die Fläche Φ gehört auch zur $E_2(4, 3)$-Schar.

Wenn die Gerade

$$r = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_4, \mu_1 A_2 + \mu_2 A_3)$$

zur $E_1(4,3)$-Schar gehört, dann gilt:

(32) $$(A_1, A_4, \mu_1 A_2 + \mu_2 A_3, \mathrm{d}[\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_4]) = 0.$$

Aus dieser Gleichung bekommen wir folgende Bedingung:

$$\mu_1[\lambda_1 u_1^3 + \lambda_2 u_4^3] - \mu_2 \lambda_1 u_1^2 = 0.$$

Wenn wir nun $\lambda_1 = \mu_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$, $\mu_2 = \mu$ wählen, dann hat die angeführte Bedingung die Gestalt: $u_1^3 + \lambda u_4^3 - \mu u_1^2 = 0$. Wir wählen noch die Parameter c_1, c_4 so, daß

(33) $$u_1^3 = 0$$

gilt. Die Parameter c_1, c_4 bestimmen nur die Lage des Punktes A_1 auf der Fläche $R(4, 1)$, bzw. die Lage des Punktes A_2 auf der Fläche $R(3, 2)$. Nach (10) ist diese Wahl immer möglich ($c_2 \neq 0$). Es gilt dann $\lambda u_4^3 = \mu u_1^2$ daraus folgt nach (10):

$$\lambda = (c_2 + 2\beta_{12})\,\varkappa\,, \quad \mu = c_2\varkappa\,. \tag{34}$$

$\varkappa$ ist der neue Parameter. Die Erzeugenden der $E_1(4, 3)$-Schar sind durch die Punkte

$$(A_1 + [c_2 + 2\beta_{12}]\,\varkappa A_4,\ A_2 + c_2\varkappa A_3) \tag{35}$$

bestimmt.

Wir bezeichnen mit $\Psi_1(4, 3)$ die Regelfläche, die zur $E_1(4, 3)$-Schar für $u = konst.$ gehört; ähnlich bezeichnen wir mit $\Psi_2(4, 3)$ die Regelfläche, die für $u = konst.$ zur $E_2(4, 3)$-Schar gehört. Nach (35) sind die Flächen $\Psi_1(4, 3)$ und ähnlich auch die Flächen $\Psi_2(4,3)$ quadratisch.

Die Erzeugenden einer Schar der Fläche $\Psi_1(4, 3)$, zu welchen auch die entsprechende Erzeugende der Fläche Φ gehört, nennen wir *konkordant*, die Erzeugenden zweiter Schar der Fläche $\Psi_1(4, 3)$ nennen wir *transversal*. Nach (33), (35) ist auch (A_1, A_2) ($u = konst.$) eine konkordante Gerade der Fläche $\Psi_1(4, 3)$. Ähnlich hat die Fläche $\Psi_2(4, 3)$ eine Schar von transversalen und eine Schar von konkordanten Erzeugenden.

Satz 5. *Die Flächen $\Psi_1(4, 3)$ berühren längs der entsprechenden Geraden p dann und nur dann die Quasifleknodelfläche Φ des Paares $P(4, 3)$, wenn die Fläche $R(4, 1)$ durch die* Asymptotentangenten der Fläche Φ gebildet wird.

Beweis. Betrachten wir die Erzeugende $p(u_0)$ ($u_0 \in I$) der Fläche Φ und auf dieser Erzeugenden liegenden Punkt $A_4 + vA_3$. Durch diesen Punkt geht die transversale Gerade der Fläche $\Psi_1(4, 3)$ und diese Gerade schneidet die Gerade (A_1, A_2) im Punkte $\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2$. Es gilt dann:

$$(A_4 + vA_3, A_1 + [c_2 + 2\beta_{12}]\,\varkappa A_4\,,\quad A_2 + c_2\varkappa A_3\,,\quad \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2) = 0\,.$$

Daraus folgt:

$$c_2\sigma_2 = \sigma_1(c_2 + 2\beta_{12})\,v\,.$$

Wenn v der Parameter ist, dann ist die tranversale Schar der Geraden der Fläche $\Psi_1(4, 3)$ durch die Punkte

$$(A_4 + vA_3, c_2A_1 + [c_2 + 2\beta_{12}]\,vA_2) \tag{36}$$

bestimmt. Die Fläche $\Psi_1(4, 3)$ berührt die Fläche Φ längs der Geraden $p(u_0)$, wenn für alle Werte von v

$$(A_4, A_3, A_4' + vA_3', c_2A_1 + [c_2 + 2\beta_{12}]\,vA_2) = 0$$

gilt. Nach (10) gilt diese Relation nur dann, wenn $c_2 + \beta_{12} = 0$ gilt. Die Erzeugende der Fläche $R(4, 1)$ für $u = u_0$ ist eine asymptotische Tangente der Fläche Φ. Wenn die Flächen $\Psi_1(4, 3)$ für alle Werte von u die Fläche Φ längs der entsprechenden Erzeugenden berühren, dann wird die Fläche $R(4, 1)$ durch die Tangenten der Asymptotenkurven der Fläche Φ längs der Kurve (A_4) gebildet.

Ein ähnlicher Satz gilt auch für die Flächen $\Psi_2(4, 3)$.

Es ist klar, daß für alle Werte von $u \in I$ die Flächen $\Psi_1(4, 3)$ und $\Psi_2(4, 3)$ die Fläche Φ längs der entsprechenden Erzeugenden p dann und nur dann berühren, wenn das $P(4, 3)$-Paar durch die Tangenten der Asymptotenkurven der Fläche Φ längs der Kurven (A_4), (A_3) gebildet wird.

Wir werden nun den Fall betrachten, daß die $E_1(4, 3)$-Schar zu einer Regelfläche gehört.

Satz 6. *Die $E_1(4,3)$-Schar gehört zu einer Regelfläche dann und nur dann, wenn die Fläche Φ eine Quadrik ist und wenn die Flächen $R(4,1)$, $R(3,2)$ durch die Erzeugenden derselben Schar dieser Quadrik gebildet werden.*

Beweis. Sei m eine Erzeugende der $E_1(4, 3)$-Schar. Wenn die $E_1(4, 3)$-Schar zerfällt, dann sind die Plückerischen Koordinaten der Punkte m, $\partial m/\partial u$, $\partial m/\partial \varkappa$ linear abhängig. Es gilt dann:

$$(37) \qquad \frac{\partial m}{\partial u} = \Theta_1 m + \Theta_2 \frac{\partial m}{\partial \varkappa}, \quad \Theta_i = \Theta_i(u, \varkappa), \quad i = 1, 2 .$$

(Die geometrischen Punkte m, $\partial m/\partial \varkappa$ fallen nicht zusammen.)
Nach (35) bekommen wir:

$$(38) \qquad \begin{aligned} m = {} & (A_1, A_2) + c_2\varkappa(A_1, A_3) - [c_2 + 2\beta_{12}]\, \varkappa\, (A_2, A_4) - \\ & - c_2[c_2 + 2\beta_{12}]\, \varkappa^2(A_3, A_4), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial m}{\partial \varkappa} = c_2(A_1, A_3) - [c_2 + 2\beta_{12}]\,(A_2, A_4) - 2c_2[c_2 + 2\beta_{12}]\, \varkappa(A_3, A_4),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial u} = {} & (A_1, A_2)\,[u_1^1 + u_2^2 + c_2\varkappa u_3^2 + (c_2 + 2\beta_{12})\, \varkappa u_4^1] + \\ & + (A_1, A_3)\,[u_2^3 + c_2\varkappa u_1^1 + c_2\varkappa u_3^3 + c_2(c_2 + 2\beta_{12})\, \varkappa^2 u_4^1 + c_2'\varkappa] + \\ & + (A_1, A_4)\,[u_2^4 + c_2\varkappa u_3^4 - (c_2 + 2\beta_{12})\, \varkappa u_2^1] + \\ & + (A_2, A_3)\,[c_2\varkappa u_1^2 - (c_2 + 2\beta_{12})\, \varkappa u_4^3] + \\ & + (A_2, A_4)\,[-u_1^4 - (c_2 + 2\beta_{12})\, \varkappa u_2^2 - (c_2 + 2\beta_{12})\, \varkappa u_4^4 - \\ & - c_2(c_2 + 2\beta_{12})\, \varkappa^2 u_3^2 - (c_2' + 2\beta_{12}')\, \varkappa] + \\ & + (A_3, A_4)\,[-c_2\varkappa u_1^4 - (c_2 + 2\beta_{12})\, \varkappa u_2^3 - c_2(c_2 + 2\beta_{12})\, \varkappa^2 u_3^3 - \\ & - c_2(c_2 + 2\beta_{12})\, \varkappa^2 u_4^4 - c_2'(c_2 + 2\beta_{12})\, \varkappa^2 - c_2(c_2' + 2\beta_{12}')\, \varkappa^2] . \end{aligned}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (38) setzen wir in die Gleichung (37) ein. Wir bekommen folgende Gleichung:

$$(39)\quad \varphi_1(A_1, A_2) + \varphi_2(A_1, A_3) + \varphi_3(A_1, A_4) + \varphi_4(A_2, A_3) + \varphi_5(A_2, A_4) + \\ + \varphi_6(A_3, A_4) = 0\,, \quad \varphi_i = \varphi_i(u, \varkappa)\,, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\,.$$

Die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 sind linear unabhängig, die Relation (39) ist nur dann für alle Werte von $u, \varkappa$ erfüllt, wenn $\varphi_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, für alle Werte von $u, \varkappa$ gilt.

Aus der Gleichung $\varphi_3 = 0$ bekommen wir nach (10):

$$(40)\qquad u_2^4 = 0\,, \quad \Delta = 0\,.$$

Dauraus folgt nach (21) unter Voraussetzung $\beta_{12}\beta_{21} \neq 0$:

$$c_2 = -\beta_{12}(1 - c)\,, \quad c_3 = \beta_{21}(1 + c)\,.$$

Die Gleichung $\varphi_4 = 0$ ist nach (10) immer erfüllt. Aus der Gleichung $\varphi_1 = 0$ folgt dann

$$(41)\qquad \varkappa[c_2 u_3^2 + (c_2 + 2\beta_{12})\, u_4^1] + u_1^1 + u_2^2 = \Theta_1\,.$$

Ähnlich folgt aus der Gleichung $\varphi_2 = 0$:

$$(42)\qquad \varkappa^2[-c_2 u_3^2] + \varkappa\left[u_3^3 - u_2^2 + \frac{c_2'}{c_2}\right] + \frac{1}{c_2}\, u_2^3 = \Theta_2\,.$$

Bei Benützung der Relationen (41), (42) bekommen wir aus der Gleichung $\varphi_5 = 0$ die Relation $c_2 = -\beta_{12}$, $(c = 0)$, $u_1^4 + u_2^3 = 0$ und endlich auch die Gleichung

$$(43)\qquad c_1 + c_4 + \beta_{11} - \beta_{22} = 0\,.$$

Aus der Gleichung $\varphi_6 = 0$ bekommen wir bei der Benützung der angeführten Bedingungen schon keine weiteren Bedingungen.

Für die Größen c_2, c_3 bekamen wir

$$(44)\qquad c_2 = -\beta_{12}\,, \quad c_3 = \beta_{21}:$$

die Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ werden durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ gebildet. Dann sind noch die Relationen:

$$u_1^3 = 0\,, \quad u_2^4 = 0\,, \quad u_1^4 + u_2^3 = 0$$

erfüllt. Aus diesen Gleichungen bekommen wir nach (10), (44), (43) die folgenden Relationen:

$$(45)\qquad \begin{aligned} -\beta_{12}' + 2\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) &= 0\,, \\ \beta_{21}' - 2\alpha_{21} - \tfrac{1}{2}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11}) &= 0\,, \\ \beta_{22}' - \beta_{11}' - 2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \tfrac{1}{2}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) &= 0\,. \end{aligned}$$

Bei der Erfüllung der Relationen (45) sind die Koeffizienten der Fleknodalform der Fläche Φ nach (6) Null gleich, die Fläche Φ ist also eine Quadrik. Auf der Quadrik Φ liegen zwei Kurven (A_4), (A_3), die im Intervall I keinen gemeinsamen Punkt haben. Die Fläche $R(4, 1)$, wird durch die Erzeugenden der zweiten Schar dieser Fläche längs der Kurve (A_4) gebildet. Durch die Erzeugenden derselben Schar, wie die Fläche $R(4, 1)$, wird ähnlich auch die Fläche $R(3, 2)$ längs der Kurve (A_3) gebildet.

d) Betrachten wir ein $P(4, 3)$-Paar und die zugehörige $E_1(4, 3)$-Schar. Die Fläche $R(4, 1)$ ist eine Brennfläche der $E_1(4, 3)$-Schar, die zweite Brennfläche bezeichnen wir mit $Q(4, 1)$.

Für den Punkt $\bar{R}$ der Erzeugenden der $E_1(4, 3)$-Schar gilt nach (35):

$$\bar{R} = A_1 + [c_2 + 2\beta_{12}]\,\varkappa A_4 + \vartheta[A_2 + c_2\varkappa A_3]\,; \tag{46}$$

$u, \varkappa$ sind die Parameter, die die Erzeugende der $E_1(4, 3)$-Schar bestimmen; der Parameter ϑ bestimmt also dann die Lage des Punktes $\bar{R}$ auf dieser Erzeugenden. Wir werden die Beziehung des Parameters ϑ in der Gleichung (46) und des Parameters v in der Gleichung (36) betrachten. Der Punkt $\bar{R}$ liegt auf der Transversalgeraden der Fläche $\Psi_1(4, 3)$, die durch den Punkt $A_4 + vA_3$ nur in dem Falle geht, wenn die Punkte

$$A_4 + vA_3\,, \quad c_2A_1 + (c_2 + 2\beta_{12})\,vA_2\,, \quad \bar{R}$$

linear abhängig sind. Dann bekommen wir:

$$\vartheta = \frac{1}{c_2}\,(c_2 + 2\beta_{12})\,v\,. \tag{47}$$

Wenn $\bar{R}$ der Brennpunkt der $E_1(4, 3)$-Schar ist, dann existiert die Differentialrichtung auf der $E_1(4, 3)$-Schar, für welche

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{R} &= \bar{\Theta}_1[A_1 + (c_2 + 2\beta_{12})\,\varkappa A_4] + \bar{\Theta}_2[A_2 + c_2\varkappa A_3]\,, \\ \bar{\Theta}_i &= \bar{\Theta}_i(u, \varkappa, \vartheta, \mathrm{d}u, \mathrm{d}\varkappa, \mathrm{d}\vartheta)\,, \quad i = 1, 2\,, \end{aligned} \tag{48}$$

gilt. Nach (46), (10) bekommen wir dann (immer unter der Voraussetzung $u_1^3 = 0$):

$$\begin{aligned} & A_1\,\mathrm{d}u[u_1^1 + (c_2 + 2\beta_{12})\,\varkappa u_4^1 + \vartheta u_2^1] + A_2\{\mathrm{d}u[u_1^2 + \vartheta u_2^2 + \vartheta c_2\varkappa u_3^2] + \mathrm{d}\vartheta\} + \\ & + A_3\{\mathrm{d}u[(c_2 + 2\beta_{12})\,\varkappa u_4^3 + \vartheta u_2^3 + \vartheta c_2'\varkappa + \vartheta c_2\varkappa u_3^3] + \vartheta c_2\,\mathrm{d}\varkappa + c_2\varkappa\,\mathrm{d}\vartheta\} + \\ & + A_4\{\mathrm{d}u[u_1^4 + (c_2' + 2\beta_{12}')\,\varkappa + (c_2 + 2\beta_{12})\,\varkappa u_4^4 + \vartheta u_2^4 + \vartheta c_2\varkappa u_3^4] + \\ & + \mathrm{d}\varkappa(c_2 + 2\beta_{12})\} = \bar{\Theta}_1[A_1 + (c_2 + 2\beta_{12})\,\varkappa A_4] + \bar{\Theta}_2[A_2 + c_2\varkappa A_3]\,. \end{aligned} \tag{49}$$

Durch die Vergleichung der Koeffizienten bei A_1 in der Gleichung (49) bekommen wir:

$$\bar{\Theta}_1 = \mathrm{d}u[u_1^1 + (c_2 + 2\beta_{12})\,\varkappa u_4^1 + \vartheta u_2^1]\,. \tag{50}$$

Ähnlich bekommen wir durch die Vergleichung der Koeffizienten bei A_2:

$$\overline{\Theta}_2 = \mathrm{d}u[u_1^2 + \vartheta u_2^2 + \vartheta c_2 \varkappa u_3^2] + \mathrm{d}\vartheta \,. \tag{51}$$

Durch die Vergleichung der Koeffizienten bei A_4 bekommen wir unter Benützung von (50):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varkappa(c_2 + 2\beta_{12}) = {} & \mathrm{d}u\{\vartheta[(c_2 + 2\beta_{12})\,\varkappa u_2^1 - c_2 \varkappa u_3^4 - u_2^4] + \\ & + [(c_2 + 2\beta_{12})\,\varkappa(u_1^1 - u_4^4) + (c_2 + 2\beta_{12})^2\,\varkappa^2 u_4^1 - (c_2' + 2\beta_{12}')\,\varkappa - u_1^4]\} \,. \end{aligned} \tag{52a}$$

Durch die Vergleichung der Koeffizienten bei A_3 bekommen wir unter Benützung von (51):

$$\begin{aligned} -\vartheta c_2\,\mathrm{d}\varkappa = {} & \mathrm{d}u[(c_2 + 2\beta_{12})\,\varkappa u_4^3 + \vartheta u_2^3 + \vartheta c_2' \varkappa + \vartheta c_2 \varkappa u_3^3 - \\ & - c_2\varkappa(u_1^2 + \vartheta u_2^2 + \vartheta c_2 \varkappa u_3^2)] \,. \end{aligned} \tag{52b}$$

Wenn wir aus der Gleichung (52a) $\mathrm{d}\varkappa$ berechnen ($c_2 + 2\beta_{12} \neq 0$ nach (10a)) und in die Gleichung (52b) einsetzen, dann bekommen wir

$$\begin{aligned} & c_2\vartheta^2\{-\Delta\varkappa - u_2^4\} + \vartheta\{\varkappa^2 c_2(c_2 + 2\beta_{12})(c_2 + \beta_{12}) + \\ & + \varkappa[c_2'(c_2 + 2\beta_{12}) - c_2(c_2' + 2\beta_{12}') + c_2(c_2 + 2\beta_{12})(u_3^3 - u_2^2 + u_1^1 - u_4^4)] + \\ & + [(c_2 + 2\beta_{12})\,u_2^3 - c_2 u_1^4]\} = 0 \,. \end{aligned} \tag{53}$$

Diese Gleichung bestimmt auf jeder Erzeugenden der $E_1(4, 3)$-Schar zwei Brennpunkte; ein Brennpunkt ($\vartheta = 0$) liegt immer auf der Fläche $R(4, 1)$ der zweite Brennpunkt liegt im allgemeinen auf der Fläche $R(4, 1)$ nicht.

Satz 7. *Die $E_1(4, 3)$-Schar hat dann und nur dann eine zweifache Brennfläche $R(4, 1)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Kurve (A_4) ist eine Fleknodalkurve der Fläche Φ, die Geraden (A_1, A_4) sind die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurve (A_4). Für den Parameter c_3, der die Lage der Geraden (A_2, A_3) bestimmt, gilt:*

$$\beta_{22}' - \beta_{11}' - 2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \tfrac{1}{2}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) + \beta_{12}(c_3 - \beta_{21}) = 0 \,. \tag{54}$$

Unter der Voraussetzung, daß (A_4) eine zweifache Fleknodalkurve der Fläche Φ ist, hat die $E_1(4, 3)$-Schar dann und nur dann eine zweifache Brennfläche $R(4, 1)$, wenn das $P(4, 3)$-Paar durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurven (A_4), (A_3) gebildet wird.

Beweis. Wenn die Relationen (53) für alle Werte von $\varkappa$, $u \in I$ eine zweifache Wurzel $\vartheta = 0$ haben, dann gilt nach (10), (53)

$$c_2 = -\beta_{12}\,, \quad u_2^3 + u_1^4 = 0\,, \quad u_3^3 - u_2^2 + u_1^1 - u_4^4 = 0\,.$$

Es ist klar, daß die Fläche $R(4, 1)$ durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurve (A_4) gebildet wird. Aus der dritten Relation folgt dann:

$$c_1 + c_4 = \beta_{22} - \beta_{11}\,. \tag{55}$$

Wir haben vorausgesetzt, daß $u_1^3 = 0$ gilt. Wenn wir in diese Relation $c_1 + c_4 = \beta_{22} - \beta_{11}$ (nach (55)) einsetzen, dann bekommen wir:

$$-\beta'_{12} + 2\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) = 0 \,. \tag{56}$$

Bei Gültigkeit von (56) ist die Kurve (A_4) eine Fleknodalkurve der Fläche Φ. Wenn wir in die Gleichung $u_2^3 + u_1^4 = 0$ die Relation $c_1 + c_4 = \beta_{22} - \beta_{11}$ (nach der Gleichung (55)) und weiter $c_2 = -\beta_{12}$ einsetzen und wenn wir die Relationen (10) benützen, dann bekommen wir (54).

Wenn noch die Relation

$$\beta'_{22} - \beta'_{11} - 2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \tfrac{1}{2}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) = 0$$

gilt, dann ist die Kurve (A_4) (nach (6), bei Gültigkeit von (56)) im Intervall I eine zweifache Fleknodalkurve der Fläche Φ. Die Relation (54) ist dann nur im Falle $c_3 = \beta_{21}$ erfüllt; die Fläche $R(3, 2)$ wird durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurve (A_3) gebildet.

Satz 8. *Die $E_1(4, 3)$-Schar hat die zweite Brennfläche in der Fläche $R(3, 2)$, wenn das zugehörige Paar $P(4, 3)$ das $\bar{P}_0(4, 3)$-Paar ist.*

Beweis. Aus der Gleichung (53) folgt in diesem Falle:

$$\Delta = 0 \,, \quad u_2^4 = 0 \,;$$

die Relation $u_1^3 = 0$ setzen wir voraus. Das zugehörige Paar $P(4, 3)$ ist das $\bar{P}_0(4, 3)$-Paar.

Im folgenden setzen wir voraus, daß das Paar P kein $\bar{P}_0(4, 3)$-Paar ist und daß für keinen Wert des Parameters $u \in I$ gleichzeitig $\Delta = 0$, $u_1^3 = 0$, $u_2^4 = 0$ gilt.

Satz 9. *Die Fläche $Q(4, 1)$, die zum Paare $P(4, 3)$ gehört, wird allgemein durch die kubischen Kurven k_1 gebildet, diese Kurven liegen auf den entsprechenden Flächen $\Psi_1(4, 3)$.*

Beweis. Aus der Gleichung (53) bekommen wir ϑ und ersetzen es in die Gleichung (46). Wenn wir x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten des beliebigen Punktes X in bezug zum Koordinatensystem mit den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 sind, d. h. wenn

$$X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4$$

gilt, dann bekommen wir für die Koordinaten des Brennpunktes $\bar{R}$ folgende Relationen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varkappa\Delta + u_2^4 \,, \\ x_2 &= \varkappa^2 c_2(c_2 + 2\beta_{12})(c_2 + \beta_{12}) + \varkappa[c'_2(c_2 + 2\beta_{12}) - c_2(c'_2 + 2\beta'_{12}) + \\ &\quad + c_2(c_2 + 2\beta_{12})(u_3^3 - u_2^2 + u_1^1 - u_4^4)] + [(c_2 + 2\beta_{12})\, u_2^3 - c_2 u_1^4] \,, \\ x_3 &= c_2 \varkappa x_2 \,, \\ x_4 &= [c_2 + 2\beta_{12}]\, \varkappa x_1 \,. \end{aligned} \tag{57}$$

Bei dem konstanten Werte von u ($\varkappa$ ist der Parameter), bildet der Punkt $\bar{R}$ allgemein eine kubische Kurve k_1. Die Kurve k_1 liegt nach **c**) auf der entsprechenden Quadrik $\Psi_1(4, 3)$ der $E_1(4, 3)$-Schar.

Wir bezeichnen mit:

$$
\begin{aligned}
(58)\quad \mathfrak{A}_2 &= c_2(c_2 + 2\beta_{12})(c_2 + \beta_{12}), \\
\mathfrak{A}_1 &= [c_2'(c_2 + 2\beta_{12}) - c_2(c_2' + 2\beta_{12}') + c_2(c_2 + 2\beta_{12})(u_3^3 - u_2^2 + u_1^1 - u_4^4)], \\
\mathfrak{A}_0 &= [(c_2 + 2\beta_{12})u_2^3 - c_2u_1^4].
\end{aligned}
$$

Die Kurve k_1 zerfällt, wenn die Determinante aus den Koeffizienten bei $\varkappa^3$, $\varkappa^2$, $\varkappa^1$, $\varkappa^0$ in der Gleichung (57) für irgendeinen Wert von $u \in I$ gleich Null ist. Diese Bedingung ist $\mathfrak{A}_2 = 0$, oder

$$(59)\qquad \mathfrak{A}_2[u_2^4]^2 + \Delta^2\mathfrak{A}_0 - u_2^4\mathfrak{A}_1\Delta = 0.$$

Satz 10. *Unter der Voraussetzung, daß P ein $P_2(4, 3)$-Paar ist, zerfallen die entsprechenden Kurven k_1 für alle Werte von $u \in I$, wenn die Fläche $R(4, 1)$ durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurve (A_4) oder durch die asymptotischen Tangenten der Fläche $\bar{\Phi}$ längs der Kurve $(\bar{A}_4)$ gebildet wird. (Längs der Kurve $(\bar{A}_4)$ berührt die Fläche $R(4, 1)$ die Fläche $\bar{\Phi}$). Wenn P das $P_1(4, 3)$-Paar ist, dann zerfallen die Kurven k_1 für alle Werte von $u \in I$, wenn die Fläche $R(4, 1)$ durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurve (A_4) gebildet wird.*

Beweis. Nach den Voraussetzungen gilt $c_2 \neq 0$, $c_2 + 2\beta_{12} \neq 0$ für alle Werte von u. Unter der Voraussetzung $\mathfrak{A}_2 = 0$ gilt dann $c_2 = -\beta_{12}$, die Fläche $R(4, 1)$ wird durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurve (A_4) gebildet. Wenn P ein $P_2(4, 3)$-Paar ist, dann kann man $u_2^4 = 0$ wählen ($u_1^3 = 0$ setzen wir immer voraus) und nach (59) bekommen wir unter Voraussetzung $\Delta \neq 0$ die folgende Relation:

$$\mathfrak{A}_0 = 0, \quad \text{d. h.} \quad (c_2 + 2\beta_{12})u_2^3 - c_2u_1^4 = 0.$$

Das ist nach (29) die Bedingung, daß die Geraden (A_1, A_4) asymptotische Tangenten der Fläche $\bar{\Phi}$ sind.

Im Falle der $P_2(t_0)(4, 3)$-Paare kann man $u_1^3 = u_2^4 = u_2^3 = u_1^4 = 0$ wählen und die angeführte Bedingung ist immer erfüllt.

Wenn P ein $P_1(4, 3)$-Paar ist, dann gilt $\Delta = 0$ und $\mathfrak{A}_2 = 0$ ist die einzige Bedingung des Zerfallens der Kurven k_1. Es gilt also $c_2 = -\beta_{12}$.

Betrachten wir nun den Fall, daß die Fläche $Q(4,1)$ durch die transversalen Erzeugenden der Flächen $\Psi_1(4, 3)$ gebildet wird.

Satz 11. *Die zum Paare $P_2(4, 3)$ gehörige Fläche $Q(4, 1)$ wird dann und nur dann durch die transversalen Erzeugenden der Flächen $\Psi_1(4, 3)$ gebildet, wenn die*

Erzeugenden der Fläche $R(4, 1)$ gleichzeitig asymptotische Tangenten der Flächen Φ, $\bar{\Phi}$ sind. Die zum $P_2(t_1)$ $(4, 3)$-, bzw. $P_2(t_2)$ $(4, 3)$-Paare gehörige Fläche $Q(4, 1)$ kann nicht durch die transversalen Geraden der entsprechenden Quadriken $\Psi_1(4, 3)$ gebildet werden. Die zum $P_2(t_0)$ $(4, 3)$-Paare gehörige Fläche $Q(4, 1)$ wird durch die transversalen Geraden der entsprechenden Quadriken $\Psi_1(4, 3)$ dann und nur dann gebildet, wenn die Fläche $R(4, 1)$ durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ gebildet wird.

Beweis. Wenn für alle Werte von $u \in I$ die Erzeugenden der Fläche $Q(4, 1)$ die transversalen Erzeugenden der Flächen $\Psi_1(4, 3)$ sind, dann gilt nach (47)

$$v = \frac{\vartheta c_2}{c_2 + 2\beta_{12}}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varkappa} = 0 . \tag{60}$$

ϑ ist die Lösung der Gleichung (53). Aus der ersten Gleichung (60) bekommen wir dann:

$$v = \frac{1}{c_2 + 2\beta_{12}} , \frac{\mathfrak{A}_2 \varkappa^2 + \mathfrak{A}_1 \varkappa + \mathfrak{A}_0}{\Delta \varkappa + u_2^4} . \tag{61}$$

Den Fall, daß $\Delta = u_1^3 = u_2^4 = 0$ für alle Werte von $u \in I$ gilt, haben wir im Satze 8 gelöst. Wir schließen wieder nun den Fall aus, daß für irgendeinen Wert $u = u_0 \in I$ gleichzeitig $\Delta = u_1^3 = u_2^4 = 0$ gilt. Aus der zweiten Gleichung (60) bekommen wir dann:

$$\varkappa^2[\mathfrak{A}_2 \Delta] + \varkappa[2\mathfrak{A}_2 u_2^4] + [\mathfrak{A}_1 u_2^4 - \Delta \mathfrak{A}_0] = 0 . \tag{62}$$

Diese Relation muß für alle Werte von $\varkappa$ erfüllt sein, es gilt also gleichzeitig:

$$\mathfrak{A}_2 \Delta = 0 , \quad \mathfrak{A}_2 u_2^4 = 0 , \quad \mathfrak{A}_1 u_2^4 - \Delta \mathfrak{A}_0 = 0 . \tag{63}$$

Setzen wir nun voraus, daß P ein $P_2(4, 3)$-Paar ist. Dann gilt $\Delta \neq 0$ und man kann $u_2^4 = u_1^3 = 0$ wählen. Die Relationen (63) haben dann nach (58) folgende Gestalt:

$$c_2 = -\beta_{12} , \quad (c_2 + 2\beta_{12})\, u_2^3 - c_2 u_1^4 = 0 . \tag{64}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß die Fläche $R(4, 1)$ durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ gebildet wird, aus der zweiten Gleichung folgt dann, daß die Fläche $R(4, 1)$ nach (29) durch die asymptotischen Tangenten der Fläche $\bar{\Phi}$ gebildet wird. Wenn $c_2 = -\beta_{12}$ gilt, dann sind die Relationen (63) auch für $\Delta \neq 0$, $u_1^3 = u_2^4 = u_2^3 = u_1^4 = 0$, d. h. für $P_2(t_0)$ $(4, 3)$-Paar erfüllt. Wenn P ein $P_2(t_1)$ $(4, 3)$-Paar ist, dann kann man $\Delta \neq 0$, $u_1^3 = u_2^4 = u_1^4 = 0$, $u_2^3 \neq 0$ wählen; die zweite Gleichung (64) ist nicht erfüllt. Ähnlich kann man den Fall des $P_2(t_2)$ $(4, 3)$-Paares betrachten.

Satz 12. *Die zum $P_1(4, 3)$-Paare gehörige Fläche $Q(4, 3)$ wird dann und nur dann durch die transversalen Geraden der Flächen $\Psi_1(4,3)$ gebildet, wenn die $E_1(4, 3)$-*

Schar zur Fleknodalkongruenz der Fläche Φ gehört und wenn (A_4) die Fleknodalkurve der Fläche Φ ist.

Beweis. Setzen wir voraus, daß P ein $P_1(4, 3)$-Paar ist, es gilt $\Delta = 0$ ($u_1^3 = 0$ haben wir schon vorausgesetzt). Wenn die Gleichungen (63) gelten, dann folgt $c_2 = -\beta_{12}$, die Fläche $R(4, 1)$ wird durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurve (A_4) gebildet. Weiter gilt $\mathfrak{A}_1 = 0$. Aus dieser Gleichung bekommen wir dann nach (21)

$$u_3^3 - u_2^2 + u_1^1 - u_4^4 = 0\,,$$

d. h. nach (10)

$$c_1 + c_4 = \beta_{22} - \beta_{11}\,. \tag{65}$$

Wenn wir aus der Gleichung (65) in die Gleichung $u_1^3 = 0$ einsetzen (die Gültigkeit dieser Gleichung setzen wir immer voraus), bekommen wir:

$$-\beta'_{12} + 2\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) = 0\,.$$

Die Kurve (A_4) ist die Fleknodalkurve der Fläche Φ.

Nach (53) gilt dann:

$$\vartheta = -\frac{u_2^3 + u_1^4}{u_2^4}$$

und nach (60) ist

$$v = \frac{u_2^3 + u_1^4}{u_2^4}\,. \tag{66}$$

Wenn wir $c_1 + c_4 = \beta_{22} - \beta_{11}$, $c_2 = -\beta_{12}$, $c_3 = \beta_{21}$ ($\Delta = 0$) in die Gleichung (66) einsetzen, dann bekommen wir nach (10):

$$v[\beta'_{21} - 2\alpha_{21} - \tfrac{1}{2}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11})] = \beta'_{22} - \beta'_{11} - 2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \\ - \tfrac{1}{2}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2)\,. \tag{67}$$

Da (A_4) die Fleknodalkurve der Fläche Φ ist, dann ist nach (6) die Kurve $(A_4 + vA_3)$, wo v die Lösung der Gleichung (67) ist und u der Parameter ist, die Fleknodalkurve der Fläche Φ. Die Erzeugenden

$$(A_4 + vA_3, -A_1 + vA_2) \tag{68}$$

der Flächen $\Psi_1(4, 3)$ (siehe (36)) bilden dann die Fläche $Q(4, 1)$, wenn v die Lösung der Gleichung (67) ist.

Es genügt nun zu beweisen, daß die nach (68) gegebenen Transversalerzeugenden der Flächen $\Psi_1(4, 3)$ für alle reellen Werte von v asymptotische Tangenten der Fläche Φ sind. Die Tangente der Fläche Φ im Punkte $A_4 + vA_3$ ist noch durch den

Punkt $A_4' + vA_3' + v'A_3$ bestimmt. Wenn dieser Punkt auf der Geraden (68) liegt, dann gilt:

$$v' = v^2 u_3^4 - v(u_3^3 - u_4^4) - u_4^3 .$$

Das ist nach (10), (5), (65) die Gleichung der Asymptotenkurven der Fläche Φ, die Transversalgeraden der Flächen $\Psi_1(4, 3)$ sind also asymptotische Tangenten der Fläche Φ, die $E_1(4, 3)$-Schar gehört zur Fleknodalkongruenz der Fläche Φ.

Satz 13. *Die Fläche Φ und ihre zwei Kurven (A_4), (A_3) seien gegeben. Die Kurven (A_4), (A_3) sollen im Intervall I keine gemeinsamen Punkte haben. Betrachten wir alle Flächen $R(3, 2)$ mit folgenden Eigenschaften: Die Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ bilden ein $P_2(4, 3)$-Paar. Die Brennflächen der entsprechenden $E_1(4, 3)$-Schar werden durch die Transversalgeraden der Flächen $\Psi_1(4, 3)$ gebildet. Die Erzeugenden der erwähnten Brennflächen sind von den entsprechenden Erzeugenden der Fläche $R(3, 2)$ verschieden. Dann finden wir alle diese Flächen $R(3, 2)$ allgemein durch die Lösung der Riccatischen Differentialgleichung. Wenn (A_4) die Fleknodalkurve der Fläche Φ ist, dann existiert höchstens eine solche Fläche, die entsprechende $E_1(4, 3)$-Schar gehört zur parabolischen Kongruenz. Wenn aber (A_4) eine zweifache Fleknodalkurve der Fläche Φ ist, dann existiert keine solche Fläche $R(3, 2)$.*

Beweis. Nach den Voraussetzungen und nach dem Satze 11 kann man

$$u_2^4 = u_1^3 = 0\,, \quad u_2^3 + u_1^4 = 0\,, \quad c_2 = -\beta_{12}\,, \quad \Delta \neq 0$$

wählen. Nach (15), (17) gilt dann:

$$c_1 = \frac{1}{\Delta}\left[-\varepsilon c_3 + \bar{\varepsilon}\beta_{12}\right], \quad c_4 = \frac{1}{\Delta}\left[-\varepsilon(c_3 - 2\beta_{21}) - \bar{\varepsilon}\beta_{12}\right], \tag{69}$$

$$\Delta = -\beta_{12}(c_3 - \beta_{21}) .$$

Wenn wir die Ausdrücke (69) in die Gleichung $u_1^4 + u_2^3 = 0$ einsetzen, dann bekommen wir nach (10), (15)

(70)

$$\begin{aligned}
&- \beta_{12}c_3'[2\varepsilon - \beta_{12}(\beta_{22} - \beta_{11})] + c_3^2\beta_{12}^3 + c_3\{\beta_{22}\beta_{12}[2\varepsilon - \beta_{12}(\beta_{22} - \beta_{11})] + \\
&+ [-2\varepsilon\beta_{12}' - \varepsilon\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) - 2\beta_{12}^2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - 2\beta_{12}^3\beta_{21} + 2\beta_{12}\varepsilon']\} + \\
&+ \{2\alpha_{21}\beta_{12}[2\varepsilon - \beta_{12}(\beta_{22} - \beta_{11})] - \beta_{21}[-2\varepsilon\beta_{12}' - 2\varepsilon\beta_{22}\beta_{12} - 2\beta_{12}^2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \\
&- \beta_{12}^3\beta_{21} + 2\varepsilon^2 + 2\beta_{12}\varepsilon']\} = 0 .
\end{aligned}$$

ε, ε' sind die Funktionen von c_2, u; (70) ist die Riccatische Differentialgleichung der Veränderlichen c_3. Diese Gleichung ist eine gewöhnliche quadratische Gleichung, wenn

$$2\varepsilon - \beta_{12}(\beta_{22} - \beta_{11}) = 0 \tag{71}$$

gilt. Nach (15) folgt dann:

$$2\beta'_{12} - 4\alpha_{12} - \beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) = 0\,;$$

(A_4) ist die Fleknodalkurve der Fläche Φ. Die Gleichung (70) hat dann die Gestalt:

$$\begin{aligned}(72)\quad & c_3^2\beta_{12} + c_3[(\beta'_{22} - \beta'_{11}) - 2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \tfrac{1}{2}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) - 2\beta_{12}\beta_{21}] - \\ & - \beta_{21}[(\beta'_{22} - \beta'_{11}) - 2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \tfrac{1}{2}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) - \beta_{12}\beta_{21}] = 0\,.\end{aligned}$$

Die Wurzel der Gleichung (72) sind $c_3 = \beta_{21}$,

$$-c_3\beta_{12} = [(\beta'_{22} - \beta'_{11}) - 2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \tfrac{1}{2}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) - \beta_{12}\beta_{21}]\,.$$

Die erste Wurzel schließen wir aus, bei der Gültigkeit von $c_3 = \beta_{21}$ gilt $\Delta = 0$ und P ist kein $P_2(4, 3)$-Paar. Dasselbe gilt auch im Falle

$$(73)\qquad \beta'_{22} - \beta'_{11} - 2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \tfrac{1}{2}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) = 0\,.$$

Dann ist (A_4) eine zweifache Fleknodalkurve der Fläche Φ.

Wenn $c_3 \neq \beta_{21}$ die zweite Wurzel der Gleichung (72) ist, dann gehört die $E_1(4, 3)$-Schar nach dem Satze 7 (54) zur parabolischen Kongruenz, die Fokalfläche dieser Kongruenz ist die Fläche $R(4, 1)$.

Satz 14. *Setzen wir voraus, daß $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ ein $P_2(4, 3)$-Paar bilden und daß die Fläche $R(4, 1)$ gleichzeitig durch die asymptotischen Tangenten der Flächen Φ, $\bar{\Phi}$ gebildet wird. Weiter sei (A_4) die Fleknodalkurve der Fläche $R(4, 1)$. Dann ist die Kurve $(\bar{A}_4)$ der Fläche $\bar{\Phi}$ auch fleknodal.*

Beweis. Wie im Satze 13 kann man $u_2^4 = u_1^3 = 0$, $u_2^3 + u_1^4 = 0$, $c_2 = -\beta_{12}$, $\Delta \neq 0$ wählen.

Setzen wir voraus, daß die Fläche $\bar{\Phi}$ die Gleichung

$$x = A_1 + \bar{v}A_2$$

hat. Unter unseren Voraussetzungen bekommt man nach (27), (17), (15):

$$\begin{aligned}(74)\qquad 4P_{12} - 2Q'_{12} + Q_{12}(Q_{22} + Q_{11}) &= -2\varepsilon + \beta_{12}(\beta_{22} - \beta_{11}) = \\ &= 4\alpha_{12} - 2\beta'_{12} + \beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11})\,.\end{aligned}$$

Wenn (A_4) die Fleknodalkurve der Fläche Φ ist, dann ist $(\bar{A}_4) \equiv (\mathbf{A}_1)$ nach (74), (6) die Fleknodalkurve der Fläche $\bar{\Phi}$.

e) Wir haben die zum Paare der Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ gehörende $E_1(4, 3)$-Schar betrachtet. Ähnlich kann man die $E_2(4, 3)$-Schar betrachten.

Wenn P das $P_0(4, 3)$-Paar ist, dann kann man $u_1^3 = u_2^4 = 0$, $\Delta = 0$ wählen und es gilt dann (siehe (35))

$$(A_2, A_3, A_1 + [c_2 + 2\beta_{12}]\varkappa A_4, d[A_2 + c_2\varkappa A_3]) = 0$$

für alle Werte von $\varkappa$ und für alle Werte von $u \in I$. Die $E_1(4, 3)$-Schar und die $E_2(4, 3)$-Schar fallen in eine Schar zusammen. Diese Schar bezeichnen wir mit $E(4, 3)$.

Betrachten wir nun das $P_0(4, 3)$-Paar. Weiter setzen wir voraus, daß die Punkte A_1, A_2 so gewählt sind, daß $u_1^3 = u_2^4 = 0$, $\Delta = 0$ gilt. Die Erzeugenden der $E_1(4, 3)$-Schar haben wir im **c)** betrachtet. In der Gleichung (32) setzen wir $\lambda_2 = \mu_2 = 1$, $\lambda_1 = \tau_1$, $\mu_1 = \tau_2$ ein. Leicht bekommen wir dann die Bedingung für die Erzeugenden der $E(4, 3)$-Schar:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{u_4^3}{u_1^2}, \quad \text{d. h.} \quad \tau_1 = \tau u_4^3, \quad \tau_2 = \tau u_1^2 .$$

Setzen wir voraus, daß $\tau = \tau(u)$ der Differentialklasse C^1 ist.

Die Erzeugenden der $E(4, 3)$-Schar sind durch die Punkte

$$(A_4 + \tau u_4^3 A_1, A_3 + \tau u_1^2 A_2)$$

bestimmt.

Wir wählen ein neues Koordinatensystem mit den Ecken in den Punkten

$$A_1^* = A_1, \quad A_2^* = A_2, \quad A_3^* = A_3 + \tau u_1^2 A_2, \quad A_4^* = A_4 + \tau u_4^3 A_1 . \tag{75}$$

Weiter wählen wir folgende Bezeichnung:

$$\mathrm{d}A_i^* = \omega_i^{k*} A_k^* = u_i^{k*} \,\mathrm{d}u A_k^*, \quad i, k = 1, 2, 3, 4 .$$

Dann bekommen wir nach (10):

$$\begin{aligned}
&\omega_1^{4*} = \omega_1^4, \quad \omega_1^{3*} = 0, \quad \omega_1^{2*} = \omega_1^2, \quad \omega_1^{1*} = \omega_1^1 - \tau u_4^3 u_1^4 \,\mathrm{d}u, \\
&\omega_2^{4*} = 0, \quad \omega_2^{3*} = \omega_2^3, \quad \omega_2^{1*} = \omega_2^1, \quad \omega_2^{2*} = \omega_2^2 - \tau u_2^3 u_1^2 \,\mathrm{d}u, \\
&\omega_3^{1*} = 0, \quad \omega_3^{2*} = \omega_3^2 + (\tau u_1^2)' \,\mathrm{d}u + \tau u_1^2 u_2^2 \,\mathrm{d}u - \tau u_1^2 (u_3^3 + \tau u_1^2 u_2^3) \,\mathrm{d}u, \\
&\omega_3^{3*} = \omega_3^3 + \tau u_1^2 u_2^3 \,\mathrm{d}u, \quad \omega_3^{4*} = \omega_3^4, \\
&\omega_4^{1*} = \omega_4^1 + (\tau u_4^3)' \,\mathrm{d}u + \tau u_4^3 u_1^1 \,\mathrm{d}u - \tau u_4^3 (u_4^4 + \tau u_4^3 u_1^4) \,\mathrm{d}u, \\
&\omega_4^{2*} = 0, \quad \omega_4^{3*} = \omega_4^3, \quad \omega_4^{4*} = \omega_4^4 + \tau \omega_4^3 u_1^4 \,\mathrm{d}u .
\end{aligned} \tag{76}$$

In den Gleichungen (75) setzten wir voraus, daß τ eine gegebene Funktion des Parameters u ist.

Satz 15. *In der $K(4, 3)$-Schar, die zum $P_0(4, 3)$-Paar gehört, existieren höchstens zwei Flächen Φ^* mit folgenden Eigenschaften: Die Flächen Φ^* haben im Intervall I keine Torsalerzeugenden. Die Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ werden durch die asymptotischen Tangenten der beliebigen Fläche Φ^* längs ihrer Kurven (A_4^*), (A_3^*) gebildet. Diese zwei Flächen fallen dann zusammen, wenn diese zwei Kurven (A_4^*), (A_3^*) Fleknodalkurven der erwähnten Fläche Φ^* sind.*

Beweis. Die Differentialgleichungen der Leitkurven der Fläche Φ haben die Gestalt:

$$A_4'' = \alpha_{11}A_4 + \alpha_{12}A_3 + \beta_{11}A_4' + \beta_{12}A_3',$$
$$A_3'' = \alpha_{21}A_4 + \alpha_{22}A_3 + \beta_{21}A_4' + \beta_{22}A_3'$$

(siehe auch (2)). Daraus folgt nach (10):

$$\beta_{12} = \frac{1}{u_3^2}[u_4^1u_1^2 + u_4^3u_3^2], \quad \beta_{21} = \frac{1}{u_4^1}[u_3^2u_2^1 + u_3^4u_4^1]. \tag{77}$$

In der $E(4, 3)$-Schar betrachten wir eine Regelfläche Φ^* und setzen wir voraus, daß sie im I keine Torsalerzeugende hat. Dann folgt nach (76) für alle Werte von $u \in I$: $u_3^{2*}u_4^{1*} \neq 0$. Für die Kurven (A_4^*), (A_3^*) kann man ähnliche Differentialgleichung wie für die Kurven (A_4), (A_3) einführen, man muß noch * zufügen.

Wir bekommen leicht die Bedingung, daß die Fläche $R(4, 1)$ durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurve (A_4) gebildet wird:

$$(A_4, A_4' - \tfrac{1}{2}\beta_{12}A_3) = \bar{\Theta}(A_4, A_1), \quad \bar{\Theta} = \bar{\Theta}(u).$$

Dann bekommen wir nach (77)

$$u_4^3u_3^2 - u_4^1u_1^2 = 0. \tag{78a}$$

Ähnlich hat die Bedingung, daß die Fläche $R(3, 2)$ durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurve (A_3) gebildet wird, folgende Gestalt:

$$u_3^4u_4^1 - u_3^2u_2^1 = 0. \tag{78b}$$

Leicht bekommen wir die Bedingung, daß $R(4, 1)$ durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ^* längs der Kurve (A_4^*) gebildet wird.

$$u_4^{3*}u_3^{2*} - u_4^{1*}u_1^{2*} = 0. \tag{79a}$$

Die Fläche $R(3, 2)$ wird durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ^* längs der Kurve (A_3^*) gebildet, wenn

$$u_3^{4*}u_4^{1*} - u_3^{2*}u_2^{1*} = 0 \tag{79b}$$

gilt. Für die $P_0(4, 3)$-Paare gelten die Relationen (21), aus den Gleichungen (76) bekommen wir leicht nach (10):

$$u_1^{2*} = u_1^2 = -\tfrac{1}{2}\beta_{12}(1 + c), \quad u_4^{3*} = u_4^3 = \tfrac{1}{2}\beta_{12}(1 - c),$$
$$u_2^{1*} = u_2^1 = -\tfrac{1}{2}\beta_{21}(1 - c), \quad u_3^{4*} = u_3^4 = \tfrac{1}{2}\beta_{21}(1 + c).$$

Wenn die Fläche $R(4, 1)$ durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ^* längs der Kurve (A_4^*) gebildet wird, dann (im Falle des $P_0(4, 3)$-Paares) wird die Fläche

$R(3, 2)$ durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ^* längs der Kurve (A_3^*) gebildet. Das folgt aus den letzten Gleichungen und aus den Gleichungen (79a), (79b). Im folgenden beschränken wir uns auf die Gleichung (79a).

Wenn wir in diese Gleichung nach (76), (10) einsetzen, dann bekommen wir:

$$(79)\quad (1 - c)\{-\tfrac{1}{4}\beta_{12}^2(1 + c)^2 u_2^3\tau^2 + \tau[\tfrac{1}{2}\beta_{12}(1 + c)\, c_4 - \tfrac{1}{2}\beta'_{12}(1 + c) - - \tfrac{1}{2}\beta_{12}\beta_{22}(1 + c) - \tfrac{1}{2}\beta_{12}c'] - \tfrac{1}{2}\} + (1 + c)\{-\tfrac{1}{4}\beta_{12}^2(1 - c)^2 u_1^4\tau^2 + + \tau[\tfrac{1}{2}\beta_{12}(1 - c)\, c_1 + \tfrac{1}{2}\beta'_{12}(1 - c) + \tfrac{1}{2}\beta_{12}\beta_{11}(1 - c) - \tfrac{1}{2}\beta_{12}c'] + \tfrac{1}{2}\} = 0\,;$$

c_1, c_4 ist die Lösung der Gleichungen $u_1^3 = u_2^4 = 0$, wenn $c_2 = -\beta_{12}(1 - c)$, $c_3 = = \beta_{21}(1 + c)$ gilt. Nach (10) gilt also:

(80)

$$\tfrac{1}{2}\beta_{12}c_1(1 - c) + \tfrac{1}{2}\beta_{12}c_4(1 + c) - \beta'_{12}(1 - c) + \beta_{12}c' + 2\alpha_{12} + \beta_{11}\beta_{12}(1 - c) = 0\,,$$
$$\tfrac{1}{2}\beta_{21}c_1(1 - c) + \tfrac{1}{2}\beta_{21}c_4(1 + c) + \beta'_{21}(1 + c) + \beta_{21}c' - 2\alpha_{21} - \beta_{21}\beta_{22}(1 + c) = 0\,.$$

Die Gleichung (79) ist für τ quadratisch, im Intervall I können also höchstens zwei nicht abwickelbare Flächen (A_3^*, A_4^*) ohne Torsalgeraden existieren, daß die Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ des Paares $P_0(4, 3)$ durch ihre asymptotischen Tangenten gebildet werden.

Für die Vereinfachung der folgenden Betrachtungen setzen wir voraus, daß eine dieser Flächen die Fläche Φ ist. Dann gilt $c = 0$. Bei Benützung von (80) bekommen wir für die zweite Wurzel der Gleichung (79):

$$(81)\qquad -\tfrac{1}{4}\beta_{12}^2(u_2^3 + u_1^4)\,\tau + \beta'_{12} - 2\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) = 0\,.$$

Wenn auch die zweite Wurzel gleich Null ist ($\tau = 0$), dann ist (A_4) nach (6) die Fleknodalkurve der Fläche Φ.

Finden wir noch die geometrischen Eigenschaften des Falles, daß die Koeffizienten bei τ, τ^0 in der Gleichung (81) für alle Werte von $u \in I$ gleich Null sind. Dann gilt:

$$\beta'_{12} - 2\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) = 0\,, \quad u_2^3 + u_1^4 = 0\,.$$

Aus der Gleichung $u_1^3 = 0$ folgt dann:

$$c_1 + c_4 = \beta_{22} - \beta_{11}\,.$$

Die Fläche Φ ist nach dem Satze 6 eine Quadrik und die Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ werden durch die Paare der Erzeugenden der zweiten Schar (d. h. einer anderen Schar, als die Fläche Φ) der Quadrik gebildet.

f) Wir werden nun die geometrischen Eingenschaften der Inflexmittelpunkte der dreiparametrischen $K(4, 3)$-Schar betrachten.

Setzen wir ein bewegliches Koordinatensystem mit den Eckpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 nach (9) voraus. Es gilt also:

$$A_1 = c_1A_4 + c_2A_3 + 2A'_4\,, \quad A_2 = c_3A_4 + c_4A_3 - 2A'_3\,.$$

Die geometrische Bedeutung der Kurven (A_4), (A_3) und der Fläche $\Phi = (A_4, A_3)$ sei dieselbe wie in den Abschnitten **a)**–**e)**. $c_2 = c_2(u)$, $c_3 = c_3(u)$ seien die gegebenen Funktionen der Differentialklasse C^2. Es ist also das Paar der Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ gegeben. Die Fläche Φ ist eine Quasifleknodalfläche dieses Paares. c_1, c_4 seien die Parameter. Dann gehören die zu allen Werten der Parameter c_1, c_4 entsprechenden Geraden (A_1, A_2) zur $K(4, 3)$-Schar. Zur $K(4, 3)$-Schar gehören noch die Erzeugenden der Fläche Φ und weiter alle Geraden, die immer durch einen Punkt A_4 gehen und die die ensprechende (d. h. für denselben Wert des Parameters u) Erzeugende der Fläche $R(3, 2)$ durchschneiden. Ähnlich gehören zur $K(4, 3)$-Schar die Geraden, die immer durch einen Punkt A_3 gehen und die die entsprechende Erzeugende der Fläche $R(4, 1)$ durchschneiden. Die dreiparametrische Schar der Geraden (A_1, A_2) bezeichnen wir mit $T(4, 3)$.

Wir transformieren nun die Parameter c_1, c_4:

$$c_1 = 2\beta - \varrho\,, \quad c_4 = 2\beta + \varrho\,. \tag{82}$$

Die neuen Parameter sind β, ϱ. Nach (9) bekommen wir dann:

$$A_1 = (2\beta - \varrho)\,A_4 + c_2A_3 + 2A_4'\,, \quad A_2 = (2\beta + \varrho)\,A_3 + c_3A_4 - 2A_3'\,. \tag{83}$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{d}A_i = \omega_i^k A_k\,, \quad i, k = 1, 2, 3, 4\,,$$

$$\begin{gathered}\omega_1^1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}u[2\beta - \varrho + 2\beta_{11}]\,, \quad \omega_1^2 = -\tfrac{1}{2}\mathrm{d}u(c_2 + 2\beta_{12})\,, \quad \omega_1^3 = \mathrm{d}u\,\Omega_{12}\,,\\ \omega_1^4 = 2\mathrm{d}\beta - \mathrm{d}\varrho + a_{14}\,\mathrm{d}u\,,\\ \omega_2^1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}u(c_3 - 2\beta_{21})\,, \quad \omega_2^2 = -\tfrac{1}{2}\mathrm{d}u[2\beta + \varrho - 2\beta_{22}]\,,\\ \omega_2^3 = 2\mathrm{d}\beta + \mathrm{d}\varrho + a_{23}\,\mathrm{d}u\,, \quad \omega_2^4 = \mathrm{d}u\,\Omega_{21}\,,\\ \omega_3^1 = 0\,, \quad \omega_3^2 = -\tfrac{1}{2}\mathrm{d}u\,, \quad \omega_3^3 = \tfrac{1}{2}(2\beta + \varrho)\,\mathrm{d}u\,, \quad \omega_3^4 = \tfrac{1}{2}c_3\,\mathrm{d}u\,,\\ \omega_4^1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}u\,, \quad \omega_4^2 = 0\,, \quad \omega_4^3 = -\tfrac{1}{2}c_2\,\mathrm{d}u\,, \quad \omega_4^4 = -\tfrac{1}{2}(2\beta - \varrho)\,\mathrm{d}u\,.\end{gathered} \tag{84}$$

Wir haben folgende Bezeichnung gebraucht:

$$\begin{aligned}\Omega_{12} &= 2\beta\beta_{12} + \varrho(c_2 + \beta_{12}) + c_2' + 2\alpha_{12} - c_2\beta_{11}\,,\\ \Omega_{21} &= 2\beta\beta_{21} + \varrho(c_3 - \beta_{21}) + c_3' - 2\alpha_{21} - c_3\beta_{22}\,,\\ a_{14} &= 2\alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(2\beta - \varrho)^2 - \beta_{11}(2\beta - \varrho) + \tfrac{1}{2}c_3(c_2 + 2\beta_{12})\,,\\ a_{23} &= -2\alpha_{22} + \tfrac{1}{2}(2\beta + \varrho)^2 - \beta_{22}(2\beta + \varrho) - \tfrac{1}{2}c_2(c_3 - 2\beta_{21})\,.\end{aligned} \tag{84a}$$

In diesem Abschnitt und im Abschnitt **g)** haben ω_i^k, $i, k = 1, 2, 3, 4$, eine andere Form, als in den vorangehenden Abschnitten.

Betrachten wir die Riccatischen Scharen der Kurven der Regelfläche Φ mit folgenden Eigenschaften: Die Tangenten der Kurven jeder solchen Schar längs der Kurve (A_4) sind die Geraden (A_4, A_1); die Tangenten der Kurven jeder solchen Schar längs der Kurve (A_3) sind die Geraden (A_3, A_2). Wenn die Gleichung der Fläche Φ die Form (4) hat, dann hat die Differentialgleichung der angeführten Riccatischen Scharen der Kurven die folgende Form:

$$v' - \tfrac{1}{2}c_2 + 2\vartheta(u)\, v - \tfrac{1}{2}c_3 v^2 = 0\,. \tag{85}$$

Wir setzen voraus, daß $\vartheta = \vartheta(u)$ die Funktion der Differentialklasse C^1 ist.

Die Tangenten der gegebenen Riccatischen Schar (85) (d. h. ϑ ist eine gegebene Funktion des Parameters u) längs der Erzeugenden der Fläche Φ bilden eine Quadrik $\Psi(4, 3)$. Ihre Erzeugenden, die die Tangenten der Fläche Φ sind, nennen wir *transversale* Erzeugenden der Fläche $\Psi(4, 3)$. Die Erzeugenden zweiter Schar sind die *konkordanten* Erzeugenden der Fläche $\Psi(4, 3)$.

Betrachten wir noch die geometrischen Eigenschaften der Transformation (82). Die konkordanten Geraden der zum System (85) gehörigen Quadriken gehören bei der gegebenen Funktion $\vartheta = \vartheta(u)$ und für alle Werte von $u \in I$ zur $T(4,3)$-Schar. Die Erzeugenden der Fläche Φ schließen wir aus. Für die angeführten Erzeugenden der $T(4, 3)$-Schar gilt dann:

$$(A_1, A_2, A_4 + vA_3, \quad A_4' + vA_3' + v'A_3) = 0\,.$$

v' genügt der Differentialgleichung (85). Nach (84) bekommen wir dann leicht:

$$v[2\beta - 2\vartheta] = 0\,.$$

Wenn wir also in den Gleichungen (83) $\beta = \beta(u)$ wählen, dann bekommen wir eine zweiparametrische Schar der Geraden (A_1, A_2); die Geraden dieser Schar sind die konkordanten Geraden, die zur Riccatischen Schar

$$v' - \tfrac{1}{2}c_2 + 2\beta(u)\, v - \tfrac{1}{2}c_3 v^2 = 0 \tag{86}$$

gehören.

Satz 16. *Die Quadrik $\Psi_1(4, 3)$ wird immer durch die konkordanten Geraden der Schar (86) dann und nur dann gebildet, wenn die Fläche $R(4, 1)$ durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurve (A_4) gebildet wird.*

Beweis. Wenn die Gerade (A_1, A_2) die Fläche $R(4, 1)$ berührt, dann gilt:

$$(A_1, A_2, A_4, \mathrm{d}A_1) = 0\,.$$

Es gilt also $\omega_1^3 = 0$. Nach (84) bekommen wir dann:

$$2\beta\beta_{12} + \varrho(c_2 + \beta_{12}) + c_2' + 2\alpha_{12} - c_2\beta_{11} = 0\,.$$

Diese Relation hängt von ϱ nur in dem Falle nicht ab, wenn $c_2 = -\beta_{12}$ gilt, d. h. wenn (A_4, A_1) die asymptotische Tangente der Fläche Φ im Punkte der Kurve (A_4)

ist. Wenn wir die Gültigkeit dieser Relation für alle Werte von $u \in I$ voraussetzen, dann gilt für β:

$$2\beta\beta_{12} - \beta'_{12} + 2\alpha_{12} + \beta_{12}\beta_{11} = 0\,. \tag{87}$$

Aus der Relation (87) kann man β berechnen. Die Größe β bestimmt die gesuchte Riccatische Schar (86) auf der Fläche Φ.

Die Gültigkeit des Satzes 16 folgt auch aus dem Satze 5.

Satz 17. *Setzen wir voraus, daß $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ ein $P_0(4, 3)$-Paar bilden. Die Kurven (A_4), (A_3) seien im I im Sinne von Terracini konjugiert. Die Kurven (A_4), (A_3) seien weiter zu zwei Asymptotenkurven der Fläche Φ apolar. Bei der Gültigkeit dieser Bedingungen gehört die $T(4, 3)$-Schar zum linearen Komplex.*

Beweis. Im Kleinschen Raum P_5 betrachten wir ein bewegliches Koordinatensystem mit den Ecken (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_3, A_4). Wenn $T(4, 3)$ zum linearen Komplex gehört, dann liegen die Kleinschen Bilder der Geraden (A_1, A_2) in einer Hyperebene des Raumes P_5.

Wenn wir mit

$$\bar{r} = \lambda_1(A_1, A_2) + \lambda_2(A_1, A_3) + \lambda_3(A_1, A_4) + \lambda_4(A_2, A_3) + \lambda_5(A_2, A_4) + \lambda_6(A_3, A_4)$$

den Pol dieser Hyperebene in bezug zur Kleinschen Quadrik bezeichnen, dann gilt $\lambda_6 = 0$ und

$$d\bar{r} = \Gamma \,.\, \bar{r}\,, \quad \Gamma = \Gamma(u, \beta, \varrho, du, d\beta, d\varrho)\,. \tag{88}$$

Die Bedingung (88) ist bei Benützung von den Gleichungen (84) dann erfüllt, wenn folgende Relationen gelten:

$$\begin{aligned} \text{(89a)}\quad & d\lambda_1 + \lambda_1[\tfrac{1}{2}\, du(2\beta - \varrho + 2\beta_{11}) - \tfrac{1}{2}\, du(2\beta + \varrho - 2\beta_{22})] - \tfrac{1}{2}\lambda_2\, du - \\ & \qquad - \tfrac{1}{2}\lambda_5\, du - \Gamma\lambda_1 = 0\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(89b)}\quad & d\lambda_2 + \lambda_1[2d\beta + d\varrho + a_{23}\, du] + \lambda_2\, du[2\beta + \beta_{11}] - \tfrac{1}{2}c_2\lambda_3\, du + \\ & \qquad + \tfrac{1}{2}\lambda_4\, du(c_3 - 2\beta_{21}) - \Gamma\lambda_2 = 0\,, \end{aligned}$$

$$\text{(89c)}\quad d\lambda_3 + \lambda_1\, du\, \Omega_{21} + \tfrac{1}{2}c_3\lambda_2\, du + \lambda_3\beta_{11}\, du + \tfrac{1}{2}\lambda_5\, du(c_3 - 2\beta_{21}) - \Gamma\lambda_3 = 0\,,$$

$$\text{(89d)}\quad d\lambda_4 - \lambda_1\, du\, \Omega_{12} - \tfrac{1}{2}\lambda_2\, du(c_2 + 2\beta_{12}) + \lambda_4\beta_{22}\, du - \tfrac{1}{2}\lambda_5 c_2\, du - \Gamma\lambda_4 = 0\,,$$

$$\begin{aligned} \text{(89e)}\quad & d\lambda_5 - \lambda_1[2\, d\beta - d\varrho + a_{14}\, du] - \tfrac{1}{2}\lambda_3\, du(c_2 + 2\beta_{12}) + \tfrac{1}{2}c_3\lambda_4\, du + \\ & \qquad + \lambda_5\, du[-2\beta + \beta_{22}] - \Gamma\lambda_5 = 0\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(89f)}\quad & -\lambda_2[2\, d\beta - d\varrho + a_{14}\, du] + \lambda_3\, du\, \Omega_{12} - \lambda_4\, du\, \Omega_{21} + \\ & \qquad + \lambda_5[2\, d\beta + d\varrho + a_{23}\, du] = 0\,. \end{aligned}$$

(λ_1, λ_2 haben eine andere Bedeutung als im Abschnitt **c**).)

u, β, ϱ sind die unabhängigen Parameter, aus der Gleichung (89f) folgt dann $\lambda_2 = \lambda_5 = 0$,

$$\lambda_3 \Omega_{12} - \lambda_4 \Omega_{21} = 0 . \tag{90}$$

Aus der Gleichung (89e) bekommen wir bei Benützung der Gleichung (90) die Relation $\lambda_1 = 0$ und

$$-\tfrac{1}{2}\lambda_3(c_2 + 2\beta_{12}) + \tfrac{1}{2}\lambda_4 c_3 = 0 . \tag{91a}$$

Ähnlich bekommen wir aus der Gleichung (89b) die folgende Relation:

$$-\tfrac{1}{2}c_2\lambda_3 + \tfrac{1}{2}\lambda_4(c_3 - 2\beta_{21}) = 0 . \tag{91b}$$

Wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0$ gilt, dann ist die Gleichung (89a) erfüllt. Die Gleichungen (91) haben allgemein die Lösung $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$. Dann gilt aber $\lambda_i = 0$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Diese Lösung schließen wir aus. Eine andere Lösung bekommen wir nur dann, wenn $\Delta = 0$ gilt. Die Lösung der Gleichungen (91) ist dann: unter Voraussetzung $\beta_{12}\beta_{21} \neq 0$

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_4} = \frac{\beta_{21}}{\beta_{12}} . \tag{92}$$

Wenn wir die angeführten Relationen benützen, dann folgt aus den Gleichungen (89d), (89c):

$$\mathrm{d}\lambda_4 + \lambda_4 \,\mathrm{d}u\beta_{22} - \Gamma\lambda_4 = 0, \quad \mathrm{d}\lambda_3 + \lambda_3 \,\mathrm{d}u\beta_{11} - \Gamma\lambda_3 = 0. \tag{93}$$

Durch Ausschließen der Größe Γ aus den Gleichungen (93) bekommen wir:

$$-\mathrm{d}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_4}\right) + \frac{\lambda_3}{\lambda_4}(\beta_{22} - \beta_{11})\,\mathrm{d}u = 0 . \tag{94}$$

Aus der Gleichung (94) folgt nach (92) die Bedingung (8). Wenn die $T(4, 3)$-Schar zum linearen Komplex gehört, dann sind die Kurven (A_4), (A_3) zum Paare der Asymptotenkurven der Fläche Φ apolar.

Es gilt noch die Bedingung (90). Wenn wir die Gleichungen (8), (21) benützen, dann folgt aus der Gleichung (90) die Relation (7), d. h. die Relation der Konjugiertheit der Kurven (A_4), (A_3) auf der Fläche Φ im Sinne von Terracini. Unter den im Satze angeführten Voraussetzungen gehört die $T(4, 3)$-Schar zum linearen Komplex. Das sekundäre Bild dieses Komplexes im Kleinschen Raum P_5 ist nach (92) der Punkt

$$\bar{r} = \beta_{21}(A_1, A_4) + \beta_{12}(A_2, A_3) . \tag{95}$$

Zu der $K(4, 3)$-Schar gehören außer der $T(4, 3)$-Schar die Erzeugenden der Fläche Φ und die Geraden

$$(A_4, A_2 + \bar{\varrho}_2 A_3), \quad (A_3, A_1 + \bar{\varrho}_1 A_4), \quad \bar{\varrho}_i = \bar{\varrho}_i(u, \beta, \varrho), \quad i = 1, 2 .$$

Diese Geraden gehören nach (95) auch zum angeführten linearen Komplex. Unter den im Satze angeführten Voraussetzungen gehört $K(4, 3)$ zum linearen Komplex. Nach dem Satze 3 bilden die Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ ein $P_0(4, 3)$-Paar.

g) Setzen wir voraus, daß $T(4, 3)$ nicht zum linearen Komplex gehört. Wir werden die nicht auf den Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ liegenden Inflexmittelpunkte der Erzeugenden der $T(4, 3)$-Schar suchen.

Betrachten wir den Punkt M im Raume P_3

$$M = A_1 + tA_2 \tag{96}$$

und setzen wir voraus, daß dieser Punkt nicht auf den Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ liegt. Wir betrachten weiter alle durch M gehenden Erzeugenden der $T(4, 3)$-Schar. Diese Geraden gehören allgemein zur Kegelfläche. Mit Hilfe der Gleichungen (84) bekommen wir leicht die Bedingung, daß der Punkt M fest ist.

$$\begin{aligned} 4t\,\mathrm{d}\beta &= \mathrm{d}u[-t^2\Omega_{21} - t(a_{23} + a_{14}) - \Omega_{12}]\,, \\ 2t\,\mathrm{d}\varrho &= \mathrm{d}u[t^2\Omega_{21} - t(a_{23} - a_{14}) - \Omega_{12}]\,, \end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{d}t - t^2[\tfrac{1}{2}(c_3 - 2\beta_{21})]\,\mathrm{d}u + t[-\tfrac{1}{2}(2\beta + \varrho - 2\beta_{22}) - \tfrac{1}{2}(2\beta - \varrho + 2\beta_{11})]\,\mathrm{d}u + \\ + [-\tfrac{1}{2}(c_2 + 2\beta_{12})]\,\mathrm{d}u = 0\,. \end{gathered}$$

Die Tangentenebene Π des Komplexkegels im Punkte M längs der gegebenen Erzeugenden der $T(4, 3)$-Schar $(u = u_0, \varrho = \varrho_0, \beta = \beta_0)$ ist durch die Punkte A_1, A_2, $\mathrm{d}A_1$ bestimmt; die Differentialrichtung ist durch die Gleichungen (97) gegeben. Dann folgt nach (84)

$$\Pi = \Omega_{12}(A_1, A_2, A_3) - t\Omega_{21}(A_1, A_2, A_4)\,. \tag{98}$$

Wenn M der Inflexmittelpunkt der betrachteten Geraden (A_1, A_2) ist, dann gilt für die angeführte Tangentenebene:

$$\mathrm{d}\Pi = \chi\Pi\,, \quad \chi \doteq \chi(u, \beta, t, \varrho, \mathrm{d}u)\,. \tag{99}$$

Aus den Gleichungen (98) folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Pi = {} & (A_1, A_2, A_3)\,\{\mathrm{d}\Omega_{12} + \Omega_{12}[\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3] - t\omega_4^3\Omega_{21}\} + \\ & + (A_1, A_2, A_4)\,\{-\mathrm{d}t\,\Omega_{21} - t\,\mathrm{d}\Omega_{21} + \omega_3^4\Omega_{12} - t\Omega_{21}[\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_4^4]\} + \\ & + (A_1, A_3, A_4)\,\{-\omega_2^4\Omega_{12} - t\omega_2^3\Omega_{21}\} + (A_2, A_3, A_4)\,\{\omega_1^4\Omega_{12} + t\omega_1^3\Omega_{21}\}\,. \end{aligned} \tag{100}$$

Die Koeffizienten der Glieder (A_1, A_3, A_4), (A_2, A_3, A_4) sind unter den Voraussetzungen der Gültigkeit der Gleichungen (97) Null gleich. Es bleibt nach (99) nur eine Bedingung:

$$
\begin{aligned}
(101) \qquad & t^2\Omega_{21}\{c_2\Omega_{21} - \Omega_{12}(c_3 - 2\beta_{21})\} + \\
& + t\{\Omega_{21}[-\tfrac{1}{2}\beta_{12}(a_{23} + a_{14}) - \tfrac{1}{2}(c_2 + \beta_{12})(a_{23} - a_{14})] + \\
& + \Omega_{21}[2\beta\beta'_{12} + \varrho(c'_2 + \beta'_{12}) - \varepsilon'] + \\
& + \Omega_{12}[\tfrac{1}{2}\beta_{21}(a_{23} + a_{14}) + \tfrac{1}{2}(c_3 - \beta_{21})(a_{23} - a_{14})] - \\
& - \Omega_{12}[2\beta\beta'_{21} + \varrho(c'_3 - \beta'_{21}) - \bar{\varepsilon}'] + \Omega_{12}\Omega_{21}(\beta_{22} - \beta_{11})\} + \\
& + \Omega_{12}\{-\Omega_{21}(c_2 + 2\beta_{12}) + c_3\Omega_{12}\} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Satz 18. *Setzen wir voraus, daß das P-Paar ein $P_0(4, 3)$-Paar ist und die entsprechende $T(4, 3)$-Schar nicht zum linearen Komplex gehört. Betrachten wir weiter nur solche Erzeugenden der $T(4, 3)$-Schar, die eine endliche Zahl von Inflexmittelpunkten haben. Die Inflexmittelpunkte dieser Erzeugenden liegen nur in den entsprechenden Punkten der Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$.*

Beweis. Betrachten wir den Fall, daß die Koeffizienten bei dem quadratischen und bei dem absoluten Gliede der Gleichung (101) für alle Werte von $\beta, \varrho, u \in I$ gleich Null sind. Unter der Voraussetzung, daß der Koeffizient bei dem linearen Gliede nicht Null gleich ist, dann hat die Gleichung (101) keine endliche Lösung $t \neq 0$. Die Inflexmittelpunkte der entsprechenden Geraden liegen nur auf den Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$.

Setzen wir $\Omega_{21} = 0$ für alle Werte der Parameter $\beta, \varrho, u \in I$ voraus. Nach (84) gilt dann $c_3 = 0$. Diesen Fall schließen wir aus. Der Koeffizient des quadratischen Gliedes in der Gleichung (101) ist nur in dem Falle

$$(102a) \qquad c_2\Omega_{21} - \Omega_{12}(c_3 - 2\beta_{21}) = 0$$

für alle Werte von $\beta, \varrho, u \in I$ Null gleich. Wenn wir in die Gleichung (102a) für Ω_{12}, Ω_{21} nach (84a) einsetzen, dann bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
& c_2[2\beta\beta_{21} + \varrho(c_3 - \beta_{21}) + c'_3 - 2\alpha_{21} - c_3\beta_{22}] - \\
& - (c_3 - 2\beta_{21})[2\beta\beta_{12} + \varrho(c_2 + \beta_{12}) + c'_2 + 2\alpha_{12} + c_2\beta_{11}] = 0\,.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung gilt im Falle $\beta_{12}\beta_{21} \neq 0$ dann und nur dann für alle Werte von $\beta, \varrho, u \in I$, wenn die Relationen (24) gelten. Das angeführte Paar ist ein $P_0(4, 3)$-Paar.

Betrachten wir den Fall, daß das absolute Glied in der Gleichung (101) gleich Null ist. Wenn $\Omega_{12} = 0$ für alle Werte von $\beta, \varrho, u \in I$ gilt, dann gilt $c_2 = 0$. Diesen Fall schließen wir aus. Es gilt also:

$$(102b) \qquad -\Omega_{21}(c_2 + 2\beta_{12}) + c_3\Omega_{12} = 0\,.$$

Die Gleichung (102b) gilt im Falle $\beta_{12}\beta_{21} \neq 0$ dann und nur dann für alle Werte von $\beta, \varrho, u \in I$, wenn die Gleichungen (24) gelten.

Satz 19. *Wenn $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ ein $P_0(4, 3)$-Paar bilden und wenn die $T(4, 3)$-Schar zum linearen Komplex nicht gehört, dann gehört die $T(4,3)$ Schar zum Komplex der projektiven Bewegung; $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ sind die Grundflächen dieses Komplexes.*

Beweis. Den Komplex der projektiven Bewegung kann man auf zwei Arten in eine einparametrische Menge von Geradenbüscheln zerlegen. Die Scheitel dieser Büschel sind immer auf einer Fokalfläche der Kongruenz W von C. Segre, und die Ebenen dieser Büschel hüllen immer die zweite Fokalfläche dieser Kongruenz um. (Kovancov [2].) Die angeführten Fokalflächen sind die Grundflächen des Komplexes der projektiven Bewegung.

Wenn die Gerade (A_1, A_2) gleichzeitig die Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ berührt, dann gilt nach (83), (84) $\Omega_{12} = \Omega_{21} = 0$, d. h.

$$2\beta\beta_{12} + \varrho(c_2 + \beta_{12}) + c_2' + 2\alpha_{12} - c_2\beta_{11} = 0\,,$$
$$2\beta\beta_{21} + \varrho(c_3 - \beta_{21}) + c_3' - 2\alpha_{21} - c_3\beta_{22} = 0\,.$$

Wenn diese Gleichungen für β, ϱ unendlich viele Lösungen haben, dann gilt besonders $\Delta = 0$. Im Falle $\beta_{12}\beta_{21} \neq 0$ gilt $c_2 = -\beta_{12}(1 - c)$, $c_3 = \beta_{21}(1 + c)$ und,

$$\begin{aligned}(103)\qquad & 2\beta\beta_{12} + \varrho\beta_{12}c - \beta_{12}'(1 - c) + \beta_{12}c' + 2\alpha_{12} + \beta_{12}\beta_{11}(1 - c) = 0\,,\\ & 2\beta\beta_{21} + \varrho\beta_{21}c + \beta_{21}'(1 + c) + \beta_{21}c' - 2\alpha_{21} - \beta_{21}\beta_{22}(1 + c) = 0\,.\end{aligned}$$

Wenn das angeführte Paar ein $P_0(4, 3)$-Paar ist, dann sind die beiden Gleichungen (103) nach (24) linear abhängig.

Für die asymptotischen Kurven der Fläche $R(4, 1)$ gilt

$$(A_1, \mathrm{d}A_1, \mathrm{d}^2A_1, A_4) = 0\,.$$

Durch Einsetzen aus der Relation (84), wo $\omega_1^3 = 0$, $(A_1, A_2, A_3, A_4) \neq 0$ gilt, bekommen wir dann:

$$\omega_1^2\omega_2^3 + \omega_1^4\omega_4^3 = 0\,. \tag{104a}$$

Ähnlich kann man die Gleichung der asymptotischen Kurven der Fläche $R(3, 2)$ einführen. Es gilt:

$$(A_2, \mathrm{d}A_2, \mathrm{d}^2A_2, A_3) = 0\,.$$

Aus dieser Gleichung bekommen wir bei der Gültigkeit $\omega_2^4 = 0$, $(A_1, A_2, A_3, A_4) \neq 0$ die folgende Gleichung:

$$\omega_2^1\omega_1^4 + \omega_2^3\omega_3^4 = 0\,. \tag{104b}$$

Wenn wir nun in die Gleichungen (104a), (104b) aus den Relationen (84) einsetzen, bekommen wir in den beiden Fällen (bei der Gültigkeit der Gleichungen (103)):

$$-(1 + c)\,[2\,\mathrm{d}\beta + \mathrm{d}\varrho + a_{23}\,\mathrm{d}u] + (1 - c)\,[2\,\mathrm{d}\beta - \mathrm{d}\varrho + a_{14}\,\mathrm{d}u] = 0\,, \qquad \mathrm{d}u = 0\,.$$

Die asymptotischen Kurven der Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ entsprechen einander. Die dem betrachteten Paare entsprechende $E(4, 3)$-Schar gehört zur Kongruenz W von C. Segre. Der weitere Teil des Beweises ist offenbar.

Satz 20. *Betrachten wir die Erzeugenden der $E_1(4, 3)$ und $E_2(4, 3)$-Scharen die zur gegebenen $P_1(4, 3)$ oder $\bar{P}_2(4, 3)$-Paar gehören und nicht auf den Quasifleknodalflächen des Paares liegen. Alle diese Geraden haben in der $T(4, 3)$-Schar höchstens einen Inflexmittelpunkt, der nicht auf den Flächen $R(4, 1)$, $R(3, 2)$ liegt.*

Beweis. Für die Erzeugenden der $E_1(4, 3)$-Schar des $\bar{P}_2(4, 3)$ oder $P_1(4, 3)$-Paares, die nicht auf den Quasifleknodalflächen liegen, gilt $\Omega_{12} = 0$, $\Omega_{21} \neq 0$. In der Gleichung (101) ist das absolute Glied gleich Null, der Koeffizient bei dem quadratischen Gliede ist nicht gleich Null, es existiert höchstens eine endliche Lösung $t \neq 0$. Ein ähnlicher Satz gilt für die $E_2(4, 3)$-Schar.

Die speziellen Eigenschaften des $P_1(4, 3)$-Paares und des $P_0(4, 3)$-Paares für $c = 0$ sind in der Behandlung [6] angeführt.

Literatur

[1] *Barner M.:* Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen, Math. Zeitschr. Bd. *62*, S. 50—93 (1955).

[2] *Ивлев Е. Т.:* О папе линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространтве, Геометрический сборник 2, Труды Томского гос. университета, Серия мехматем., Томск, *161* (1962) 3 — 12.

[3] *Кованцов Н. И.* Теория комплексов, Киев 1963.

[4] *Mayer O.:* Etudes sur les surfaces réglées. Bull. fac. de ştiinţe din Cernăuti *2* (1926), p. 1—33.

[5] *Terracini A.:* Diretrici congiunte di una rigata. Rend. Sem. Mat. Univ. è Polytechn. Torino 1949/50, *9*, p. 325—342.

[6] *Vala J.:* Über den zum Kurvenpaar der Regelfläche konjugierten Komplex. Časopis pro pěstování matematiky. *93* (1968), 47 — 63.

Anschrift des Verfassers: Brno, Barvičova 85, ČSSR (Vysoké učení technické).