Czechoslovak Mathematical Journal

Tibor Šalát

Zur metrischen Theorie der Lürothschen Entwicklungen der reellen Zahlen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 3, 489–522

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100848

Czechoslovak Mathematical Journal, 18 (93) 1968, Praha

ZUR METRISCHEN THEORIE DER LÜROTHSCHEN ENTWICKLUNGEN DER REELLEN ZAHLEN

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Eingegangen am 3. März 1967)

Das bekannte Buch von O. PERRON über die Irrationalzahlen [1] enthält ausser den Grundlagen der Theorie der g-adischen Entwicklungen und der Kettenbrüche auch die Grundlagen der Theorie der Cantorschen, der Engelschen und der Lürothschen Entwicklungen von reellen Zahlen. In dem erwähnten Buch handelt es sich hauptsächlich um die Bestimmung der Algoritmen, welche zu den erwähnten Entwicklungen führen und auch um einige grundlegende Ergebnisse über diese Algoritmen. Bei den letzten drei Typen von Entwicklungen knüpfen sich diese Ergebnisse hauptsächlich an die Fragen der Unterscheidung der Entwicklungen der rationalen Zahlen von den Entwicklungen der Irrationalzahlen (die Irrationalitätskriterien).

Die Grundlagen der metrischen Theorie der Cantorschen und Engelschen Entwicklungen wurden in den Arbeiten von P. ERDÖS, A. RÉNYI und P. SZÜSZ gelegt (siehe [2], [3], [4], [5], [6], siehe auch [7], [8]). Die grundlegenden metrischen Ergebnisse über die Lürothschen Entwicklungen stammen von L. HOLZER (siehe [9]). Schon diese Ergebnisse von L. Holzer zeigen, dass die metrische Theorie der Lürothschen Reihen bezüglich der Natur ihrer Ergebnisse einen Übergang von der metrischen Theorie der g-adischen Entwicklungen zur metrischen Theorie der Kettenbrüche bildet. Das sehen wir auch in dieser Arbeit, welche einen Beitrag zur Theorie der Lürothschen Entwicklungen darstellt.

Die Arbeit besteht aus vier Teilen. Im ersten Teil geben wir einige einfache metrische Ergebnisse über die Lürothschen Reihen. Der zweite Teil enthält Anwendungen einiger Wahrscheinlichkeitsmethoden, der dritte Teil enthält Anwendungen des Hausdorffschen Masses in der Theorie der Lürothschen Reihen. Im vierten Teil unterziehen wir vom Standpunkt der Baireschen Kategorien von Mengen aus die Lürothschen Reihen der Analyse.

1. Jede reelle Zahl $x \in (0, 1\rangle$ kann man eindeutig durch ihre Lürothsche Entwicklung

$$(1) \qquad x = \frac{1}{d_1 + 1} + \frac{1}{s_1} \frac{1}{d_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} \cdot \frac{1}{d_n + 1} + \ldots$$

darstellen, wo d_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ natürliche Zahlen sind und $s_k = d_k(d_k + 1)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist (siehe [1], S. 116–122, [9]). Die Zahlen $d_k = d_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ nennt man die Lürothschen Ziffern von x. Man kann beweisen, dass die Zahl x genau dann rational ist, wenn die Folge $\{d_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ihrer Lürothschen Ziffern periodisch ist (siehe [1], S. 118).

2. Das ganze Intervall $(0, 1\rangle$ zerfällt bei festem n in abzählbar viele Intervalle „der n-ten Ordnung"

$$I_{d_1 d_2 \ldots d_n} = \left(\frac{1}{d_1 + 1} + \frac{1}{s_1} \frac{1}{d_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} \frac{1}{d_n + 1}, \right.$$
$$\left. \frac{1}{d_1 + 1} + \frac{1}{s_1} \frac{1}{d_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_{n-2}} \frac{1}{d_{n-1} + 1} + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} \frac{1}{d_n} \right\rangle$$

$(d_k = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, n)$; es ist $I_{d_1 d_2 \ldots d_n} \cap I_{d_1' d_2' \ldots d_n'} = \emptyset$ für $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \neq (d_1', d_2', \ldots, d_n')$. Die Länge des Intervalles $I_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ ist offensichtlich der Zahl $1/s_1 s_2 \ldots s_n$ gleich.

3. Der Kürze halber werden wir

$$x = |d_1(x), d_2(x), \ldots|$$

anstatt von (1) schreiben. Es ist $x \in I_{d_1^0 d_2^0 \ldots d_n^0}$ dann und nur dann, wenn $d_k(x) = d_k^0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ist.

4. $|M|$ bezeichnet das (Lebesguesche) Mass der Menge M, $|M|_e$ bezeichnet das äussere (Lebesguesche) Mass von M.

5. Die Menge $M \subset (0, 1\rangle$ heisst homogen in $(0, 1\rangle$, falls ein $d \in \langle 0, 1\rangle$ so existiert, dass für jedes Intervall $I \subset (0, 1\rangle$ die Gleichheit $d = |M \cap I|_e / |I|$ gilt.

6. Im dritten Teil der Arbeit handelt es sich um die Hausdorffsche Dimension der Mengen bezüglich der Massfunktionen

$$\mu^{(\alpha)}(t) = t^\alpha, \quad t \in \langle 0, +\infty), \quad \alpha \in (0, 1)$$

(siehe [10]). Ist $M \subset (0, 1\rangle$, $\eta > 0$, so heisst das abzählbare System $V = \{i\}$ von

Intervallen eine η-Überdeckung der Menge M, wenn für jedes $i \in M$ die Ungleichheit $|i| \leqq \eta$ gilt und wenn ausserdem $M \subset \bigcup_{i \in V} i$ ist. $\mathscr{U}(\eta, M)$ bedeute das System aller η-Überdeckungen von M. Setzen wir

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{M\} = \inf_{V \in \mathscr{U}(\eta, M)} \sum_{i \in V} |i|^\alpha .$$

Dann existiert, wie bekannt, der Grenzwert

$$\mu^{(\alpha)}\{M\} = \lim_{\eta \to 0+} \mu_\eta^{(\alpha)}\{M\}$$

(siehe [10]). Die Zahl $\mu^{(\alpha)}\{M\}$ heisst α-dimensionales Hausdorffsches Mass der Menge M. Ferner existiert genau eine Zahl $\alpha_0 \in \langle 0, 1 \rangle$ derart, dass für $0 < \alpha < \alpha_0$ die Gleichheit $\mu^{(\alpha)}\{M\} = +\infty$ und für $\alpha_0 < \alpha < 1$ die Gleichheit $\mu^{(\alpha)}\{M\} = 0$ gilt. Die Zahl α_0 nennt man die Hausdorffsche Dimension der Menge M und wir schreiben $\alpha_0 = \dim M$.

7. Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ heisst durch die Methode $(C, 1)$ (zum Werte $a \in (-\infty, +\infty)$) limitierbar, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$$

ist. Wenn der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} (a_1 + \ldots + a_n)/n$ nicht existiert oder unendlich ist, dann sagen wir, dass die Folge $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ durch die Methode $(C, 1)$ nicht limitierbar ist.

8. $\{a_n\}_n'$ bezeichnet die Menge aller Häufungswerte der Folge $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

9. Wenn A eine Menge von natürlichen Zahlen ist, dann setzen wir $A(n) = \sum_{a \leqq n, a \in A} 1$. Weiter setzen wir $h_2(A) = \limsup_{n \to \infty} A(n)/n$ und $h(A) = \lim_{n \to \infty} A(n)/n$, sobald der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Die Zahl $h(A)$ heisst die asymptotische Dichte der Menge A.

10. $\langle 0, +\infty \rangle$ bezeichnet die Menge $\langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$; $E_1^* = (-\infty, +\infty) \cup \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

11. Ist x eine reelle Zahl, $x \geqq 0$, dann bezeichnet $\sum_{k=1}^{x} a_k$ die Summe $\sum_{k=1}^{[x]} a_k$; $[x]$ ist der ganze Teil der Zahl x.

12. Ist $r \geqq 1$, $x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in (0, 1\rangle$, dann bezeichnen wir mit $N_n(r, x)$ die Summe $\sum_{d_k(x) = r, k \leqq n} 1$.

1. EINIGE GRUNDLEGENDE ERGEBNISSE AUS DER METRISCHEN THEORIE DER LÜROTHSCHEN REIHEN

In diesem Teil der Arbeit knüpfen wir auf einige Ergebnisse der Arbeit [9] an.

In der Arbeit [9] ([9], Satz 8) wurde bewiesen, dass für fast alle $x \in (0, 1\rangle$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi(d_l(x)) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi(l)}{l(l+1)}$$

gilt, falls φ eine positive, beschränkte Funktion der natürlichen Veränderlichen ist. Durch ein Verfahren, das dem im Beweis des Satzes 8 der Arbeit [9] benutzten Verfahren ähnlich ist, beweisen wir jetzt leicht das folgende einfache Ergebnis.

Satz 1,1. *φ sei eine nicht-negative Funktion der natürlichen Veränderlichen, es sei*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi(l)}{l(l+1)} = +\infty\,.$$

Dann gilt für fast alle $x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in (0, 1\rangle$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(d_j(x)) = +\infty\,.$$

Beweis. Bezeichnen wir mit B die Menge aller derjenigen $x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in$ $\in (0, 1\rangle$, für welche

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(r, x)}{n} = \frac{1}{r(r+1)} \quad (r = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

gilt. Zufolge eines Ergebnisses der Arbeit [9] (siehe auch den Satz 2,5) gilt $|B| = 1$.

Es sei $K > 0$. Nach der Voraussetzung des Satzes existiert ein k_0 mit

$$\sum_{l=1}^{k_0} \frac{\varphi(l)}{l(l+1)} > 2K\,.$$

Ist $x \in B$, dann existiert zufolge (2) ein $n_0 = n_0(x)$ derart, dass für $n > n_0$

$$\frac{N_n(r, x)}{n} > \frac{1}{2}\frac{1}{r(r+1)} \quad (r = 1, 2, \ldots, k_0) \tag{3}$$

gilt.

Es sei $x \in B$, $n > n_0(x)$. Dann ist zufolge (3) die Summe aller derjenigen Zahlen $\varphi(d_j(x))$, $j \leqq n$, für welche $d_j(x) = l$ ist, grösser als

$$\frac{n}{2}\frac{\varphi(l)}{l(l+1)} \quad (l \leqq k_0)$$

und so bekommen wir wegen der Nichtnegativität von φ und der Wahl von k_0

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(d_j(x)) \geqq \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k_0}\frac{\varphi(l)}{l(l+1)} > K\,.$$

Zufolge der Beliebigkeit von K folgt daraus die Behauptung des Satzes schon unmittelbar.

Bemerkung 1,1. Wenn wir im vorhergehenden Satz $\varphi(l) = l^\alpha$, $\alpha \geqq 1$, setzen, dann sehen wir, dass die Folge $\{d_j^\alpha(x)\}_{j=1}^\infty$ für fast alle $x \in (0, 1\rangle$ durch die Methode $(C, 1)$ nicht limitierbar ist. Wenn wir im erwähnten Satz von L. Holzer (siehe [9], Satz 8) $\varphi(l) = l^\alpha$, $\alpha \leqq 0$, setzen, dann sehen wir, dass die Folge $\{d_j^\alpha(x)\}_{j=1}^\infty$ für fast alle $x \in \in (0, 1\rangle$ durch die Methode $(C, 1)$ zum (von x unabhängigen) Werte $\sum_{l=1}^{\infty} l^\alpha/l(l+1)$ limitierbar ist. Die Frage, was im Falle $0 < \alpha < 1$ geschieht, bleibt offen. Auf diese Frage geben wir im zweiten Teil der Arbeit eine Antwort.

Für weitere Ziele führen wir noch dieses Ergebnis von L. Holzer an (siehe [9], Satz 6).

Satz 1,2. *Sei* $\varphi(n) > 0$, $\varphi(n) \uparrow +\infty$, $\varphi(n+1)/\varphi(n) \to 1$. *Setzen wir* $H(\varphi) = \{x \in (0, 1\rangle;\ d_n(x) = O(\varphi(n))\}$. *Dann ist* $|H(\varphi)| = 1$ *für* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n) < +\infty$ *und* $|H(\varphi)| = 0$ *für* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n) = +\infty$.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem folgenden einfachen Homogenitätskriterium: Die Menge $M \subset (0, 1\rangle$ ist homogen in $(0, 1\rangle$, wenn sie mit jeder Zahl $x = |d_1(x), d_2(x), \ldots|$ auch jede der Zahlen

$$x_k = |d_k(x), d_{k+1}(x), \ldots| \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

enthält (siehe [9]). Mit Hilfe dieses Kriteriums kann man leicht feststellen, dass die Menge $H(\varphi)$ unter den Voraussetzungen des Satzes eine in $(0, 1\rangle$ homogene Menge ist und da sie messbar ist, gilt $|H(\varphi)| = 0$ oder $|H(\varphi)| = 1$ (siehe [11]). Welche dieser Möglichkeiten eintritt, darüber entscheidet – auf die im Satz beschriebene Weise – die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n)$.

Es sei bemerkt, dass ein dem Satz 1,2 ähnliches Ergebnis auch für Kettenbrüche gilt (siehe [9]).

Jetzt wenden wir den Satz 1,2 zum Beweis der folgenden zwei metrischen Ergebnisse an.

Satz 1,3. M_∞ *bedeute die Menge aller*

$$x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in (0, 1\rangle$$

mit $\limsup_{n\to\infty} d_n(x) = +\infty$. *Dann ist* $|M_\infty| = 0$.

Beweis. Setzen wir im Satz 1,2 $\varphi(n) = n$ $(n = 1,2,\ldots)$. Dann gilt (bei den im Satz 1,2 benutzen Bezeichnungen)

$$M_\infty \subset H(\varphi)\,. \tag{4}$$

Die Behaptung des Satzes folgt sogleich aus der Inklusion (4) und aus dem Satz 1,2.

Satz 1,4. *Für fast alle*

$$x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in (0, 1\rangle$$

ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{[d_n(x)]} = 1$.

Beweis. Setzen wir im Satz 1,2 $\varphi(n) = n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Zu jedem $x \in H(\varphi)$ (die Bedeutung von $H(\varphi)$ siehe im Satz 1,2) existiert ein $K = K(x) > 0$, so dass für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Ungleichheit $d_n(x) \leqq Kn^2$ gilt. Daraus bekommt man

$$1 \leqq \sqrt[n]{[d_n(x)]} \leqq \sqrt[n]{K}\,(\sqrt[n]{n})^2$$

und daraus $\sqrt[n]{[d_n(x)]} \to 1$. Dabei ist infolge des Satzes 1,2 $|H(\varphi)| = 1$.

Jetzt beweisen wir ein Analogon eines wohlbekannten Ergebnisses aus der metrischen Theorie der Kettenbrüche (siehe [14] S. 78–79).

Satz 1,5. *Es sei* $\tau_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

1) *Ist* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/\tau_n < +\infty$, *dann ist die Menge* $\{n;\, d_n(x) > \tau_n\}$ *für fast alle* $x \in (0, 1)\rangle$ *endlich.*

2) *Ist* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/\tau_n + \infty$, *dann ist die Menge* $\{n;\, d_n(x) > \tau_n\}$ *für fast alle* $x \in (0, 1\rangle$ *unendlich.*

Beweis. 1) Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/\tau_n < +\infty$. S_1 sei die Menge aller $x \in (0, 1\rangle$, für welche die Menge $\{n;\, d_n(x) > \tau_n\}$ unendlich ist. Bezeichnen wir mit L_n $(n > 1)$ die Menge aller $x \in (0, 1\rangle$, für welche $d_n(x) > \tau_n$ gilt. Dann ist offensichtlich

$$L_n = \bigcup_{d_1=1}^{\infty} \ldots \bigcup_{d_{n-1}=1}^{\infty} \bigcup_{k=[\tau_n]+1}^{\infty} I_{d_1 d_2 \ldots d_{n-1} k}$$

und so ist

$$|L_n| = \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)} \cdots \sum_{d_{n-1}=k}^{\infty} \frac{1}{d_{n-1}(d_{n-1}+1)} \sum_{k=[\tau_n]+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \tag{5}$$
$$= \frac{1}{[\tau_n]+1} < \frac{1}{\tau_n}\,.$$

Setzen wir $L = \bigcap_{m=2}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} L_n$. Dann ist wegen (5)

$$|L| \leqq \sum_{n=m}^{\infty} |L_n| < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{\tau_n} \quad (m = 2, 3, \ldots)$$

und so ist zufolge der Voraussetzung $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\tau_n < +\infty$

$$|L| = 0 . \tag{6}$$

Offensichtlich ist $S_1 \subset L$, also $|S_1| = 0$.

2) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\tau_n = +\infty$. S_2 sei die Menge aller $x \in (0, 1\rangle$, für welche die Menge $\{n;\, d_n(x) > \tau_n\}$ endlich ist. Es genügt $|S_2| = 0$ zu beweisen. Bezeichnen wir mit $C_{m,n}$ die Vereinigungsmenge aller solcher Intervalle $I_{d_1 \ldots d_m d_{m+1} \ldots d_{m+n}}$ der $(m + n)$-ten Ordnung, für welche

$$d_{m+i} \leqq \tau_{m+i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

gilt. Daraus folgt

$$|C_{m,n}| = \sum \frac{1}{d_1(d_1 + 1) \ldots d_{m+n}(d_{m+n} + 1)} ;$$

dabei summiert man in der $(m + n)$-fachen Reihe auf der rechten Seite über alle solche Folgen $(d_1, d_2, \ldots, d_m, d_{m+1}, \ldots, d_{m+n})$ von natürlichen Zahlen, wo d_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ alle natürlichen Zahlen und d_{m+i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die Zahlen $1, 2, \ldots, [\tau_{m+i}]$ durchläuft (siehe (7)). Also

$$|C_{m,n}| = \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1 + 1)} \cdots \sum_{d_m=1}^{\infty} \frac{1}{d_m(d_m + 1)} \prod_{j=1}^{n} \sum_{d_{m+j}=1}^{[\tau_{m+j}]} \frac{1}{d_{m+j}(d_{m+j} + 1)} = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{[\tau_{m+j}] + 1}\right). \tag{8}$$

Offensichtlich ist $C_{m,1} \supset C_{m,2} \supset \ldots$

Setzen wir

$$C_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{m,n} , \quad C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m . \tag{9}$$

Aus der Voraussetzung $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\tau_k = +\infty$ folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{[\tau_{m+j}] + 1} = +\infty \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

und nach (8), (9) bekommen wir

$$|C_m| = \lim_{n\to\infty} |C_{m,n}| = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{[\tau_{m+j}] + 1}\right) = 0\,, \quad |C| = 0\,.$$

Offensichtlich ist $S_2 \subset C$, also $|S_2| = 0$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Bemerkung 1,2. Wenn wir im vorhergehenden Satz (in seinem zweiten Teil) $\tau_n = K > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ setzen, bekommen wir einen neuen Beweis des Satzes 1,3.

Der Verfasser dankt Professor J. Mařík für den Hinweis, dass der Satz 1,5 die folgende Verschärfung des Satzes 1,2 zu beweisen ermöglicht.

Satz 1,6. *Es sei* $\varphi(n) > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. *Dann ist* $|H(\varphi)| = 1$ *für* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n) < +\infty$ *und* $|H(\varphi)| = 0$ *für* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n) = +\infty$.

Beweis. $H_1(\varphi)$ sei die Menge aller $x \in (0, 1\rangle$, für welche die Menge $\{n;\ d_n(x) > \varphi(n)\}$ endlich ist. Offensichtlich ist

$$H_1(\varphi) \subset H(\varphi) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} H_1(k\varphi)\,. \tag{9'}$$

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n) < +\infty$ ist, dann ist infolge des Satzes 1,5 $|H_1(\varphi)| = 1$ und so ist wegen (9′) auch $|H(\varphi)| = 1$. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n) = +\infty$ ist, dann folgt aus dem Satz 1,5 (wenn wir dort $\tau_n = k\,\varphi(n)$ setzen), dass $|H_1(k\varphi)| = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist und wegen (9′) bekommt man $|H(\varphi)| = 0$.

2. EINIGE ANWENDUNGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSMETHODEN IN DER THEORIE DER LÜROTHSCHEN REIHEN

Die meisten der folgenden Ergebnisse gehen aus den bekannten Sätzen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Grund der Tatsache hervor, dass die Zufallsveränderlichen $d_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ in der Wahrscheinlichkeitsalgebra $[Y, \mathscr{A}, P]$ ($Y = (0, 1\rangle$, $\mathscr{A}$ bedeutet das System aller im Lebesgueschen Sinne messbaren Untermengen des Intervalles $(0, 1\rangle$ und $P(A)$ bedeutet das Lebesguesche Mass von $A \in \mathscr{A}$) unabhängig sind und die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung haben:

$$P(d_i(x) = l) = \frac{1}{l(l+1)} \quad (l = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{10}$$

Um die Unabhängigkeit der Zufallsveränderlichen $d_1(x), d_2(x), \ldots$ zu beweisen, genügt es zu zeigen ,dass für jedes n und beliebige natürliche Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ die Beziehung

$$P(d_1(x) = l_1, \ldots, d_n(x) = l_n) = \prod_{i=1}^{n} P(d_i(x) = l_i) \tag{11}$$

gilt.

Die linke Seite in (11) ist offensichtlich gleich dem Mass des Intervalles $I_{l_1 l_2 \ldots l_n}$ n-ter Ordnung, also sie ist der Zahl $[l_1(l_1+1)\ldots l_n(l_n+1)]^{-1}$ gleich. Weiter ist $P(d_i(x) = l_i)$ gleich dem Mass der Vereinigungsmenge aller derjenigen Intervalle $I_{d_1 d_2 \ldots d_i}$ der i-ten Ordnung, für welche $d_i = l_i$ ist. Also

$$P(d_i(x) = l_i) = \sum \frac{1}{d_1(d_1+1)} \cdots \frac{1}{d_{i-1}(d_{i-1}+1)} \frac{1}{l_i(l_i+1)};$$

rechts in der i-fachen Reihe summiert man über alle solche Folgen $(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}, l_i)$ wo l_i fest ist und d_k $(1 \leqq k \leqq i-1)$ alle natürlichen Zahlen durchlaufen. Daraus bekommt man

$$P(d_i(x) = l_i) = \frac{1}{l_i(l_i+1)}$$

und so ist (11) richtig. Gleichzeitig haben wir auch die Gültigkeit von (10) bewiesen.

Bemerken wir, dass in dieser Arbeit die Bezeichnung in Übereinstimmung mit [12] gebraucht wird.

Mit Hilfe einer von Kolmogorov bewiesenen Verallgemeinerung des starken Gesetzes der grossen Zahlen geben wir die Antwort auf eine Frage, die im ersten Teil dieser Arbeit offen blieb (siehe die Bemerkung 1,1). Dies wird mit Hilfe der folgenden Verallgemeinerung des Satzes 8 von L. Holzer (siehe [9]) geschehen.

Satz 2,1. *φ sei eine reelle Funktion der natürlichen Veränderlichen. Es sei*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|\varphi(l)|}{l(l+1)} < +\infty. \tag{12}$$

Dann gilt für fast alle $x \in (0, 1\rangle$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(d_j(x)) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi(l)}{l(l+1)}.$$

Beweis. Bilden wir die Zufallsveränderlichen $\xi_n(x) = \varphi(d_n(x))$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Die Menge der Werte jeder dieser Zufallsveränderlichen ist der Menge $A = \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots\}$ gleich. Es sei $t \in A$. Dann ist die Zahl $P(\xi_n = t)$ offensichtlich gleich dem Mass der Vereinigungsmenge aller Intervalle $I_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ der n-ten Ordnung, wo d_j $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ natürlich und $\varphi(d_n) = t$ ist. Daraus folgt

$$P(\xi_n = t) = \sum_{\varphi(k)=t} \frac{1}{k(k+1)} \tag{13}$$

und die rechte Seite von (13) ist von n unabhängig. Daraus folgt leicht, dass die Zufallsveränderlichen ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung haben.

Aus der schon bewiesenen Unabhängigkeit von $d_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und aus den bekannten Sätzen der Wahrscheinlichkeitstheorie (siehe [12], S. 153) folgt die Unabhängigkeit von ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Jetzt bestimmen wir die Erwartungswerte $M(\xi_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Wegen (13) bekommen wir

$$M(\xi_n) = \sum_{t \in A} t \,.\, P(\xi_n = t) = \sum_{t \in A} \sum_{\varphi(k) = t} \frac{1}{k(k+1)} . \tag{14}$$

Rechts haben wir eine Reihe, welche eine (möglicherweise verallgemeinerte) Umordnung der Reihe

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi(l)}{l(l+1)} \tag{15}$$

ist. Da die Reihe (15) absolut konvergiert (siehe (12)), konvergiert auf Grund von bekannten Erkentnissen aus der Theorie der unendlichen Reihen (siehe [13], S. 143) auch die Reihe an der rechten Seite von (14) und hat dieselbe Summe wie die Reihe (15). Also

$$M(\xi_n) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi(l)}{l(l+1)} = M , \quad |M| < +\infty .$$

Alle Zufallsveränderlichen ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ haben also den gleichen Erwartungswert.

Da ξ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ unabhängig sind und einen gleichen Erwartungswert $M(\xi_n) = M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ haben, gilt für sie wegen der erwähnten Kolmogorovschen Verallgemeinerung des starken Gesetzes der grossen Zahlen (siehe [12], S. 332, Satz 3) die Beziehung

$$P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} = M\right) = 1 .$$

Also für fast alle $x \in (0, 1\rangle$ gilt die Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(d_j(x)) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi(l)}{l(l+1)} .$$

Satz 2,2. *Ist $\alpha < 1$, so ist die Folge $\{d_j^\alpha(x)\}_{j=1}^{\infty}$ für fast alle $x \in (0, 1\rangle$ durch die Methode $(C, 1)$ zum (von x unabhängigen) Werte $\sum_{l=1}^{\infty} l^\alpha / l(l+1)$ limitierbar.*

Beweis. Setzen wir im Satz 2,1 $\varphi(l) = l^\alpha$, $\alpha < 1$. Mann kann leicht feststellen, dass alle Voraussetzungen des Satzes 2,1 erfüllt sind. Die Behauptung folgt nun leicht aus dem Satz 2,1.

Bemerkung 2,1. Wenn wir den Satz 2,2 mit der Bemerkung 1,1 vergleichen, sehen wir, dass die Folge $\{d_j^\alpha(x)\}_{j=1}^{\infty}$ für $\alpha < 1$ fast überall $(C, 1)$-limitierbar ist und für $\alpha \geqq 1$ fast überall durch die Methode $(C, 1)$ nicht-limitierbar ist.

Der folgende Satz erinnert uns an ein gewisses Ergebnis der Theorie der Kettenbrüche (siehe [14], S. 110–111).

Satz 2,3. *Für fast alle* $x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in (0, 1\rangle$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{[d_1(x)\, d_2(x) \ldots d_n(x)]} = \prod_{k=1}^{\infty} k^{1/k(k+1)}.$$

Beweis. Setzen wir im Satz 2,1 $\varphi(l) = \log l$ $(l = 1, 2, \ldots)$. So bekommen wir für fast alle $x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in (0, 1\rangle$

$$\lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{[d_1(x)\, d_2(x) \ldots d_n(x)]} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\log l}{l(l+1)};$$

daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{[d_1(x)\, d_2(x) \ldots d_n(x)]} = \exp\left\{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\log l}{l(l+1)}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\sum_{l=1}^{n} \frac{\log l}{l(l+1)}\right\} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} k^{1/k(k+1)} = \prod_{k=1}^{\infty} k^{1/k(k+1)}.$$

Auch der folgende Satz ist einem Ergebnis der Theorie der Kettenbrüche ähnlich (siehe [15], [16]).

Satz 2,4. *Sei* $\tau_n \to +\infty$. *Dann gilt für fast alle* $x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in (0, 1\rangle$ *die Beziehung*

$$h(\{n;\, d_n(x) \geqq \tau_n\}) = 0. \tag{16}$$

Beweis. G bedeute die Menge aller $x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in (0, 1\rangle$, für welche

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{[d_1(x)\, d_2(x) \ldots d_n(x)]} = \prod_{k=1}^{\infty} k^{1/k(k+1)} = c_0$$

gilt. Dann folgt aus dem Satz 2,3 $|G| = 1$ und so genügt es zu beweisen, dass x nicht zu G gehört, falls für x die Beziehung (16) nicht gilt.

Es sei also (16) für x nicht erfüllt. Wenn wir jetzt $A = \{n;\, d_n(x) \geqq \tau_n\}$ setzen, so haben wir $h_2(A) = \eta > 0$. Es sei $K > 0$ so gewählt, dass $K^\eta > c_0$ ist. Da $\tau_n \to +\infty$ ist, existiert ein solches n_1, dass für $n > n_1$ die Ungleichheit $\tau_n > K$ gilt. Durch eine einfache Abschätzung bekommen wir für $n > n_1$

$$\sqrt[n]{[d_1(x)\, d_2(x) \ldots d_n(x)]} \geqq \sqrt[n]{K^{A(n)-n_1}} = K^{A(n)/n - n_1/n};$$

daraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{[d_1(x)\, d_2(x) \dots d_n(x)]} \geqq K^n > c_0\,,$$

also $x \notin G$.

Bemerkung 2,2. Es sei bemerkt, dass der Satz 2,4 auch aus dem Lemma 2 der Arbeit [16] folgt, wenn wir die $(C, 1)$-Limitierbarkeit von $\{\sqrt{d_j(x)}\}_{j=1}^{\infty}$ für fast alle $x \in (0, 1\rangle$ erwägen.

Satz 2,5. *Für fast alle* $x = |d_1(x), d_2(x), \dots| \in (0, 1\rangle$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(r, x)}{n} = \frac{1}{r(r+1)} \quad (r = 1, 2, 3, \dots)\,. \tag{17}$$

Beweis. Setzen wir im Satz 2,1 $\varphi(r) = 1$ und $\varphi(l) = 0$ für $l \neq r$. Dann ist offensichtlich $\sum_{j=1}^{n} \varphi(d_j(x)) = N_n(r, x)$ und infolge des Satzes 2,1 existiert eine Menge B_r, $|B_r| = 1$, $B_r \subset (0, 1\rangle$, so dass für $x \in B_r$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(r, x)}{n} = \frac{1}{r(r+1)}$$

gilt. Setzen wir $B = \bigcap_{r=1}^{\infty} B_r$. Dann ist $|B| = 1$ und für $x \in B$ gilt die Beziehung (17).

In der Arbeit [9] beweist man das folgende genauere Ergebnis über die Verteilung von Ziffern in Lürothschen Reihen:

Für fast alle $x \in (0, 1\rangle$ gilt die Beziehung

$$N_n(r, x) = \frac{n}{r(r+1)} + O(\sqrt{n} \log n) \quad (r = 1, 2, \dots)\,.$$

Jetzt verschärfen wir das obenerwähnte Ergebnis von L. Holzer.

Satz 2,6. *Für fast alle* $x \in (0, 1\rangle$ *gilt*

$$N_n(r, x) = \frac{n}{r(r+1)} + \eta_{nr}(x) \sqrt{(n \log\log n)} \quad (r = 1, 2, \dots)\,,$$

wo

$$\limsup_{n\to\infty} \eta_{nr} = \limsup_{n\to\infty} |\eta_{nr}(x)| = D_r \sqrt{2}\,,$$

$$D_r = \sqrt{\left[\frac{1}{r(r+1)}\left(1 - \frac{1}{r(r+1)}\right)\right]} \quad (r = 1, 2, \dots)\,.$$

Beweis. Bei natürlichen r, n setzen wir $\xi_{nr}(x) = f_r(d_n(x))$, wo $f_r(r) = 1$ und $f_r(m) = 0$ für $m \neq r$. Da $d_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ in der Wahrscheinlichkeitsalgebra $[Y, \mathscr{A}, P]$ unabhängig sind, so sind auch die Zufallsveränderlichen ξ_{nr} $(n = 1, 2, \ldots)$ in $[Y, \mathscr{A}, P]$ unabhängig. Ausserdem sind ξ_{nr} $(n = 1, 2, \ldots)$ offensichtlich beschränkt.

$P(\xi_{nr} = 1)$ ist offenbar dem Mass der Vereinigungsmenge aller derjenigen Intervalle $I_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ der n-ten Ordnung gleich, wo d_i $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ alle natürliche Zahlen durchläuft und $d_n = r$ ist. Dieses Mass ist gleich der Summe der n-fachen Reihe

$$\sum \frac{1}{d_1(d_1 + 1) \ldots d_{n-1}(d_{n-1} + 1)\, r(r + 1)},$$

in der über alle erwähnten Folgen summiert wird. Es gilt also

$$P(\xi_{nr} = 1) = \frac{1}{r(r + 1)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Da ξ_{nr} nur die Werte 0 und 1 annimmt, ist

$$P(\xi_{nr} = 0) = 1 - \frac{1}{r(r + 1)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

So haben die Zufallsveränderlichen ξ_{nr} $(n = 1, 2, \ldots)$ dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Für den Erwartungswert $M(\xi_{nr})$ bekommt man

$$M(\xi_{nr}) = 1\,, \quad P(\xi_{nr} = 1) = \frac{1}{r(r + 1)}$$

und für die Streuung $D(\xi_{nr})$ haben wir

$$D(\xi_{nr}) = \sqrt{[M(\xi_{nr}^2) - M^2(\xi_{nr})]} = \sqrt{\left[\frac{1}{r(r + 1)}\left(1 - \frac{1}{r(r + 1)}\right)\right]}.$$

Also $M(\xi_{nr})$, $D(\xi_{nr})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sind von n unabhängig.

Aus der Definition der Zufallsveränderlichen ξ_{nr} $(n = 1, 2, \ldots)$ folgt $\sum_{j=1}^{n} \xi_{jr} = N_n(r, x)$. Jetzt benutzen wir den Satz vom iterierten Logarithmus (siehe [12], S. 337). So bekommen wir für fast alle $x \in (0, 1\rangle$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\left|N_n(r, x) - \dfrac{n}{r(r + 1)}\right|}{D_r \sqrt{(2n \log \log n)}} \leqq 1\,, \tag{18}$$

$$D_r = D(\xi_{nr}) = \sqrt{\left[\frac{1}{r(r + 1)}\left(1 - \frac{1}{r(r + 1)}\right)\right]} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Daraus folgt

$$N_n(r, x) = \frac{n}{r(r+1)} + O(\sqrt{(n \log\log n)}). \tag{19}$$

Erwägen wir weiter, dass auf Grund des verschärften Gesetzes vom iterierten Logarithmus fast überall in $(0, 1 >$ die Beziehung

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N_n(r, x) - \dfrac{n}{r(r+1)}}{D_r \sqrt{(2n \log\log n)}} = 1$$

gilt. Aus (18) und (19) folgt schon die Behauptung des Satzes unmittelbar.

Eine gewisse Übersicht von der Verteilung der natürlichen Zahlen in den Folgen von Ziffern $\{d_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ der Zahlen $x \in (0, 1\rangle$ ist auch durch die Anwendung des zentralen Grenzverteilungssatzes von Ljapunov (siehe [12], S. 363) gewinnbar.

Satz 2,7. *y sei eine reelle Zahl, $A(r, n, y)$ bedeute die Menge aller $x \in (0, 1\rangle$, für welche die Beziehung*

$$\frac{N_n(r, x) - \dfrac{n}{r(r+1)}}{\sqrt{n}} < D_r \, . \, y$$

gilt. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} |A(r, n, y)| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{y} c^{-t^2/2} \, dt \, .$$

Beweis. Wie wir schon gesehen haben, sind die Zufallsveränderlichen ξ_{nr} $(n = 1, 2, \ldots)$ unabhängig und haben einen gleichen Erwartungswert $M_r = M(\xi_{nr}) = 1/r(r+1)$ und gleiche Streuung

$$D_r = D(\xi_{nr}) = \sqrt{\left[\frac{1}{r(r+1)}\left(1 - \frac{1}{r(r+1)}\right)\right]}.$$

Setzen wir

$$\zeta_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_{jr} \, , \quad \zeta_n^* = \frac{\zeta_n - M(\zeta_n)}{D(\zeta_n)} \, .$$

Dann ist $M(\zeta_n) = n \, . \, M_r$, $D(\zeta_n) = \sqrt{(n)} \, . \, D_r$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Wenn $F_n(z)$ die Verteilungsfunktion von ζ_n^* bedeutet, dann bekommen wir zufolge des erwähnten zentralen Grenzverteilungssatzes von Ljapunov

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} \, dt \, .$$

Da offensichtlich $\zeta_n = N_n(r, x)$ ist, bekommt man daraus

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n(r, x) - \dfrac{n}{r(r+1)}}{\sqrt{n}} < D_r\, y\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t\,.$$

Bemerkung 2,3. Aus dem Satz 2,7 folgt, dass zu jedem n eine solche aus einer endlichen Anzahl von Intervallen der n-ten Ordnung bestehende Menge L_n existiert, dass $\lim_{n\to\infty} |L_n| > 0$ ist und dass auf L_n die Beziehung

$$N_n(r, x) - \frac{n}{r(r+1)} < -D_r \,.\, \sqrt{n}$$

gilt. Dabei aber gilt für fast alle $x \in (0, 1\rangle$ die Beziehung

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N_n(r, x) - \dfrac{n}{r(r+1)}}{\sqrt{n}} = +\infty$$

(siehe den Satz 2,6).

Weitere Ergebnisse kann man durch die Anwendung des Lemmas von Borel-Cantelli gewinnen.

Satz 2,8. *Für fast alle* $x \in (0, 1\rangle$ *gilt*

$$\left\{\frac{d_{n+1}(x)}{d_n(x)}\right\}_n' = \langle 0, +\infty\rangle\,.$$

Beweis. $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ sei die Folge aller positiven rationalen Zahlen. Bezeichnen wir mit B_{2k-1} $(k = 1, 2, \ldots)$ das folgende Ereignis: der Bruch $d_{2k}(x)/d_{2k-1}(x)$ ist gleich der Zahl r_j.

Wir zeigen, dass die Ereignisse $B_1, B_3, \ldots, B_{2k-1}, \ldots$ unabhängig sind. Es genügt zu zeigen, dass für jedes $n \geqq 1$ die Gleichheit

$$P(B_1 \,.\, B_3 \ldots B_{2n-1}) = \prod_{k=1}^{n} P(B_{2k-1}) \tag{20}$$

gilt. $P(B_1 \,.\, B_3 \ldots B_{2n-1})$ ist offensichtlich gleich dem Mass der Vereinigungsmenge aller Intervalle $I_{d_1 d_2 \ldots d_{2n}}$ der $2n$-ten Ordnung, für welche $d_{2k}/d_{2k-1} = r_j$ $(k = 1, 2, \ldots \ldots, n)$ ist. Also

$$P(B_1 \,.\, B_3 \ldots B_{2n-1}) =$$
$$= \sum \frac{1}{d_1(d_1+1)\, d_2(d_2+1)} \cdots \sum \frac{1}{d_{2n-1}(d_{2n-1}+1)\, d_{2n}(d_{2n}+1)}\,;$$

dabei summiert man in der Doppelreihe

$$\sum \frac{1}{d_{2i-1}(d_{2i-1}+1)\, d_{2i}(d_{2i}+1)}$$

über alle solche Paare (d_{2i-1}, d_{2i}) von natürlichen Zahlen, für welche $d_{2i}/d_{2i-1} = r_j$ ist. Weiter ist $P(B_{2i-1})$ gleich dem Mass der Vereinigungsmenge aller Intervalle $I_{d_1 d_2 \ldots d_{2i}}$ der $2i$-ten Ordnung, für welche $d_{2i}/d_{2i-1} = r_j$ ist, also

$$(21) \qquad P(B_{2i-1}) = \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)} \cdots \sum_{d_{2i-2}=1}^{\infty} \frac{1}{d_{2i-2}(d_{2i-2}+1)} \cdot$$

$$\cdot \sum \frac{1}{d_{2i-1}(d_{2i-1}+1)\, d_{2i}(d_{2i}+1)} = \sum \frac{1}{d_{2i-1}(d_{2i-1}+1)\, d_{2i}(d_{2i}+1)}, \quad \frac{d_{2i}}{d_{2i-1}} = r_j\,.$$

Daraus folgt (20) schon unmittelbar.

Ferner, wenn $r_j = (p_j/q_j)$ ($(p_j, q_j) = 1$, p_j, q_j teilerfremd) ist, dann bekommt man aus (21) durch eine einfache Abschätzung die Ungleichheit

$$P(B_{2i-1}) \geqq \frac{1}{(p_j^2 + p_j)(q_j^2 + q_j)}\,;$$

daraus folgt $\sum_{i=1}^{\infty} P(B_{2i-1}) = +\infty$. Auf Grund des Lemma von Borel-Cantelli (siehe [12], S. 327) bekommen wir

$$(22) \qquad P(A_j) = 1\,,$$

wo $A_j = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} B_{2k-1}$ ist. Aus (22) folgt dann $P(\prod_{j=1}^{\infty} A_j) = 1$. Daraus folgt, dass die Menge $M_x = \{d_{n+1}(x)/d_n(x)\}'_n$ für fast alle $x \in (0, 1\rangle$ alle positive rationale Zahlen enthält. Da sie in E_1^* abgeschlossen ist, haben wir $M_x = \langle 0, +\infty\rangle$ (für fast alle $x \in (0, 1\rangle$). Damit ist der Satz bewiesen.

Auf ganz ähnliche Art kann man auch das folgende Ergebnis beweisen.

Satz 2,9. *Für fast alle $x \in (0, 1\rangle$ gilt*

$$\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\} \subset \{d_{n+1}(x) - d_n(x)\}'_n\,.$$

Wie wir schon gesehen haben, ist die Folge $\{(1/n) \sum_{j=1}^{n} d_j(x)\}_{n=1}^{\infty}$ fast überall in $(0, 1\rangle$ divergent (siehe die Bemerkung 1,1). Jetzt werden wir diese Folge vom Standpunkt der stochastischen Konvergenz in der Wahrscheinlichkeitsalgebra $[Y, \mathscr{A}, P]$ studieren. Wir zeigen, dass von diesem Standpunkt die Grössenordnung der Funktionen

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} d_j(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

bei $n \to \infty$ gleich der Zahl $\log n$ ist. Der folgende Satz ist einem Ergebnis aus der Theorie der Kettenbrüche ähnlich (siehe [17]).

Satz 2,10. *Setzen wir für* $x \in (0, 1\rangle$

$$\sigma_n(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Dann konvergiert stochastisch die Folge $\{\sigma_n(x)/n \log n\}_{n=2}^{\infty}$ *zur Funktion, die identisch gleich* 1 *ist.*

Zum Beweis des Satzes benutzen wir einige Hilfssätze und führen die folgende Bezeichnung ein: n sei natürlich, $n > 1$; setzen wir

$$A_j = \{x \in (0, 1\rangle; d_j(x) \leqq n \log n\} , \quad F_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j .$$

Im weiteren bezeichnet M' das Komplement der Menge $M \subset (0, 1\rangle$ im Raum $(0, 1\rangle$. Weiter setzen wir

$$a_j = \int_{F_n} d_j^2(x) \,\mathrm{d}x , \quad b_{ij} = \int_{F_n} d_i(x)\, d_j(x) \,\mathrm{d}x , \quad c_j = \int_{F_n} d_j(x) \,\mathrm{d}x .$$

Lemma 2,1. $n_1, n_2, \ldots, n_k$; $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *seien natürliche Zahlen,* $E\begin{pmatrix} n_1, n_2, \ldots, n_k \\ t_1, t_2, \ldots, t_k \end{pmatrix}$ *bedeute die Menge aller* $x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in (0, 1\rangle$, *für welche* $d_{n_i}(x) = t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *ist. Dann gilt*

$$\left| E\begin{pmatrix} n_1, n_2, \ldots, n_k \\ t_1, t_2, \ldots, t_k \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{t_1(t_1 + 1)\, t_2(t_2 + 1) \ldots t_k(t_k + 1)} .$$

Beweis. Wir können schon voraussetzen, dass $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ ist. Die Menge $E\begin{pmatrix} n_1, n_2, \ldots, n_k \\ t_1, t_2, \ldots, t_k \end{pmatrix}$ ist gleich der Vereinigungsmenge aller derjenigen Intervalle $I_{d_1 d_2 \ldots d_{n_k}}$ der n_k-ten Ordnung, für welche $d_{n_i} = t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ist. Daher haben wir

$$\left| E\begin{pmatrix} n_1, n_2, \ldots, n_k \\ t_1, t_2, \ldots, t_k \end{pmatrix} \right| = \sum \frac{1}{d_1(d_1 + 1)\, d_2(d_1 + 1) \ldots d_{n_k}(d_{n_k} + 1)} ;$$

rechts haben wir eine n_k-fache Reihe, in welcher d_j alle natürlichen Zahlen durchläuft, falls $j \neq n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ist, und d_{n_i} den Wert t_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ annimmt. Daraus folgt die Behauptung des Lemmas.

Lemma 2,2. *Für jedes* $j \leqq n$ *gilt* $a_j \leqq n \log n$.

Beweis. Da $F_n \subset A_j$ ist, haben wir

$$a_j \leqq \int_{A_j} d_j^2(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{r=1}^{n \log n} r^2 \left| E\begin{pmatrix} j \\ r \end{pmatrix} \right| .$$

Daraus bekommt man nach Lemma 2,1

$$a_j \leqq \sum_{r=1}^{n\log n} r \frac{1}{r+1} \leqq \sum_{r=1}^{n\log n} 1 = [n \log n] \leqq n \log n\,.$$

Lemma 2,3. *f sei eine positive, nicht-wahsende, auf $\langle 1, +\infty)$ definierte Funktion, es sei $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dann existiert eine Konstante $c_1' > 0$, so dass für alle $x \geqq 1$ die Beziehung*

$$\sum_{k=1}^{x} f(k) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t + c_1' + \mathrm{O}(f(x))$$

gilt.

Beweis. Siehe [18], S. 10–11.

Lemma 2,4. *Es existiert eine absolute Konstante $c_1^* > 0$, so dass für jedes $n > 2$ und für je zwei Zahlen $i, j \leqq n$, $i \neq j$ die Ungleichheit*

$$|b_{ij} - \log^2 n| \leqq c_1^* \log n \log\log n$$

gilt.

Beweis. Es sei $n > 2$, $i, j \leqq n$, $i \neq j$. Aus der Definition von F_n folgt

$$b_{ij} = \int_{F_n} d_i(x)\, d_j(x)\,\mathrm{d}x = \tag{23}$$

$$= \int_{A_i \cap A_j} d_i(x)\, d_j(x)\,\mathrm{d}x - \int_{(A_i\cap A_j)\cap F_n'} d_i(x)\, d_j(x)\,\mathrm{d}x = I_1 - I_2\,.$$

Für das erste Integral I_1 bekommen wir auf Grund von Lemma 2,1

$$I_1 = \int_{A_i\cap A_j} d_i(x)\, d_j(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{r=1}^{n\log n} \sum_{s=1}^{n\log n} rs \left| E\begin{pmatrix} i, & j \\ r, & s\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \sum_{r=1}^{n\log n} \frac{1}{r+1} \sum_{s=1}^{n\log n} \frac{1}{s+1} = \left(\sum_{k=1}^{n\log n} \frac{1}{k+1}\right)^2.$$

Nach Lemma 2,3 bekommt man jetzt

$$\sum_{k=1}^{n\log n} \frac{1}{k+1} = \int_1^{n\log n} \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + c_1' + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\log n + 1}\right) = \log n + \log\log n - \log 2 +$$

$$+ \log\left(1 + \frac{1}{n\log n}\right) + c_1' + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\log n + 1}\right) = \log n + \vartheta_1(n)$$

mit $|\vartheta_1(n)| \leqq c_2' \log\log n$, wo c_2' eine absolute Konstante ist. Daraus folgt

$$I_1 = \log^2 n + \vartheta_2(n) \tag{24}$$

mit $|\vartheta_2(n)| \leqq c_3' \log n \log\log n$, wo c_3' eine absolute Konstante ist.

Jetzt schätzen wir das zweite Integral I_2 ab (siehe (23)). Auf Grund einiger elementarer Eigenschaften des Integrals bekommt man

$$I_2 = \int_{(A_i \cap A_j) \cap F_n'} d_i(x)\, d_j(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{r=1}^{n\log n} \sum_{s=1}^{n\log n} rs \left| F_n' \cap E\begin{pmatrix} i, j \\ r, s \end{pmatrix} \right| .$$

Aus der Definition von F_n folgt

$$F_n' = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^* , \quad A_k^* = \{x \in (0, 1\rangle;\, d_k(x) > n \log n\} .$$

Also $A_k^* = \bigcup_{l=[n\log n]+1}^{\infty} A_{kl}^*$, wo $A_{kl}^* = \{x \in (0, 1\rangle;\, d_k(x) = l\}$ ist. Aus der Definition der Mengen A_{kl}^* folgt $A_{kp}^* \cap A_{kq}^* = \emptyset$, falls $p \neq q$ ist. Daraus bekommt man

$$\left| F_n' \cap E\begin{pmatrix} i, j \\ r, s \end{pmatrix} \right| \leqq \sum_{k=1}^{n} \left| A_k^* \cap E\begin{pmatrix} i, j \\ r, s \end{pmatrix} \right| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=[n\log n]+1}^{\infty} \left| A_{kl}^* \cap E\begin{pmatrix} i, j \\ r, s \end{pmatrix} \right| . \tag{25}$$

Wenn $k = i$ oder $k = j$ ist, dann ist offensichtlich $A_{kl}^* \cap E\begin{pmatrix} i, j \\ r, s \end{pmatrix} = \emptyset$. Wenn $k \neq i, j$ ist, dann bekommen wir nach dem Lemma 2,1

$$\left| A_{kl}^* \cap E\begin{pmatrix} i, j \\ r, s \end{pmatrix} \right| = \left| E\begin{pmatrix} i, j, k \\ r, s, l \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{r(r+1)} \frac{1}{s(s+1)} \frac{1}{l(l+1)}$$

und so haben wir wegen (25)

$$\left| F_n' \cap E\begin{pmatrix} i, j \\ r, s \end{pmatrix} \right| \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)\, s(s+1)} \sum_{l=[n\log n]+1}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{r(r+1)\, s(s+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[n \log n] + 1} \leqq \frac{1}{r(r+1)\, s(s+1)} \frac{1}{\log n} ,$$

also ist

$$T_2 \leqq \frac{1}{\log n} \sum_{r=1}^{n\log n} \sum_{s=1}^{n\log n} \frac{1}{(r+1)(s+1)} = \frac{1}{\log n} \left(\sum_{k=1}^{n\log n} \frac{1}{k+1} \right)^2 = \frac{1}{\log n} T_1 .$$

Wenn wir jetzt (24) berücksichtigen, sehen wir sofort, dass eine absolute Konstante $c_4' > 0$ so existiert, dass für jedes $n > 2$ die Beziehung

$$I_2 \leqq c_4' \log n \tag{26}$$

gilt. Aus (23), (24), (26) folgt unmittelbar die Behauptung des Lemmas.

Lemma 2,5. *Es existiert eine absolute Konstante $c_2^* > 0$, so dass für jedes $n > 2$ und jedes $j \leqq n$ die Beziehung*

$$c_j = \log n + \vartheta(n) , \quad |\vartheta(n)| \leqq c_2^* \log \log n$$

gilt ($\vartheta(n)$ ist von j unabhängig).

Beweis. Aus der Definition von c_j bekommt man

$$c_j = \int_{F_n} d_j(x)\,\mathrm{d}x = \int_{A_j} d_j(x)\,\mathrm{d}x - \int_{A_j \cap F_n'} d_j(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{27}$$

Auf Grund der elementaren Eigenschaften des Integrals bekommen wir für das erste Integral an der rechten Seite von (27)

$$\int_{A_j} d_j(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{r=1}^{n\log n} r \left| E\binom{j}{r} \right| = \sum_{r=1}^{n\log n} \frac{1}{r+1}\,.$$

Aus dem Beweis des vorhergehenden Lemmas folgt dann

$$\int_{A_j} d_j(x)\,\mathrm{d}x = \log n + \vartheta_1(n)\,, \quad |\vartheta_1(n)| \leqq c_2' \log\log n\,; \tag{28}$$

c_2' ist eine absolute Konstante.

Für das zweite Integral an der rechten Seite von (27) bekommt man

$$\int_{A_j \cap F_n'} d_j(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{r=1}^{n\log n} r \left| F_n' \cap E\binom{j}{r} \right|.$$

Durch ein Verfahren, das dem bei der Abschätzung von $\left| F_n' \cap E\binom{i,\,j}{r,\,s} \right|$ im Beweis des Lemmas 2,4 benutzten Verfahren ähnlich ist, kann man leicht feststellen, dass eine absolute Konstante c_5' [1], $c_5' > 0$ so existiert, dass für jedes $n > 2$ die Ungleichheit

$$\left| F_n' \cap E\binom{j}{r} \right| \leqq \frac{c_5'}{\log n} \frac{1}{r(r+1)}$$

gilt. So ist

$$\int_{A_j \cap F_n'} d_j(x)\,\mathrm{d}x \leqq \frac{c_5'}{\log n} \sum_{r=1}^{n\log n} \frac{1}{r+1}\,. \tag{29}$$

Noch einmal brauchen wir die Beziehung

$$\sum_{r=1}^{n\log n} \frac{1}{r+1} = \log n + \vartheta_1(n) \tag{30}$$

mit $|\vartheta_1(n)| \leqq c_2' \log\log n$, wo c_2' eine absolute Konstante ist. Aus (29), (30) folgt

$$\int_{A_j \cap F_n'} d_j(x)\,\mathrm{d}x \leqq c_6'\,, \tag{31}$$

[1]) Man kann $c_5' = 1$ wählen.

$c_6' > 0$, c_6' ist eine absolute Konstante. Aus (27), (28) und (31) folgt schon die Behauptung des Lemmas unmittelbar.

Beweis des Satzes 2,10. Es sei $\varepsilon > 0$. Setzen wir

$$E_n = \left\{x \in (0, 1\rangle;\ \left|\frac{\sigma_n(x)}{n \log n} - 1\right| > \varepsilon\right\}.$$

Offensichtlich ist

$$|E_n \cap F_n'| \leqq |F_n'| \leqq \sum_{k=1}^{n} |A_k^*|\,, \quad \text{wo} \quad A_k^* = \{x \in (0, 1\rangle;\ d_k(x) > n \log n\}$$

ist. Die Menge A_k^* ist in der Vereinigungsmenge aller derjenigen Intervalle $I_{d_1 d_2 \dots d_k}$ k-ter Ordnung enthalten, wo d_i $(i = 1, 2, \dots, k - 1)$ alle natürlichen Zahlen durchläuft und $d_k \geqq [n \log n] + 1$ ist. Daher ist

$$|A_k^*| \leqq \sum_{l=[n \log n]+1}^{\infty} \frac{1}{l(l + 1)} \leqq \frac{1}{n \log n}$$

und so haben wir

$$|F_n'| \leqq \frac{1}{\log n}\,, \quad |E_n \cap F_n'| = o(1) \quad (n \to \infty)\,.$$

Es genügt also zu beweisen, dass $|E_n \cap F_n| = o(1)$ $(n \to \infty)$ ist. Aus der offensichtlich Ungleichheit

$$\int_{E_n \cap F_n} \left(\frac{\sigma_n(x)}{n \log n} - 1\right)^2 dx \geqq \varepsilon^2 |E_n \cap F_n|$$

folgt

(32) $$|E_n \cap F_n| \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{E_n \cap F_n} \left(\frac{\sigma_n(x)}{n \log n} - 1\right)^2 dx \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2 \log^2 n} \left\{\int_{F_n} \sigma_n^2(x)\, dx - 2n \log n \int_{F_n} \sigma_n(x)\, dx + n^2 \log^2 n\right\}.$$

Erwägen wir, dass

$$\int_{F_n} \sigma_n^2(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{i,j \leqq n, i \neq j} b_{ij}$$

ist. Aus Lemma 2,2 folgt dann

(33) $$\sum_{j=1}^{n} a_j \leqq n^2 \log n$$

und aus Lemma 2,4 folgt

$$(34) \qquad \sum_{i,j \leqq n, i \neq j} b_{ij} \leqq n^2 \log^2 n + c_1^* n^2 \log n \log \log n\,.$$

Nach Lemma 2,5 bekommen wir

$$-2n \log n \int_{F_n} \sigma_n(x)\,\mathrm{d}x = -2n \log n \sum_{j=1}^{n} c_j = -2n \log n(n \log n + n\,\vartheta(n))\,,$$

$|\vartheta(n)| \leqq c_2^* \log \log n$; c_2^* ist die im Lemma 2,5 vorkommende absolute Konstante. Daraus folgt, dass der mittlere Summand an der rechten Seite von (32) gleich der Grösse

$$(35) \qquad -2n^2 \log^2 n + \mathrm{O}(n^2 \log n \log \log n)$$

ist.

Aus (32), (33), (34), (35) folgt

$$|E_n \cap F_n| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2 \log^2 n} \cdot \{n^2 \log n + n^2 \log^2 n - 2n^2 \log^2 n + n^2 \log^2 n +$$

$$+ \mathrm{O}(n^2 \log n \log \log n)\} = \mathrm{O}\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right) = \mathrm{o}(1) \quad (n \to \infty)\,.$$

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Satz 2,11. *Für fast alle* $x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in (0, 1\rangle$ *gilt*

$$(36) \quad \frac{1}{d_1(x)} + \frac{1}{d_1(x) + d_2(x)} + \ldots + \frac{1}{d_1(x) + d_2(x) + \ldots + d_n(x)} + \ldots = \infty\,.$$

Folgerung. *Für fast alle* $x \in (0, 1\rangle$ *gilt* $\sum_{j=1}^{\infty} 1/d_j(x) = +\infty$.

Beweis des Satzes. Wenn die Reihe (36) auf einer Menge von positivem Mass konvergiert, dann existiert auf Grund des bekannten Satzes von Jegorov eine Menge $F \subset (0, 1\rangle$, $|F| > 0$, so dass die Reihe (36) auf F gleichmässig konvergiert. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \geqq 2$, so dass für jedes $m \geqq n(\varepsilon)$ und jedes $k \geqq 1$ die Ungleichheit

$$(37) \qquad \sum_{n=m}^{m+k} \int_F \frac{\mathrm{d}x}{\sigma_n(x)} < \varepsilon$$

gilt. Setzen wir $U_n = \{x \in (0, 1\rangle;\ \sigma_n(x) > 2n \log n\}$. Dann gilt für alle hinreichend kleinen ε die Inklusion $U_n \subset E_n$ und so ist zufolge des Satzes 2,10 $|U_n| \to 0$. Dann ist aber

$$\int_F \frac{dx}{\sigma_n(x)} \geqq \int_{F_n \cap U_n'} \frac{dx}{\sigma_n(x)} \geqq \frac{1}{2n \log n} |F_n \cap U_n'| = \frac{|F| - |F \cap U_n|}{2n \log n}.$$

Wegen $|F \cap U_n| \leqq |U_n|$ gilt für alle hinreichend grossen n (für $n > n_1$) die Ungleichheit

$$\int_F \frac{dx}{\sigma_n(x)} > \frac{|F|}{4n \log n};$$

daraus folgt für $m > n_1$

$$\sum_{n=m}^{m+k} \int_F \frac{dx}{\sigma_n(x)} > \frac{|F|}{4} \sum_{n=m}^{m+k} \frac{1}{n \log n} \to +\infty,$$

falls $k \to \infty$. Das ergibt aber einen Widerspruch mit (37). Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

3. ANWENDUNGEN DES HAUSDORFFSCHEN MASSES IN DER THEORIE DER LÜROTHSCHEN REIHEN

M_k bezeichne bei natürlichem k die Menge aller derjenigen $x = |d_1(x), d_2(x), \ldots| \in \in (0, 1\rangle$, für welche $d_n(x) \leqq k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist. Setzen wir $M_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. M_∞ ist offensichtlich die Menge aller $x \in (0, 1\rangle$ mit beschränkten Folgen von Lürothschen Ziffern. Wie wir schon gesehen haben (siehe den Satz 1,3), hat jede der Mengen M_∞, M_k $(k = 1, 2, \ldots)$ das Lebesguesche Mass 0. In diesem Teil der Arbeit finden wir die genauen Werte der Hausdorffschen Dimensionen der Mengen M_∞, M_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Bemerken wir, dass der Gedanke des zweiten Teils des Beweises des Satzes 3,1 auf einem von Professor V. Jarník benutzen Verfahren (siehe [19]) beruht.

Vorher beweisen wir einige Hilfssätze und studieren die Struktur der Mengen M_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

Definieren wir für $x \in \langle 0, 1\rangle$ die Funktion

$$\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(l^2 + l)^x}$$

(k ist natürlich). Die Funktion φ_k ist stetig und fallend auf dem Intervall $\langle 0, 1\rangle$ und $\varphi_k(0) = k$, $\varphi_k(1) = 1 - 1/(k+1)$. β_k bezeichne die Wurzel der Gleichung

$$\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(l^2 + l)^x} = 1.$$

Offensichtlich ist $0 \leqq \beta_k < 1$.

Lemma 3,1. *Wenn* β_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *die vorige Bedeutung haben, so ist*

$$\beta_1 = 0 < \tfrac{1}{2} < \beta_2 < \beta_3 < \ldots; \quad \beta_k \to 1\,.^{2)}$$

Beweis. Offenbar $\beta_1 = 0$. Da die Funktion φ_2 fallend ist, genügt es zum Beweis der Gültigkeit von $\frac{1}{2} < \beta_2$ zu zeigen, dass $\varphi_2(\frac{1}{2}) > 1$ ist. Es ist aber $\varphi_2(\frac{1}{2}) = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{6}$ und aus den offensichtlichen Ungleichheiten $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, $\sqrt{6} < 3$ folgt $\varphi_2(\frac{1}{2}) > \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

Weiter ist $\varphi_k(x) < \varphi_{k+1}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$; daraus folgt $\beta_k < \beta_{k+1}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Jetzt schätzen wir $1 - \beta_k$ ab. Erwägen wir, dass die Funktion φ_k im Intervall $(0, 1)$ eine negative Ableitung

$$\varphi_k'(x) = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(l^2 + l)^x} \log \frac{1}{l^2 + l}$$

hat und

$$|\varphi_k'(x)| \geqq \varphi_k(x) \log 2 > 0 \tag{38}$$

ist. Auf Grund des Lagrangeschen Mittelwertsatzes bekommt man $-1/(k+1) = \varphi_k(1) - \varphi_k(\beta_k) = (1 - \beta_k)\,\varphi_k'(x_0)$, wobei x_0 zwischen β_k und 1 liegt, und so ist

$$1 - \beta_k = \frac{1}{k+1} \frac{1}{|\varphi_k'(x_0)|}\,. \tag{39}$$

Wegen (38), (39) haben wir

$$|\varphi_k'(x_0)| \geqq \varphi_k(x_0) \log 2 \geqq \varphi_k(1) \log 2 = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \log 2\,,$$

also

$$1 - \beta_k \leqq \frac{1}{k+1} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \log 2} \to 0\,.$$

Daraus folgt $\beta_k \to 1$. Damit ist der Beweis beendet.

Wir haben schon den Begriff des Intervalles der n-ten Ordnung $(n \geqq 1)$ erwähnt. Das Intervall $I_0 = (0, 1\rangle$ nennen wir ein Intervall der nullten Ordnung. $I_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ ist ein halboffenes Intervall der Gestalt $\langle a, b)$, wobei

$$a = \frac{1}{d_1 + 1} + \frac{1}{s_1} \frac{1}{d_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} \frac{1}{d_n + 1}\,,$$

$$b = \frac{1}{d_1 + 1} + \frac{1}{s_1} \frac{1}{d_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} \frac{1}{d_n + 1} + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_n}$$

ist.

---

2) Es ist $\beta_2 \doteq 0{,}6005$, $\beta_3 \doteq 0{,}7584, \ldots$

b kann man auch in der Form

$$b = \frac{1}{d_1 + 1} + \frac{1}{s_1} \frac{1}{d_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} \frac{1}{d_n}$$

schreiben. Daraus folgt $I_{d_1 \ldots d_{n-1}} \subset I_{d_1 d_2 \ldots d_{n-1} d_n}$ und $I_{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}} = \bigcup_{l=1}^{\infty} I_{d_1 d_2 \ldots d_{n-1} l}$ ist. Es sei noch bemerkt, dass $|I_{d_1 d_2 \ldots d_n}| = 1/(s_1 s_2 \ldots s_n)$ ist.

Lemma 3,2. *k sei natürlich, $k \geqq 2$, es sei $\alpha < \beta_k$. Dann gilt für jedes $n > 0$ und für jede Folge $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ von natürlichen Zahlen die Ungleichheit*

$$|I_{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}}|^\alpha \leqq \sum_{l=1}^{k} |I_{d_1 d_2 \ldots d_{n-1} l}|^\alpha . \tag{40}$$

Beweis. Wenn $n = 1$ ist, dann ist $I_{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}} = I_0 = (0, 1\rangle$ und links in (40) haben wir 1. Rechts in (40) haben wir $\sum_{l=1}^{k} 1/(l^2 + l)^\alpha = \varphi_k(\alpha)$ und die Richtigkeit von (40) folgt aus den Eigenschaften von φ_k.

Es sei also $n \geqq 2$. Dann ist die linke Seite von (40) gleich der Zahl $1/(s_1 s_2 \ldots s_{n-1})^\alpha$ und die rechte Seite von (40) ist gleich der Zahl

$$\frac{1}{(s_1 s_2 \ldots s_{n-1})^\alpha} \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(l^2 + l)^\alpha} .$$

Die Richtigkeit von (40) folgt wieder leicht aus den Eigenschaften von φ_k.

Es sei im weiteren k fest, $k \geqq 2$. Das Intervall $I_0 = (0, 1\rangle$ nennen wir ein langes Intervall der nullten Ordnung, das Intervall $K_0 = (1/(k + 1), 1\rangle$ nennen wir ein kurzes Intervall der nullten Ordnung. Die Intervalle $I_{d_1} = (1/(d_1 + 1), 1/d_1\rangle$ $(d_1 = 1, 2, \ldots, k)$ heissen lange Intervalle der ersten Ordnung, die Intervalle

$$K_{d_1} = \left(\frac{1}{d_1 + 1} + \frac{1}{s_1(k + 1)}, \frac{1}{d_1} \right\rangle \quad (d_1 = 1, 2, \ldots, k)$$

heissen kurze Intervalle der ersten Ordnung. Die Intervalle $I_{d_1 d_2 \ldots d_n}$, wo $d_j \leqq k$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ist, heissen lange Intervalle der n-ten Ordnung, die Intervalle

$$K_{d_1 d_2 \ldots d_n} = \left(\frac{1}{d_1 + 1} + \frac{1}{s_1} \frac{1}{d_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} \frac{1}{d_n + 1} + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_n} \frac{1}{k + 1}, \right.$$
$$\left. \frac{1}{d_1 + 1} + \frac{1}{s_1} \frac{1}{d_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} \frac{1}{d_n + 1} + \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_n} \right\rangle ,$$

wobei $d_j \leqq k$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ist, heissen kurze Intervalle der n-ten Ordnung. Wir sehen also, dass $K_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ ein solcher Teil des Intervalles $I_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ ist, welcher aus $I_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ durch Weglassung eines Intervalles mit Endpunkten c, d ensteht, wo c gleich dem linken Endpunkt des Intervalles $I_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ ist und d gleich der Summe des linken

Endpunktes des Intervalles $I_{d_1 d_2 \dots d_n}$ mit der Zahl

$$\frac{1}{s_1 s_2 \dots s_n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} |I_{d_1 d_2 \dots d_n}|$$

ist.

Aus der Konstruktion der Lürothschen Reihen und aus der Definition von M_k folgt, dass

$$M_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} Z^{(n)} \tag{41}$$

ist, wo $Z^{(n)}$ gleich der Vereinigungsmenge aller kurzen Intervalle der n-ten Ordnung ist.

In diesem Teil der Arbeit versteht man unter der abgeschlossenen Hülle einer Menge deren abgeschlossene Hülle im Raum $E_1 = (-\infty, +\infty)$.

Setzen wir $T^{(n)} = \bigcup_{d_j \leqq k, j=1,2,\dots,n} \bar{K}_{d_1 d_2 \dots d_n}$ (also bei $n = 0$ ist $\bar{K}_0 = \langle 1/(k+1), 1 \rangle$). Ferner setzen wir

$$N_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{(n)} .$$

Es ist offensichtlich $M_k \subset N_k$ und $N_k - M_k$ ist eine abzählbare Menge; daher ist $\dim M_k = \dim N_k$ (siehe [10]). Diese Tatasache werden wir im weiteren benutzen.

Jedes Intervall $\bar{K}_{d_1 d_2 \dots d_n}$ enthält k punktfremde abgeschlossene Intervalle $\bar{K}_{d_1 d_2 \dots d_n p}$ ($p = 1, 2, \dots, k$). Daraus und aus (42) folgt, dass N_k eine perfekte Menge und so auch ein Kompat ist.

Die Intervalle $\bar{I}_{d_1 d_2 \dots d_n}$ nennen wir lange abgeschlossene Intervalle und die Intervalle $\bar{K}_{d_1 d_2 \dots d_n}$ nennen wir kurze abgeschlossene Intervalle der n-ten Ordnung.

Satz 3,1. *Setzen wir für* $k = 1, 2, 3, \dots$

$$M_k = \{x \in (0, 1\rangle;\ d_n(x) = k,\ n = 1, 2, \dots\} .$$

Dann ist $\dim M_k = \beta_k$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Beweis. Da die Menge M_1 aus einem einzigen Punkt besteht, gilt $\dim M_1 = 0 = \beta_1$. Daher können wir schon $k \geqq 2$ voraussetzen.

Der Beweis besteht aus zwei Teilen.

1) Beweis der Ungleichheit $\dim M_k \leqq \beta_k$.

Es sei $\beta_k < \alpha < 1$. Wir zeigen, dass $\mu^{(\alpha)}\{M_k\} = 0$ ist. Daraus wird $\dim M_k \leqq \beta_k$ folgen.

Aus der Definition von M_k folgt (siehe (41)), dass $M_k \subset Z^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ ist. Es sei $\eta > 0$. Wählen wir $n_0(\eta)$, so dass $1/2^n < \eta$ für jedes $n > n_0(\eta)$ ist. Es sei $n > n_0(\eta)$. Dann ist $Z^{(n)}$ gleich der Vereinigungsmenge aller kurzen Intervalle der n-ten Ordnung $K_{d_1 d_2 \dots d_n}$, $d_j \leqq k$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. Das ist ein abzählbares, die Menge M_k überdeckendes System von Intervallen; für die Länge jedes Intervalles dieses Systems gilt die Beziehung

$$|K_{d_1 d_2 \dots d_n}| = \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_n}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) < \frac{1}{2^n} < \eta\,,$$

weil $s_j = d_j(d_j + 1) \geqq 2$ ist. Aus der Definition von $\mu_\eta^{(\alpha)}\{M_k\}$ folgt dann

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{M_k\} \leqq \sum_{d_j \leqq k, j=1,2,\dots,n} \frac{1}{s_1^\alpha s_2^\alpha \dots s_n^\alpha}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^\alpha < \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(l^2 + l)^\alpha}\right)^n = (\varphi_k(\alpha))^n\,.$$

Da diese Beziehung für jedes $n > n_0(\eta)$ gilt und da nach der Definition von β_k die Ungleichheit $\varphi_k(\alpha) < 1$ gilt, bekommen wir daraus $\mu_\eta^{(\alpha)}\{M_k\} = 0$ für jedes $\eta > 0$ und so ist $\mu^{(\alpha)}\{M_k\} = 0$.

2) Beweis der Ungleichheit $\dim M_k \geqq \beta_k$.

Da $\dim M_k = \dim N_k$ ist, genügt es die Ungleichheit $\mu^{(\alpha)}\{N_k\} > 0$ für $0 < \alpha < \beta_k$ zu beweisen. Setzen wir

$$W^{(0)} = \langle 0, 1 \rangle\,, \quad W^{(n)} = \bigcup_{d_j \leqq k, j=1,2,\dots,n} \bar{I}_{d_1 d_2 \dots d_n} \quad (n \geqq 1)\,.$$

Dann ist

$$W^{(0)} \supset T^{(0)} \supset W^{(1)} \supset T^{(1)} \supset \dots \supset W^{(n)} \supset T^{(n)} \supset \dots$$

(also $W^{(1)} = T^{(0)}$, $W^{(2)} = T^{(1)}$ u. s. w.) und so ist (siehe (42))

$$N_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{(n)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} W^{(n)}\,.$$

Es sei $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach der Definition der Zahl $\mu_\eta^{(\alpha)}\{N_k\}$ eine abzählbare aus offenen Intervallen der Länge $\leqq \eta$ bestehende η-Überdeckung V_0 der Menge N_k mit

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{N_k\} + \varepsilon > \sum_{i \in V_0} |i|^\alpha\,. \tag{43}$$

Da N_k ein Kompakt ist, existiert zufolge des Satzes von Borel eine endliche Menge $V_0' \subset V_0$, so dass V_0' wieder eine η-Überdeckung der Menge N_k ist. Behalten wir in V_0' nur solche Intervalle, deren Durchschnitt mit N_k nicht leer ist. So bekommen wir ein neues System V_1 von Intervallen; V_1 ist eine η-Überdeckung von N_k und offensichtlich

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{N_k\} + \varepsilon > \sum_{i \in V_1} |i|^\alpha\,.$$

Jedes Intervall $i \in V_1$ enthält unendlich viele Punkte aus N_k, weil N_k eine perfekte Menge ist. Für $i \in V_1$ setzen wir $a = \inf i \cap N_k$, $b = \sup i \cap N_k$. Dann ist $a < b$; $a, b \in N_k$. Ersetzen wir (jedes) Intervall $i \in V_1$ durch das Intervall $\langle a, b \rangle$. So bekommen wir anstatt V_1 ein neues (endliches) System V_2 von Intervallen. V_2 ist eine η-Überdeckung der Menge N_k, die Endpunkte jedes Intervalles $i \in V_2$ gehören zur Menge N_k und für jedes $i \in V_2$ ist die Menge $i \cap N_k$ unendlich. Offensichtlich $\sum_{i \in V_1} |i|^\alpha \geqq \sum_{i \in V_2} |i|^\alpha$ und so ist

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{N_k\} + \varepsilon > \sum_{i \in V_2} |i|^\alpha . \tag{44}$$

Da $N_k \subset \bar{K}_0 = \langle 1/(k+1), 1 \rangle$ ist, haben wir $i \subset \bar{K}_0$ für jedes $i \in V_2$. Wie wir schon gesehen haben, gehören die Endpunkte jedes Intervalles $i \in V_2$ zur Menge N_k. Weiter liegt jeder Punkt der Menge N_k in einem kurzen abgeschlossenen Intervall der n-ten Ordnung (n ist eine natürliche Zahl) und $|\bar{K}_{d_1 d_2 \dots d_n}| \leqq 1/2^n \to 0$. Daraus folgt, dass bei genügend grossen n das Intervall i die Punkte aus wenigstens zwei verschiedenen kurzen abgeschlossenen Intervallen der n-ten Ordnung enthalten muss. Da $i \subset \bar{K}_0$ ist, existiert ein $m \geqq 0$ und im Falle $m \geqq 1$ auch so eine Folge $d_1, d_2, \dots$ $\dots, d_m$ von natürlichen Zahlen, dass $i \subset \bar{K}_{d_1 d_2 \dots d_m}$ ist und $p, l \leqq k$, $p \neq l$ so existieren, dass

$$i \cap \bar{K}_{d_1 d_2 \dots d_m p} \neq \emptyset \neq i \cap \bar{K}_{d_1 d_2 \dots d_m l} \tag{45a}$$

ist. Wenn $m = 0$ ist, dann existieren $p, l \leqq k$, $p \neq l$ so dass

$$i \cap \bar{K}_p \neq \emptyset \neq i \cap \bar{K}_l \tag{45b}$$

ist. Daraus folgt im Falle $m > 0$, dass die Länge des Intervalles i nicht kleiner als die Entfernung der Intervalle $\bar{K}_{d_1 d_2 \dots d_m p}$, $\bar{K}_{d_1 d_2 \dots d_m l}$ ist. Unter der Voraussetzung $p < l$ haben wir also

$$|i| \geqq \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_m (p+1) p} + \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_m} \frac{1}{p(p+1)} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_m} \frac{1}{l} =$$

$$= \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_m} \left\{ \frac{l - (p+1)}{l(p+1)} + \frac{1}{(k+1)\, p(p+1)} \right\} \geqq \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_m} \frac{1}{k(k+1)^2},$$

wobei $s_j = d_j(d_j + 1)$ $(j = 1, 2, \dots, m)$, also $1/(s_1 s_2 \dots s_m) = |\bar{I}_{d_1 d_2 \dots d_m}|$ ist. Daraus folgt

$$|i| \geqq \frac{1}{k(k+1)^2} |\bar{I}_{d_1 d_2 \dots d_m}| . \tag{46a}$$

Dieselbe Ungleichheit bekommt man auch im Falle $l < p$. Im Falle $m = 0$ kann man leicht beweisen, dass

$$|i| \geqq \frac{1}{k(k+1)^2} |\bar{I}_0| = \frac{1}{k(k+1)^2} \tag{46b}$$

ist.

Wenn wir jetzt jedes Intervall $i \in V_2$, für welches (46a) bzw. (46b) gilt, durch das Intervall $\bar{I}_{d_1 d_2 \dots d_m}$ bzw. $\bar{I}_0$ ersetzen, bekommen wir ein neues System V_3 von Intervallen. Jedes Intervall dieses Systems ist schon ein langes abgeschlossenes Intervall einer Ordnung m; dabei hängt m von dem ursprünglichen, ersetzten Intervall $i \in V_2$ ab. Zufolge (46a), (46b) haben wir

$$\sum_{i \in V_2} |i|^\alpha \geqq \frac{k^\alpha}{(k^2 + k)^{2\alpha}} \sum_{i \in V_3} |i|^\alpha . \tag{47}$$

Wenn in V_3 zwei solche Intervalle i, i' vorkommen, dass i ein Intervall der m-ten Ordnung und i' der n-ten Ordnung mit $n < m$ und $i \subset i'$ ist, dann lassen wir aus V_3 das Intervall i weg. So bekommen wir ein neues System V_4 von Intervallen. Jedes Intervall aus V_4 ist ein langes abgeschlossenes Intervall irgendeiner Ordnung und jedes $i \in V_4$ enthält schon kein anderes Intervall des Systems V_4. Offensichtlich haben wir

$$\sum_{i \in V_3} |i|^\alpha \geqq \sum_{i \in V_4} |i|^\alpha \tag{48}$$

und so wegen (44), (47), (48) bekommt man

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{N_k\} + \varepsilon \geqq \frac{k^\alpha}{(k^2 + k)^{2\alpha}} \sum_{i \in V_4} |i|^\alpha . \tag{49}$$

s sei die grösste nicht-negative Zahl mit der Eigenschaft, dass in V_4 sich irgendein Intervall der s-ten Ordnung befindet. Dann haben wir zwei Möglichkeiten:

a) Wenn $s = 0$ ist, dann ist $V_4 = \{\langle 0, 1 \rangle\}$ und zufolge von (49) bekommen wir

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{N_k\} + \varepsilon \geqq \frac{k^\alpha}{(k^2 + k)^{2\alpha}} .$$

So zufolge der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ bekommt man

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{N_k\} \geqq \frac{k^\alpha}{(k^2 + k)^{2\alpha}} .$$

b) Wenn $s > 0$ ist, dann existiert $\bar{I}_{d_1 d_2 \ldots d_s} \in V_4$, aber es gibt in V_4 kein Intervall der Form $\bar{I}_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ mit $n < s$, so dass $\bar{I}_{d_1 d_2 \ldots d_s} \subset \bar{I}_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ wäre (siehe die Konstruktion von V_4). Aus der Definition von N_k folgt, dass jedes lange Intervall beliebiger Ordnung unendlich viele Punkte aus N_k enthält. Da $\bar{I}_{d_1 d_2 \ldots d_s}$ in keinem Intervall aus V_4 kleinerer Ordnung enthalten ist, muss sich jedes der Intervalle

$$\bar{I}_{d_1 d_2 \ldots d_{s-1} r} , \quad 1 \leqq r \leqq k , \tag{50}$$

in V_4 befinden. Die Vereinigungsmenge der Intervalle (50) ist eine Untermenge von $\bar{I}_{d_1 d_2 \ldots d_{s-1}}$. Ersetzen wir in V_4 die Intervalle (50) durch das Intervall $\bar{I}_{d_1 d_2 \ldots d_{s-1}}$. So bekommen wir ein neues System V_5 von Intervallen und nach Lemma 3,2 haben wir $\sum_{i \in V_4} |i|^\alpha \geqq \sum_{i \in V_5} |i|^\alpha$. Wenn in V_5 noch ein Intervall der s-ten Ordnung sich befindet, dann wiederholen wir das vorige Verfahren. So bekommen wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein System V_j von Intervallen, in dem kein Intervall der s-ten Ordnung vorkommt und so ist die grösste nicht-negative Zahl l mit der Eigenschaft, dass in V_j irgendein Intervall der l-ten Ordnung vorkommt, nicht grösser als $s - 1$. Wenn wir so fortsetzen, kommen wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einem System V_f von Intervallen, welches die folgenden Eigenschaften hat: V_f überdeckt N_k; es gilt

$$\sum_{i \in V_4} |i|^\alpha \geqq \sum_{i \in V_5} |i|^\alpha \geqq \sum_{i \in V_j} |i|^\alpha \geqq \sum_{i \in V_f} |i|^\alpha ; \tag{51}$$

jedes Intervall aus V_f hat die Ordnung 0. Also ist $\sum_{i \in V_f} |i|^\alpha = 1$ und so haben wir

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{N_k\} \geqq \frac{k^\alpha}{(k^2 + k)^{2\alpha}} .$$

In beiden Fällen a), b) ist also $\mu_\eta^{(\alpha)}\{N_k\} \geqq k^\alpha/(k^2 + k)^{2\alpha}$ und daraus folgt

$$\mu^{(\alpha)}\{N_k\} = \lim_{\eta \to 0+} \mu_\eta^{(\alpha)}\{N_k\} \geqq \frac{k^\alpha}{(k^2 + k)^{2\alpha}} > 0 .$$

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Satz 3,2. *Es sei* $M_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. *Dann ist* $\dim M_\infty = 1$.

B e w e i s. Aus der Definition von M_∞ bekommt man

$$\dim M_\infty \geqq \dim M_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

und so infolge des Satzes 3,1 ist $\dim M_\infty \geqq \beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Nach Lemma 3,1 ist $\beta_k \to 1$, also $\dim M_\infty = 1$.

4. ANALYSE EINIGER METRISCHEN ERGEBNISSE VOM STANDPUNKT DER BAIRESCHEN KATEGORIEN VON MENGEN

In diesem Teil der Arbeit betrachten wir das Intervall $(0, 1\rangle$ als einen metrischen Raum mit euklidischer Metrik. Bezeichnen wir mit R die Menge aller rationalen Zahlen des Intervalles $(0, 1\rangle$ und setzen wir $X = (0, 1\rangle - R$. X betrachten wir im weiteren als einen metrischen Raum mit Euklidischer Metrik.

Im Zusammenhang mit dem Satz 1,2 beweisen wir jetzt ein Ergebnis. Bemerken wir, dass die weiter definierte Menge $H(\varphi; n_1, n_2, \ldots)$ mit $H(\varphi)$ übereinstimmt, falls φ die Voraussetzungen des Satzes 1,2 erfüllt und $n_1 < n_2 < \ldots$ die Folge aller natürlichen Zahlen ist.

Satz 4,1. $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *sei eine Folge von natürlichen Zahlen, es sei* $\varphi(n_k) > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Bezeichnen wir mit* $H(\varphi; n_1, n_2, \ldots)$ *die Menge aller*

$x \in (0, 1\rangle$, *welche die folgende Eigenschaft haben: zur Zahl x existiert ein* $c = c(x) > 0$, *so dass* $d_{n_k}(x) \leqq c\,\varphi(n_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *gilt. Dann ist die Menge* $H(\varphi; n_1, n_2, \ldots)$ *von erster Kategorie in* $(0, 1\rangle$.

Folgerung. M_∞ *ist eine Menge von erster Kategorie in* $(0, 1\rangle$.

Beweis des Satzes. B_s $(s = 1, 2, \ldots)$ bezeichne die Menge aller $x \in (0, 1\rangle$, für welche $d_{n_k}(x) \leqq [s\,\varphi(n_k)] + 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ gilt. Wir zeigen, dass B_s nirgendsdicht in $(0, 1\rangle$ ist.

Es sei $(\alpha, \beta) \subset (0, 1\rangle$. Da das System aller Intervalle der n-ten Ordnung das Intervall $(0, 1\rangle$ überdeckt und $|I_{d_1 d_2 \ldots d_n}| \leqq 1/2^n \to 0$ ist, existiert ein $k \geqq 1$ und eine Folge $d_1^0, d_2^0, \ldots, d_{n_k}^0$ von natürlichen Zahlen mit $I_{d_1{}^0 d_2{}^0 \ldots d^0{}_{n_k}} \subset (\alpha, \beta)$. Setzen wir $d_{n_{k+1}}^0 = [s\,\varphi(n_{k+1})] + 2$ und $d_j^0 = 1$ für $n_k < j < n_{k+1}$. Dann ist offensichtlich $I_{d_1{}^0 \ldots d^0{}_{n_k} d^0{}_{n_{k+1}}} \subset I_{d_1{}^0 \ldots d^0{}_{n_k}}$ und $I_{d_1{}^0 \ldots d^0{}_{n_k} \ldots d^0{}_{n_{k+1}}} \cap B_s = \emptyset$. Daraus folgt, dass B_s nirgendsdicht in $(0, 1\rangle$ ist und so infolge der offensichtlichen Gleichheit $H(\varphi; n_1, n_2, \ldots) = \bigcup_{s=1}^{\infty} B_s$ ist die Menge $H(\varphi; n_1, n_2, \ldots)$ von erster Kategorie in $(0, 1\rangle$.

Die Zahlen $x \in (0, 1\rangle$, welche die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(r, x)}{n} = \frac{1}{r(r + 1)} \quad (r = 1, 2, \ldots) \tag{52}$$

erfüllen, erscheinen als ein Analogon der normalen Zahlen bei den g-adischen Entwicklungen von reellen Zahlen (siehe den Satz 2,5). In der Arbeit [20] ist bewiesen, dass die normalen Zahlen (bei g-adischen Entwicklungen) des Intervalles $(0, 1\rangle$ eine Menge von erster Kategorie und vom Mass Null bilden. Jetzt zeigen wir, dass eine ähnliche Situation auch bei Lürothschen Reihen eintritt.

Satz 4,2. *Für alle* $x \in (0, 1\rangle$ *bis auf eine Menge von erster Kategorie in* $(0, 1\rangle$ *gilt die Beziehung*

$$\left\{\frac{N_n(r, x)}{n}\right\}_n' = \langle 0, 1\rangle \quad (r = 1, 2, \ldots)\,. \tag{53}$$

Folgerung. *Die Menge M aller* $x \in (0, 1\rangle$, *für welche* (52) *gilt, ist eine Menge von erster Kategorie in* $(0, 1\rangle$.

Beweis des Satzes. Sei $\zeta \in (0, 1)$, $r, k \geqq 1$. Bezeichnen wir mit $A_{\zeta,r,k,m}$ die Menge aller $x \in X$, für welche die Ungleichheit

$$\left|\frac{N_m(r, x)}{m} - \zeta\right| < \frac{1}{k}$$

gilt. Setzen wir $A_{\zeta,r,k} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{\zeta,r,k,m}$, $A_{\zeta,r} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{\zeta,r,k}$. Die Menge $A_{\zeta,r,k,m}$ ist der Vereinigungsmenge aller Mengen der Form $I_{d_1 d_2 \ldots d_m} \cap X$ gleich, wo $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ alle solche m-Tupel von natürlichen Zahlen durchläuft, welche die folgende Eigenschaft haben: wenn $p_r(m)$ die Anzahl der Zahlen r in der Folge $d_1, d_2, \ldots, d_m$ bedeutet, dann ist

$$\left| \frac{p_r(m)}{m} - \zeta \right| < \frac{1}{k} .$$

Daraus folgt, dass $A_{\zeta,r,k,m}$ in X offen ist und so ist $A_{\zeta,r}$ eine G_δ-Menge in X.

Wir zeigen, dass $A_{\zeta,r}$ eine in X dichte Menge ist. Es sei $(\alpha, \beta) \subset (0, 1\rangle$. Es genügt zu beweisen, dass

$$A_{\zeta,r} \cap [(\alpha, \beta) \cap X] \neq \emptyset . \tag{54}$$

Wählen wir eine natürliche Zahl n und natürliche Zahlen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ mit, $I_{d_1 d_2 \ldots d_n} \subset (\alpha, \beta)$. Es sei $C = \{m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots\}$ eine Menge von natürlichen Zahlen, deren asymptotische Dichte gleich ζ ist (eine solche Menge existiert siehe [22], S. 194–195). Wir können schon $m_1 > n$ voraussetzen. Es sei $p_1 < < p_2 < \ldots < p_j < \ldots$ die Folge aller natürlichen Zahlen, welche grösser als n sind und nicht zur Menge C gehören. Definieren wir die Zahl $x_0 = |d_1(x_0), d_2(x_0), \ldots| \in \in (0, 1\rangle$ folgendermassen:

$$d_j(x_0) = d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) , \quad d_{m_j}(x_0) = r \quad (j = 1, 2, \ldots) ,$$
$$d_{p_j}(x_0) = j \quad (j = 1, 2, \ldots) .$$

Dann ist offensichtlich $x_0 \in I_{d_1 d_2 \ldots d_n}$, also $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Weil die Folge $\{d_j(x_0)\}_{j=1}^{\infty}$ nicht periodisch ist, haben wir (siehe [1], S. 118) $x_0 \in X$. Aus der Definition von x_0 folgt $x_0 \in A_{\zeta,r}$; es gilt also (54).

Da jede dichte G_δ-Menge residual ist (siehe [21] S. 49), ist $A_{\zeta,r}$ in X und wegen der Abzählbarkeit von R auch in $(0, 1\rangle$ residual. Setzen wir $A_\zeta = \bigcap_{r=1}^{\infty} A_{\zeta,r}$. Dann ist A_ζ in $(0, 1)$ residual; zufolge der Abzählbarkeit von R ist auch die Menge $A = \bigcap_{\zeta \in R - \{1\}} A_\zeta$ in $(0, 1\rangle$ residual. A ist aber die Menge aller $x \in (0, 1\rangle$, für welche (53) gilt. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Im Zusammenhang mit den Sätzen 2,8 und 2,9 beweisen wir noch die folgenden zwei Ergebnisse.

Satz 4,3. *Für alle $x \in (0, 1\rangle$ bis auf eine Menge von erster Kategorie in $(0, 1\rangle$ gilt die Beziehung*

$$\left\{ \frac{d_{n+1}(x)}{d_n(x)} \right\}_n' = \langle 0, +\infty \rangle .$$

Beweis. Es sei $\zeta \in (0, +\infty)$, k, n seien natürliche Zahlen. Bezeichnen wir mit $B_{\zeta,k,n}$ die Menge aller $x \in X$, für welche die Ungleichheit

$$\left|\frac{d_{n+1}(x)}{d_n(x)} - \zeta\right| < \frac{1}{k}$$

gilt. $B_{\zeta,k,n}$ ist gleich der Vereinigungsmenge aller Mengen der Form $I_{d_1 d_2 \dots d_n d_{n+1}} \cap X$, wo $|d_{n+1}/d_n - \zeta| < 1/k$ ist. Also $B_{\zeta,k,n}$ ist eine in X offene Menge. Setzen wir $B_\zeta = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\zeta,k,n}$. So ist B_ζ eine G_δ-Menge in X.

Wir zeigen, dass B_ζ in X dicht ist. Es sei also $(a, b) \subset (0, 1\rangle$; es genügt zu zeigen, dass

$$B_\zeta \cap [(a, b) \cap X] \neq \emptyset \tag{55}$$

ist.

Es sei $I_{d_1^0 d_2^0 \dots d_m^0} \subset (a, b)$. Definieren wir $x_0 = |d_1(x_0), d_2(x_0), \dots| \in (0, 1\rangle$ folgendermassen: Wählen wir eine Folge $\{p_l/q_l\}_{l=1}^{\infty}$ von positiven rationalen Zahlen mit

$$\frac{p_l}{q_l} \to \zeta, \quad \frac{p_l}{q_l} \neq \zeta \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Dann ist $p_l \to +\infty$, $q_l \to +\infty$. Setzen wir

$$d_i(x_0) = d_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad d_{m+2l-1}(x_0) = q_l,$$
$$d_{m+2l}(x_0) = p_l \quad (l = 1, 2, \dots).$$

x_0 ist irrational, weil die Folge $\{d_j(x_0)\}_{j=1}^{\infty}$ nicht periodisch ist. Ferner haben wir $x_0 \in I_{d_1^0 d_2^0 \dots d_m^0} \subset (a, b)$, also $x_0 \in (a, b) \cap X$ und gleichzeitig $x_0 \in B_\zeta$, weil $d_{m+2l}(x_0)/d_{m+2l-1}(x_0) = p_l/q_l \to \zeta$ $(l \to +\infty)$ ist. Also gilt (55). Weiter läuft der Beweis auf eine ähnliche Weise wie der Beweis des vorhergehenden Satzes.

Ganz ähnlich kann man das folgende Ergebnis beweisen.

Satz 4,4. *Für alle $x \in (0, 1\rangle$ bis auf eine Menge von erster Kategorie in $(0, 1\rangle$ gilt die Beziehung*

$$\{0, 1, -1, 2, -2, \dots, k, -k, \dots\} \subset \{d_{n+1}(x) - d_n(x)\}_n'.$$

Literatur

[1] *O. Perron:* Irrationalzahlen, De Gruyter, Berlin—Leipzig, 1921.

[2] *A. Rényi:* A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle elöállításaiban, Mat. Lap. 7, (1956), 77—100.

[3] *P. Erdös-A. Rényi:* Some further statistical properties of the digits in Cantor's series, Acta math. acad. sci. Hung. *X* (1959), 21—29.

[4] *P. Erdös-A. Rényi:* On Cantor's series with convergent $\sum(1/q_n)$, Ann. Univ. Sci. Budap. de Rol. Eötvös nom. II (1959), 93—109.
[5] *P. Erdös-A. Rényi-P. Szüsz:* On Engel's and Sylvester's series, Ann. Univ. Sci. Budap. de Rol. Eötvös nom. *I* (1958), 7—32.
[6] *A. Rényi:* A new approach to the theory of Engel's series, Ann. Univ. Sci. Budap. de Rol. Eötv ösnom. *V* (1962), 25—32.
[7] *T. Šalát:* Cantorsche Entwicklungen der reellen Zahlen und das Hausdorffsche Mass, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. *VI* (1961), 15—41.
[8] *T. Šalát:* Über die Cantorschen Reihen, Czechosl. Math. J. *18* (*93*) (1968), 25—56.
[9] *L. Holzer:* Zur Bestimmung des Lebesgueschen Masses linearer Punktmengen, deren Elemente durch systematische Entwicklungen gegeben sind, Sitzungsberichte Akad. der Wissensch. in Wien, Mat.-naturwis.. Klasse, Abl. IIa, *137* (1928), **1**, 421—453.
[10] *T. Šalát:* О мере Хаусдорфа линейных множеств, Czechosl. Math. J. *11* (*86*) (1961), 24—56.
[11] *K. Knopp:* Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diphantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten, Math. Ann. *95* (1926), 409—426.
[12] *A. Rényi:* Wahrscheinlichkeitsrechnung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
[13] *K. Knopp:* Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 1931.
[14] *А. Хинчин:* Цепные дроби, Москва, 1961.
[15] *S. Hartman:* Quelques propriétés ergodiques des fractions continues, Studia Math. *XII* (1951), 271—278.
[16] *T. Šalát:* Remarks on the ergodic theory of the continued fractions, Mat. čas. SAV *17* (1967), 121—130.
[17] *A. Chinčin:* Metrische Kettenbruchprobleme, Comp. Math. *1* (1935), 361—382.
[18] *W. Specht:* Elementare Beweise der Primzahlsätze, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.
[19] *V. Jarník:* Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Prace matem.-fizyczne *XXXVI* (1928—1929), 91—106.
[20] *T. Šalát:* A remark on normal numbers, Revue roumaine de math. pures et appl. *XI* (1966), 53—56.
[21] *K. Kuratowski:* Topologie I, Warszawa, 1958.
[22] *H. H. Ostmann:* Additive Zahlentheorie I, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1956.

Anschrift des Verfassers: Bratislava, Šmeralova 2, ČSSR (Prírodovedecká fakulta Komenského univerzity).