Czechoslovak Mathematical Journal

Alena Bílková

Sur la différentiabilite du repere de Frenet et sur le type différentiel d'une courbe dans l'espace E_n. [Continuation]

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 3, 408–449

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100844

Czechoslovak Mathematical Journal, 18 (93) 1968, Praha

SUR LA DIFFÉRENTIABILITÉ DU REPÈRE DE FRENET ET SUR LE TYPE DIFFÉRENTIEL D'UNE COURBE DANS L'ESPACE E_n

ALENA BÍLKOVÁ, Praha

(Reçu le 28 décembre 1966)

(*Suite**)

5. LA STRUCTURE DU TYPE DIFFÉRENTIEL D'UNE COURBE

Les résultats du paragraphe précédent vont nous permettre d'examiner la structure du type différentiel d'une courbe régulière C (pour la définition voir 1.3). Nous éliminons le cas banal où cl $k_i = \infty$ pour $1 \leqq i \leqq n - 1$.

Théorème 5.1. *Soit* $\mathbf{M}_n$ *une matrice carrée du type* $n \times n$; *nous noterons* a_{ik}, $0 \leqq i \leqq n - 1$, $0 \leqq k \leqq n - 1$, *ses éléments. Pour qu'il existe une courbe régulière* C, *plongée dans* E_n *et telle que* $\mathbf{M}_n$ *soit son type différentiel, il faut que les éléments de la matrice* $\mathbf{M}_n$ *vérifient les conditions suivantes:*[1])

C1: a_{ik} sont entiers, positifs

C2: $|a_{ik} - a_{ik+1}| \leqq 1$, $0 \leqq i \leqq n - 1$, $0 \leqq k \leqq n - 2$

C3: $a_{ii} = \min(a_{ii-1}, a_{ii+1}) + 1$ pour $1 \leqq i \leqq n - 2$, $a_{00} = a_{01} + 1$, $a_{n-1,n-1} = a_{n-1,n-2} + 1$

C4: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{ik} \geqq \min(a_{ij}, a_{jk})$ [2])

C5: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{ik} \geqq \min(a_{ji}, a_{jk})$

Démonstration. La condition C1 est évidente. Comme la i-ème ligne de la matrice $\mathbf{M}_n$ représente la classe différentielle prise par rapport au paramètre σ_i, la condition C2 coïncide avec l'énoncé du corollaire 2.18.

Pour pouvoir établir C3 nous allons énoncer d'abord le

*) La première partie de cet article a été publiée dans ce Journal, *18* (*93*), 1968, 315–355.

[1]) Sauf avis contraire, tous les indices peuvent prendre toutes les valeurs de 0 à $n - 1$.

[2]) Voir la définition 2.20 qui peut facilement s'étendre au cas de la matrice $\mathbf{M}_n$.

Lemme 5.2.

$$a_{ii} \neq \bar{a}_{ii} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq i \leqq n-1 .$$

Démonstration du lemme. En vertu de (1.5) et du théorème 2.3 nous avons

$$a_{ii} = \min_{0 \leqq j \leqq n-1} (\mathrm{cl}\, k_j/k_i + |j-i|) + 1 . \tag{5.1}$$

Le minimum figurant dans (5.1) pourrait être infini seulement dans le cas de cl $k_i = \infty$, $1 \leqq i \leqq n-1$, éliminé d'avance.[3] Il en résulte que le minimum de (5.1) ne peut être atteint pour $i = j$; notre lemme est donc une conséquence du théorème 2.21.

Démonstration de C3. D'après notre lemme 5.2 nous avons $a_{ii} \neq \bar{a}_{ii}$, donc

$$a_{ii} > \min (a_{ii-1}, a_{ii+1}) ,$$

d'où, en vertu de C1 et C2,

$$a_{ii} = \min (a_{ii-1}, a_{ii+1}) + 1 ,$$

c.q.f.d.

En ce qui concerne C4, nous avons d'après le théorème 2.3

$$\mathrm{cl}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}\, k_j/k_i \geqq a_{ij} - 1$$

et, de manière analogue,

$$\mathrm{cl}\, k_j/k_k \geqq a_{jk} - 1 .$$

Donc

$$\mathrm{cl}\, k_i/k_k \geqq \min (\mathrm{cl}\, k_i/k_j, \mathrm{cl}\, k_k/k_j) \geqq \min (a_{ij}, a_{jk}) - 1 .$$

De l'autre côté, en vertu du théorème 2.21, nous avons

$$a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{ik} = \mathrm{cl}\, k_i/k_k + 1 ,$$

donc

$$a_{ik} \geqq \min (a_{ij}, a_{jk}) .$$

Pour établir C5, on procède comme dans le cas de C4.

A partir des conditions C1 – C5 on peut en déduire d'autres:[4][5]

C4': $a_{ik} \geqq \min (a_{ij}, a_{jk})$.

---

[3] En effet, pour cl $k_i < \infty$ on a cl $(k_0/k_i) =$ cl $(1/k_i) < \infty$ et pour cl $k_i = \infty$, cl $k_j < \infty$ on a cl $(k_j/k_i) < \infty$.

[4] S'il s'agit dans la suite de l'élément $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$, nous supposerons dans les démonstrations $0 \neq k \neq n-1$. On verra d'ailleurs que cela ne restreint pas la généralité.

[5] Une liste de toute les conditions est donnée à la fin de notre article.

Démonstration. Soit

$$a_{ik} < \min(a_{ij}, a_{jk}) \,. \tag{5.2}$$

Soit $a_{iu} = \bar{a}_{iu}$ la valeur propre associée à la valeur a_{ik}, c'est-à-dire

$$a_{iu} = a_{ik} - |k - u| \,.$$[6]

D'après C2, on a

$$a_{ju} \geqq a_{jk} - |k - u|$$

et d'après (5.2)

$$a_{jk} > a_{ik} \Rightarrow a_{ju} > a_{iu} \,.$$

De plus, toujours en vertu de (5.2)

$$a_{ij} > a_{ik} \geqq a_{iu} \,.$$

Or, $a_{ij} > a_{iu}$, $a_{ju} > a_{iu}$, $a_{iu} = \bar{a}_{iu}$, est en contradiction avec C4.

C5′: $a_{ik} \geqq \min(a_{ji}, a_{jk})$.

La démonstration est tout à fait analogue à celle de C4′, avec la seule différence que le résultat est en contradiction avec C5.

Remarque 5.3. Les conditions C4′ et C5′ généralisent les conditions C4 et C5 en ce sens que la supposition $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$ de C4 et C5 se montre superflue. Tout de même, il est utile de formuler les conditions C4 et C5 sous leur forme originale, car nous venons de voir que les conditions C4′, C5′ plus générales peuvent se déduire des conditions C4, C5 plus spéciales; si nous voulions donc, en examinant une matrice du type $n \times n$, vérifier si les conditions en question sont satisfaites, nous pourrions nous limiter à considérer les éléments propres $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$ seulement.

C6: $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{jk} \leqq a_{ik}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe des indices i, j, k, tels que l'on ait $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik}$, $a_{jk} > a_{ik}$. Soit $a_{iu} = \bar{a}_{iu}$ la valeur propre associée à la valeur a_{ik}. Comme à la démonstration de C4′, on montre qu'on a nécessairement

$$a_{ju} > a_{iu} \,.$$

Ensuite, on a évidemment

$$a_{jk} > a_{ik} > a_{iu} \,.$$

En vertu de C5′

$$a_{ku} \geqq \min(a_{jk}, a_{ju}) > a_{iu} \,.$$

---

[6]) Voir la définition 2.26 et le théorème 2.23.

Or,

$$a_{iu} < a_{ik}\,, \quad a_{iu} < a_{ku}\,,$$

ce qui est en contradiction avec C4′.

Remarque 5.4. La condition C6 étant établie, nous pouvons dire que C4′ est contenu d'une part en C4 (pour $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$), d'autre part en C6 (pour $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik}$); elle apparaît donc comme une condition superflue, de même que C5′. Toutefois, du point de vue de la marche des démonstrations, il vaut mieux énoncer d'abord les conditions C4′, C5′ et la condition C6 ensuite.

C7: $a_{kk} \geqq a_{ik}$.

Cela résulte immédiatement de C3 et C6.[7]

C8: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{kk} > a_{ik}$.

Démonstration. On a

$$a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Leftrightarrow a_{ik-1} \geqq a_{ik}\,, \quad a_{ik+1} \geqq a_{ik}\,.$$

Nous allons montrer que l'on a également

$$a_{kk-1} \geqq a_{ik}\,, \tag{5.3}$$

$$a_{kk+1} \geqq a_{ik}\,. \tag{5.4}$$

A partir de (5.3) et (5.4) nous obtenons C8 en vertu de C3. Mais il suffit d'établir la relation (5.3), la démonstration de (5.4) étant tout à fait analogue.

Supposons donc que la relation (5.3) n'ait pas lieu. Alors

$$a_{ik} > a_{kk-1}\,, \quad a_{ik-1} \geqq a_{ik} > a_{kk-1}\,,$$

ou bien encore

$$a_{kk-1} < \min\left(a_{ik}, a_{ik-1}\right)$$

en contradiction avec C5′.

C9: $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{kk} = a_{ik}$.

Cela résulte immédiatement de C7 et C6 où nous posons $j = k$.

Remarque 5.5. Ayant établi les conditions C8 et C9 nous voyons que C7 se décompose en C8 et C9.

C10: $a_{ik} = a_{jk} \Rightarrow$ soit $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$, $a_{jk} = \bar{a}_{jk}$,
soit $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik}$, $a_{jk} \neq \bar{a}_{jk}$.

Démonstration. Soit $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$. D'après C8 on a $a_{ik} < a_{kk}$. Mais alors $a_{jk} = a_{ik} < a_{kk}$; dans le cas où $a_{jk} \neq \bar{a}_{jk}$, nous aurions là une contradiction avec C9.

[7]) C7 peut être considérée comme un cas spécial de C5' si nous posons $i = k$.

Le cas de $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik}$ se discute d'une façon analogue.

C11: $a_{ik} < a_{jk} \Rightarrow a_{ik} = \bar{a}_{ik}$.

Démonstration. En vertu de C9 et C7 il est impossible qu'on ait $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik}$.

C12: $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{jk} \leqq a_{ik}$.

Découle de C9 et C7.

C13: $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$, $a_{jk} \neq \bar{a}_{jk} \Rightarrow a_{ik} < a_{jk}$.

Découle immédiatement de C8 et C9.

C14: $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik}$, $a_{jk} \neq \bar{a}_{jk} \Rightarrow a_{ik} = a_{jk}$.

Démonstration. C14 découle de C9 qu'elle généralise.

C15: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{ki} \leqq a_{ik}$.

Démonstration. D'après C8 on a $a_{kk} > a_{ik}$. La relation $a_{ki} > a_{ik}$ entraînerait $a_{ki} > a_{ik}$, $a_{kk} > a_{ik}$, en contradiction avec C5'.

C16: $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$, $a_{ki} = \bar{a}_{ki} \Rightarrow a_{ik} = a_{ki}$.

Démonstration. C16 est une conséquence immédiate de C15.

C17: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{ik} \geqq \min(a_{ji}, a_{kj})$.

Démonstration. Nous pouvons écrire la condition C17 (nous pourrions faire de même avec C4, C5, C4', C5') sous la forme suivante:

Si $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$, alors pour tout indice j ou bien $a_{ji} \leqq a_{ik}$, ou bien $a_{kj} \leqq a_{ik}$.
La condition C15 entraîne $a_{ki} \leqq a_{ik}$. D'après C4' appliquée à l'élément a_{ki}, on doit avoir pour tout j ou bien $a_{kj} \leqq a_{ki} \leqq a_{ik}$, ou bien $a_{ji} \leqq a_{ki} \leqq a_{ik}$, c.q.f.d.

C18: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{ik} \geqq \min(a_{ij}, a_{kj})$.

Démonstration. Supposons que la condition C18 ne soit pas vérifiée. Il existe alors trois indices i, j, k, tels que

(5.5) $$a_{ij} > a_{ik}\,, \quad a_{kj} > a_{ik}\,, \quad a_{ik-1} \geqq a_{ik}\,, \quad a_{ik+1} \geqq a_{ik}\,.$$

En vertu de C4 et de (5.5) nous avons

(5.6) $$a_{jk} \leqq a_{ik}\,.$$

a) Soit $a_{jk} = \bar{a}_{jk}$. Alors d'après C15 on a $a_{kj} \leqq a_{jk} \leqq a_{ik}$, mais c'est en contradiction avec (5.5).

b) Soit $a_{jk} \neq \bar{a}_{jk}$. Soit alors $a_{jl} = \bar{a}_{jl}$ la valeur propre associée à a_{jk}. Sans restreindre la généralité de nos raisonnement nous pouvons supposer $l < k$. Mais alors nous avons

(5.7) $$a_{jl} = a_{jk} - (k - l)\,.$$

D'après C2 et (5.5) nous en déduisons[8])

$$a_{il} \geqq a_{ik-1} - (k - 1 - l) \geqq a_{ik} - (k - l) + 1 . \tag{5.8}$$

Compte tenu de (5.6), (5.7) et (5.8) nous voyons que $a_{il} > a_{jl}$. Il résulte alors de C5′ que l'on a également

$$a_{ij} \leqq a_{jl} < a_{jk} \leqq a_{ik} .$$

Mais c'est une autre contradiction avec (5.5).

Remarque 5.6. Dans les conditions C17 et C18 l'hypothèse $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$ est essentielle; autrement dit, les conditions C17 et C18 ne se laissent pas généraliser d'une manière analogue aux conditions C4 et C5, comme on peut le faire voir par l'exemple suivant: Si l'on choisit les coefficients k_1, k_2, k_3 de façon à avoir $\mathrm{cl}\, k_1 = \mathrm{cl}\, k_3 = 2$, $\mathrm{cl}\, k_2 = 0$, $\mathrm{cl}\, k_1/k_3 = 2$, $\mathrm{cl}\, k_1/k_2 = \mathrm{cl}\, k_3/k_2 = 0$ (voir le théorème 4.23), le type différentiel de la courbe régulière C correspondante sera d'après notre théorème 2.3 la matrice

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Ici, on a $a_{03} = 2 < \min(a_{00}, a_{30})$. (Cfr. C17 pour $i = 0$, $k = 3$, $j = 0$, ou bien C18 pour les mêmes indices. Mais on a $a_{03} \neq \bar{a}_{03}$.)

C19: $a_{ik} < a_{ij} \Rightarrow a_{jk} = a_{ik}$.

Démonstration. D'après C4′ on a $a_{ik} \geqq \min(a_{ij}, a_{jk})$, mais $a_{ij} > a_{ik}$ par hypothèse, donc $a_{jk} \leqq a_{ik}$. Les relations $a_{jk} < a_{ik} < a_{ij}$ seraient en contradiction avec C5′. Il ne reste donc qu'une seule possibilité: $a_{jk} = a_{ik}$.

C20: $a_{ik} = \bar{a}_{ik}, a_{ik} < a_{ij} \Rightarrow a_{kj} = a_{ik}$.

Démonstration. D'après C18 on a $a_{ik} \geqq \min(a_{ij}, a_{kj})$. Comme $a_{ik} < a_{ij}$ par hypothèse, on a aussi $a_{kj} \leqq a_{ik}$. Les inégalités $a_{kj} < a_{ik} < a_{ij}$ seraient en contradiction avec C5′, il faut donc que l'on ait $a_{kj} = a_{ik}$.

Remarque 5.7. On peut démontrer que l'hypothèse $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$ de C20 est essentielle. Les conditions C19 et C20 peuvent être regardées comme un renforcement de C5′. En effet, en changeant la notation des indices, nous pouvons écrire C5′ sous la forme de

$$a_{jk} \geqq \min(a_{ik}, a_{ij}) , \tag{5.9}$$

[8]) Comme $k > l$, on a $k - 1 - l \geqq 0$.

ou encore

$$a_{kj} \geqq \min(a_{ik}, a_{ij}) . \tag{5.10}$$

Il résulte alors de C19 et C20 ceci:

Si $a_{ik} < a_{ij}$, on a égalité en (5.9), tandis que pour avoir égalité en (5.10), il faut supposer encore $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$. Sans cette hypothèse, la relation (5.10) peut être vérifiée, même si $a_{ik} < a_{ij}$, des deux façons: avec l'égalité ou avec l'inégalité; il en est de même dans le cas de $a_{ik} = a_{ij}$.

On peut renforcer d'une manière analogue aussi les conditions C4′, C17, C18, ce qui nous donne les conditions C21 – C26 suivantes:

C21: $a_{ik} = \bar{a}_{ik}, a_{ik} < a_{kj} \Rightarrow a_{ij} = a_{ik}$.

C22: $a_{ik} < a_{ji} \Rightarrow a_{jk} = a_{ik}$.

C23: $a_{ik} = \bar{a}_{ik}, a_{ji} = \bar{a}_{ji}, a_{ji} < a_{kj} \Rightarrow a_{ik} = a_{ji}$.

C24: $a_{ik} = \bar{a}_{ik}, a_{kj} = \bar{a}_{kj}, a_{kj} < a_{ji} \Rightarrow a_{ik} = a_{kj}$.

C25: $a_{ik} = \bar{a}_{ik}, a_{ij} < a_{kj} \Rightarrow a_{ik} = a_{ij}$.

C26: $a_{ik} = \bar{a}_{ik}, a_{kj} < a_{ij} \Rightarrow a_{ik} = a_{kj}$.

La démonstration sera, dans chaque cas, tout à fait analogue à celle de C19 ou C20.

C27: $|a_{ii} - a_{i+1,i+1}| \leqq 1$ pour $0 \leqq i \leqq n-2$.

D'après C2, nous avons $a_{ii+1} \geqq a_{ii} - 1$, et d'après C7

$$a_{i+1,i+1} \geqq a_{i,i+1} \geqq a_{ii} - 1 . \tag{5.11}$$

D'une façon analogue, on trouve aussi

$$a_{ii} \geqq a_{i+1,i+1} - 1 . \tag{5.12}$$

A combiner (5.11) et (5.12) nous trouvons C27.

$$\text{C28:} \quad \min_{0 \leqq k \leqq n-1} a_{ik} = \min_{0 \leqq m \leqq n-1} a_{jm} , \quad 0 \leqq i \leqq n-1 , \quad 0 \leqq j \leqq n-1 . \tag{5.13}$$

Démonstration. Soit $a_{iu} = \min\limits_{0 \leqq k \leqq n-1} a_{ik}$. Alors évidemment $a_{iu} = \bar{a}_{iu}$. Considérons maintenant l'élément a_{ij}, la valeur j étant celle de (5.13). Deux cas peuvent se présenter:

a) $a_{ij} > a_{iu}$. Alors, en vertu de C19 nous avons $a_{ju} = a_{iu}$, donc

$$\min_{0 \leqq m \leqq n-1} a_{jm} \leqq a_{ju} = a_{iu} = \min_{0 \leqq k \leqq n-1} a_{ik} .$$

b) $a_{ij} = a_{iu}$, donc $a_{ij} = \bar{a}_{ij} = \min\limits_{0 \leqq k \leqq n-1} a_{ik}$. Alors d'après C15 on a $a_{ji} \leqq a_{ij}$. Il en résulte

$$\min_{0 \leqq m \leqq n-1} a_{jm} \leqq a_{ji} \leqq a_{ij} = \min_{0 \leqq k \leqq n-1} a_{ik} .$$

De la même manière on peut démontrer l'inégalité

$$\min_{0 \leqq k \leqq n-1} a_{ik} \leqq \min_{0 \leqq m \leqq n-1} a_{jm} .$$

La condition C28 est ainsi démontrée.

C29: $a_{ik} < a_{jk}, a_{ik} < a_{jm} \Rightarrow a_{im} = a_{ik}$.

Nous allons diviser la démonstration en deux parties. Nous allons montrer qu'on ne peut avoir ni $a_{im} > a_{ik}$ ni $a_{im} < a_{ik}$.

a) Supposons que nous ayons

$$a_{ik} < a_{jk} , \quad a_{ik} < a_{jm} , \quad a_{im} < a_{ik} . \tag{5.14}$$

D'après C19 nous avons $a_{mk} = a_{ik}$, donc compte tenu de (5.14) $a_{mk} < a_{jk}$, $a_{mk} < a_{jm}$. Mais c'est en contradiction avec C5'.

b) Supposons que nous ayons

$$a_{ik} < a_{jk} , \quad a_{ik} < a_{jm} , \quad a_{im} < a_{ik} . \tag{5.15}$$

Dans ce cas-là, on a donc $a_{im} < a_{jm}$, d'où en vertu de C11 $a_{im} = \bar{a}_{im}$. D'après C20 nous avons alors en vertu de (5.15) $a_{mk} = a_{im}$, d'où il résulte, toujours en vertu de (5.15), que l'on a $a_{mk} < a_{jk}$, $a_{mk} < a_{jm}$. Mais c'est de nouveau en contradiction avec C5'.

C30: $a_{ik} < a_{jk}, a_{ik} < a_{im} \Rightarrow a_{jm} = a_{ik}$.

Démonstration. a) Soit $a_{ik} < a_{jk}$, $a_{ik} < a_{im}$, $a_{jm} < a_{ik}$.

Dans ce cas-là, on a $a_{jm} < a_{im}$, et, en vertu de C11, $a_{jm} = \bar{a}_{jm}$. Comme $a_{jm} = \bar{a}_{jm}$, $a_{jm} < a_{ik} < a_{jk}$, nous avons d'après C20 $a_{mk} = a_{jm} < a_{ik} < a_{im}$. Or, $a_{mk} < a_{ik}$, $a_{mk} < a_{im}$ est en contradiction avec C5'.

b) Soit

$$a_{ik} < a_{jk} , \quad a_{ik} < a_{im} , \quad a_{jm} > a_{ik} . \tag{5.16}$$

Comme $a_{ik} < a_{im}$, nous avons en vertu de C20[9])

$$a_{km} = a_{ik} . \tag{5.17}$$

Mais, d'après C5' $a_{km} \geqq \min(a_{jm}, a_{jk})$, donc, en vertu de (5.16), on a

$$a_{km} > a_{ik} . \tag{5.18}$$

Les relations (5.17) et (5.18) sont contradictoires.

$$\text{C31:} \quad a_{ik} \leqq a_{im} \leqq a_{jm} \Rightarrow a_{jk} \geqq a_{ik} . \tag{5.19}$$

---

[9]) D'après (5.16) et C11 on a $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$.

Si une au moins des relations a) $a_{ik} < a_{im}$, b) $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik}$ est vérifiée, on a $a_{jk} = a_{ik}$ en (5.19).

Démonstration. D'après C5′ nous avons

$$a_{mk} \geqq \min(a_{im}, a_{ik}) = a_{ik}\,.$$

D'après C4′

$$a_{jk} \geqq \min(a_{jm}, a_{mk}) \geqq a_{ik}\,.$$

La relation (5.19) est ainsi démontrée dans le cas général.

Ad a) Soit

$$a_{ik} < a_{im} \leqq a_{jm}\,, \quad a_{jk} > a_{ik}\,.$$

Comme $a_{jk} > a_{ik}$, $a_{im} > a_{ik}$, nous avons dans ce cas d'après C30 $a_{jm} = a_{ik} < a_{im}$, en contradiction avec l'hypothèse $a_{im} \leqq a_{jm}$.

Ad b) Le cas où $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik}$, $a_{jk} > a_{ik}$ serait en contradiction avec C6.

C32: $a_{ik} = a_{jk} < a_{jm} \Rightarrow a_{im} \geqq a_{ik}$.

Démonstration. Supposons que nous ayons

$$a_{ik} = a_{jk} < a_{jm}\,, \quad a_{ik} > a_{im}\,,$$

et écrivons nos hypothèses dans un autre ordre:

$$a_{ik} = a_{jk}\,, \quad a_{ik} < a_{jm}\,, \quad a_{im} < a_{ik}\,.$$

Nous voyons que nos hypothèses conduisent à une contradiction tout comme dans la partie b) de la démonstration de C29 où la relation $a_{ik} < a_{jk}$ n'est pas essentielle et peut être remplacée par une autre, plus faible: $a_{ik} \leqq a_{jk}$.

C33: $a_{ik} < a_{jm} \leqq a_{im} \Rightarrow a_{jk} = a_{ik}$.

Démonstration. Comme $a_{ik} < a_{im}$, on a $a_{mk} = a_{ik}$ en vertu de C19. Donc $a_{mk} < a_{jm}$ et d'après C22 $a_{jk} = a_{mk} = a_{ik}$, c.q.f.d.

$$\text{C34:} \quad a_{ik} = a_{jm} < a_{jk} \Rightarrow a_{im} \geqq a_{jm}\,. \tag{5.20}$$

Si $a_{jm} \neq \bar{a}_{jm}$, on a $a_{im} = a_{jm}$ dans (5.20).

Démonstration. Comme $a_{jm} < a_{jk}$, nous avons en vertu de C19 $a_{km} = a_{jm} = a_{ik}$. D'après C4′, il en résulte $a_{im} \geqq \min(a_{ik}, a_{km}) = a_{jm}$. Le cas où $a_{im} > a_{jm}$, $a_{jm} \neq \bar{a}_{jm}$ est en contradiction avec C6.

Revenons maintenant à nos conditions C1 – C5. Nous avons le

Théorème 5.8. *Les conditions* C1 – C5 *sont indépendantes l'une de l'autre; cela veut dire qu'il est possible de trouver une matrice carrée qui n'est, bien entendu, le type différentiel d'aucune courbe régulière et qui vérifie quatre quelconques de ces conditions sans en vérifier la cinquième.*

Démonstration.

1) La matrice

$$\begin{Vmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 2{,}5 \end{Vmatrix}$$

vérifie les conditions C2 – C5 sans vérifier C1.

2) La matrice

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

vérifie les conditions C1, C3, C4, C5, mais ne vérifie pas C3.

3) La matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

vérifie C1, C2, C4, C5, mais ne vérifie pas C3.

4) La matrice

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

vérifie les conditions C1, C2, C3, C5, mais ne vérifie pas C4 parce que $a_{05} = 3$, $a_{53} = 3$, $a_{03} = \bar{a}_{03}$, mais $a_{03} = 2 < \min(a_{05}, a_{53})$.

5) La matrice

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

vérifie les conditions C1 – C4 sans vérifier C5, parce que $a_{04} = 4$, $a_{05} = 4$, $a_{45} = \bar{a}_{45}$ mais $a_{45} = 3 < \min(a_{04}, a_{05})$.

Théorème 5.9.

Les systèmes

S1: C1 – C5

S2: C1, C3 – C6[10])

S3: C1, C3 – C5, C7

S4: C1, C3 – C5, C9

sont des systèmes équivalents de conditions indépendantes.

Démonstration. a) Il est clair que le système S2 s'ensuit du système S1, car nous avons déduit toutes les conditions C4′ – C34 à partir des conditions C1 – C5.

b) Comme C7 découle de C3 et C6, le système S3 s'ensuit du système S2.

c) Nous allons montrer que les conditions C1, C3, C4, C7 entraînent C2. En effet, supposons qu'une matrice $\boldsymbol{M}_n$ donnée vérifie C1, C3, C4 et C7 sans vérifier C2. Nous pouvons donc trouver une suite

$$a_{ip}, a_{ip+1}, \ldots, a_{ip+m}, \quad m \geqq 1,$$

telle que nous ayons

1) soit $a_{ip} - a_{ip+1} \geqq 2$, $a_{ip+t} - a_{ip+t+1} \geqq 1$ pour $1 \leqq t \leqq m-1$,

$$a_{ip+m} = \bar{a}_{ip+m}$$

2) soit $a_{ip+m} - a_{ip+m-1} \geqq 2$, $a_{ip+t} - a_{ip+t-1} \geqq 1$, $1 \leqq t \leqq m-1$,

$$a_{ip} = \bar{a}_{ip}.$$

Sans restreindre la généralité de nos raisonnements nous pouvons supposer le cas 1). Comme

$$a_{ip+t} > a_{ip+m} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq m-1, \quad a_{ip+m} = \bar{a}_{ip+m},$$

nous avons d'après C4

$$a_{p+tp+m} \leqq a_{ip+m}, \quad 0 \leqq t \leqq m-1.$$

En particulier pour $t = m-1$ nous avons

$$a_{p+m-1p+m} \leqq a_{ip+m}$$

et d'après C3

$$a_{p+m-1p+m-1} \leqq a_{p+m-1p+m} + 1 \leqq a_{ip+m} + 1.$$

[10]) C3—C6 signifie: C3, C4, C5, C6; les conditions C4′ et C5′ ne font donc pas partie du système S 2 (ni d'aucun autre système considéré ici).

D'après C7

$$a_{p+m-2p+m-1} \leqq a_{p+m-1p+m-1} \leqq a_{ip+m} + 1 .$$

En tenant compte, une fois de plus, de C3, nous obtenons l'inégalité

$$a_{p+m-2p+m-2} \leqq a_{p+m-2p+m-1} + 1 \leqq a_{ip+m} + 2 .$$

Ainsi, après un nombre de pas fini nous arrivons à la relation

$$a_{pp} \leqq a_{ip+m} + m ,$$

d'où en vertu de C7

$$a_{ip} \leqq a_{pp} \leqq a_{ip+m} + m .$$

Or, par hypothèse

$$a_{ip} - a_{ip+m} \geqq m + 1 ,$$

ce qui est une contradiction.[11])

Nous venons de démontrer, dans a), b) et c), l'équivalence des systèmes S1, S2, S3. Nous allons montrer encore l'équivalence de S4.

d) Il est clair que S4 s'ensuit de S1.

b) Nous allons faire voir que S3 s'ensuit de S4. Supposons, au contraire, que les conditions C1, C3 – C5, C9 soient vérifiées, mais que C7 ne le soit pas. Il existe alors des indices i, k, tels que

$$a_{ik} = \bar{a}_{ik} , \quad a_{ik} > a_{kk} . \tag{5.21}$$

D'après C3 nous avons ou bien $a_{kk} > a_{kk-1}$, ou bien $a_{kk} > a_{kk+1}$. Sans restreindre la généralité, supposons donc

$$a_{kk} > a_{kk-1} . \tag{5.22}$$

Comme $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$, nous avons

$$a_{ik} \leqq a_{ik-1} . \tag{5.23}$$

En combinant (5.21), (5.22) et (5.23) nous trouvons

$$a_{ik-1} > a_{kk-1} , \quad a_{ik} > a_{kk-1} . \tag{5.24}$$

Nous avons donc

$$a_{kk-1} < \min (a_{ik}, a_{ik-1}) ,$$

---

[11]) La partie c) de la démonstration du théorème 5.9 pourrait bien être simplifiée si nous pouvions y remplacer la condition C4 par C4′. Cependant, nous ne devons pas faire cela, car C 4′ a été démontrée à l'aide de C2.

d'où en vertu de C5,

$$a_{kk-1} \neq \bar{a}_{kk-1} . \tag{5.25}$$

Or, d'après C9, on a $a_{kk-1} = a_{k-1k-1}$. En vertu de (5.24), il en résulte $a_{ik-1} > > a_{k-1k-1}$, donc, d'après C9

$$a_{ik-1} = \bar{a}_{ik-1} . \tag{5.26}$$

Nous avons donc – cfr. (5.26), (5.23), (5.24), (5.22), (5.25) –

$$\begin{gathered} a_{ik-1} = \bar{a}_{ik-1} , \quad a_{ik-1} \geqq a_{ik} , \quad a_{ik} > a_{kk-1} , \\ a_{kk} > a_{kk-1} , \quad a_{kk-1} \neq \bar{a}_{kk-1} . \end{gathered} \tag{5.27}$$

Supposons que pour un certain $m < k$ on ait

$$a_{im} = \bar{a}_{im} , \quad a_{im} \geqq a_{ik} , \quad a_{ik} > a_{km} , \quad a_{km+1} > a_{km} , \quad a_{km} \neq \bar{a}_{km} . \tag{5.28}$$

Comme $a_{im} = \bar{a}_{im}$, on a $a_{im} \leqq a_{im-1}$, donc, en vertu de (5.28)

$$a_{im-1} \geqq a_{ik} . \tag{5.29}$$

Il résulte ensuite des relations $a_{km+1} > a_{km}$, $a_{km} \neq \bar{a}_{km}$, que l'on a

$$a_{km} > a_{km-1} , \tag{5.30}$$

et puisque $a_{ik} > a_{km}$, on a également

$$a_{im-1} \geqq a_{ik} > a_{km-1} , \tag{5.31}$$

autrement dit

$$a_{km-1} < \min(a_{ik}, a_{im-1}) ,$$

et d'après C5

$$a_{km-1} \neq \bar{a}_{km-1} . \tag{5.32}$$

D'après C9, il en résulte $a_{km-1} = a_{m-1m-1}$ et comme – cfr. (5.31) –

$$a_{im-1} > a_{km-1} = a_{m-1m-1} ,$$

nous avons, en vertu de C9,

$$a_{im-1} = \bar{a}_{im-1} . \tag{5.33}$$

Les relations (5.33), (5.29), (5.31), (5.30) et (5.32) montrent ensuite que si le système de relations (5.28) est vérifié pour une certaine valeur $m < k$, il l'est aussi pour la valeur $m - 1$. Mais il résulte de (5.27) que le système en question est vérifié pour $m = k - 1$. Les relations (5.28) sont donc vérifiées pour n'importe quel $m < k$, et, en particulier,

$$a_{km+1} > a_{km} , \quad a_{km} \neq \bar{a}_{km} , \quad 0 \leqq m < k .$$

Mais, c'est une contradiction, car il est impossible que l'on ait en même temps $a_{k1} > a_{k0}$ et $a_{k0} \neq \bar{a}_{k0}$.

f) Il nous reste à démontrer encore l'indépendance des conditions dans les systèmes S1 – S4. Cela a déjà été fait pour S1 dans le théorème 5.8. En même temps, les exemples du théorème 5.8 montrent que les conditions des systèmes S2, S3 et S4 sont indépendantes l'une de l'autre. Les matrices des exemples 1), 3), 4), 5) vérifient, en effet, même les conditions C6, C7, C9, tandis que la matrice de l'exemple 2) qui vérifie C1, C3 – C5, ne vérifie aucune des conditions C6, C7, C9.

Le théorème 5.9 montre que, dans le système S1 des conditions fondamentales, nous pouvons remplacer la condition C2 par une quelconque des conditions C6, C7, C9. En même temps, les exemples 1), 3) – 5) du théorème 5.8 montrent, qu'aucune autre des conditions C1 – C5 ne pourrait être remplacée par les conditions C6, C7, C9.

Remarque 5.10. Dans notre remarque 5.5 nous avons signalé que la condition C7 peut se diviser en C8 et C9, plus strictes. Or, tandis que nous pouvons prendre C1, C3 – C5, C9 pour un système fondamental de conditions, il n'en est pas de même des conditions C1, C3 – C5, C8. La matrice de l'exemple 2) du théorème 5.8 vérifie toutes les conditions C1, C3 – C5, C8, mais il ne s'agit pas de type différentiel, car p. ex. la condition C2 n'est pas vérifiée.

Résumons maintenant nos résultats. Nous avons établi toute une série de conditions nécessaires pour qu'une matrice carrée $\mathbf{M}_n$ soit le type différentiel d'une courbe régulière C plongée dans l'espace E_n. Dans la suite, nous montrerons que les conditions données sont aussi suffisantes. Dans notre théorème 5.9, nous avons montré que toutes les conditions établies peuvent se déduire d'un quelconque des systèmes S1 – S4. Nous ne nous occuperons pas ici de la question de savoir s'il est possible de trouver encore d'autres systèmes de conditions fondamentales, ou s'il est possible d'en déduire encore d'autres conditions; ces questions dépasseraient les limites que nous nous sommes posées dans le présent travail. Nous n'avons pas discuté non plus la question de savoir si les hypothèses de toutes nos conditions sont exemptes de contradictions, mais si nous regardons les 41 types différentiels dans l'espace E_4 donnés dans [1], nous voyons que toutes les hypothèses citées peuvent se réaliser effectivement. En somme, nous pouvons dire que toutes les conditions pour les types différentiels découlent des deux faits que voici:

1) Toute ligne prise seule représente une classe différentielle, donc la différence de deux élements voisins ne peut dépasser 1 en valeur absolue, et l'on a la relation

$$a_{ik} = \min_{0 \leq j \leq n-1} (\mathrm{cl}\, k_j/k_i + |j - k|) + 1 .$$

2) Les valeurs de cl k_i/k_j sont liées par les théorèmes 4.7 et 4.23.

Les conditions C1 – C34 peuvent être classifiées de la façon suivante: C4, C5, C4′, C5′, C17 – C26 concernent les relations qui existent entre trois éléments aux indices

$i, j; j, k; i, k$ (qui peuvent d'ailleurs être ordonnés autrement), les conditions C29 – C34 concernent les relations existant entre quatre éléments aux indices $i, k; j, k; i, m; j, m$; les autres conditions (C1 – C3, C6 – C16, C27, C28) ont plus ou moins une position particulière.

Quant au système fondamental S1, nous pouvons dire ceci: Les conditions C1 et C2 s'appliquent déjà à la classe différentielle (quoique nous n'ayons pas donné C1 explicitement en cette connexion; à présent, nous le faisons pour ne rien omettre, surtout en ce qui concerne l'indépendance des conditions), C3 se rapporte au fait que les coordonnées d'un espace linéaire T_i[12]) ont, en tant que fonctions du paramètre σ_i la classe différentielle maximale[13]) (a_{ii} est toujours une valeur diminuée, influencée par un coefficient k_j/k_i où $j \neq i$), C4 et C5 sont liées au théorème 4.7, cité déjà ci-dessus.

Pour établir les conditions en question, nous avons procédé de telle manière que seules les conditions C1 – C5 ont été déduites immédiatement du postulat que la matrice $\boldsymbol{M}_n$ doit être le type différentiel d'une courbe régulière C; les autres conditions sont des conséquences des conditions fondamentales C1 – C5. Nous avons choisi ce procédé pour rendre plus clair le fait que seules les conditions C1 – C5 (par exemple) sont fondamentales et que les autres s'en ensuivent; bien que les démonstrations soient ainsi devenues parfois un peu plus difficiles qu'elles n'auraient été si nous avions directement mis en valeur le fait que la matrice $\boldsymbol{M}_n$ doit représenter le type différentiel d'une courbe régulière C. Ainsi p. ex. pour démontrer C17 et C18 on pourrait procéder d'une manière directe, tout à fait analogue à celle des démonstrations de C4 et C5. Par contre, pour d'autres conditions, une telle façon de procéder conduirait à des démonstrations plus longues et peu commodes; c'est pourquoi nous n'y insisterons pas.

Théorème 5.11. *Si la matrice $\boldsymbol{M}_n$ vérifie les conditions* C1 – C5, *on peut toujours trouver un système de coefficients $k_0 = 1, k_1, \ldots, k_{n-1}$ tel que toute courbe régulière C qui y correspond ait $\boldsymbol{M}_n$ pour son type différentiel.*

Démonstration. Supposons que la matrice $\boldsymbol{M}_n$ vérifie les conditions C1 – C5 donc aussi les conditions C4′ – C34. Nous choisissons le système de coefficients $k_0 = 1, k_1, \ldots, k_{n-1}$ de façon à avoir, pour $i \neq j$,

$$\text{(5.34)} \qquad \operatorname{cl} k_i/k_j = \max_{m \in \mathbf{A}_i} a_{jm} - 1\,, \quad m \in \mathbf{A}_i \Leftrightarrow a_{im} \neq \bar{a}_{im}\,.$$

Nous allons montrer d'abord que les relations (5.34) sont sans contradiction.

a) $\mathbf{A}_i \neq \emptyset$, car $i \in \mathbf{A}_i$ d'après C3.

b) $\operatorname{cl} k_i/k_j = \operatorname{cl} k_j/k_i$ pour les raisons que voici.

---

[12]) $T_i = E_{1\ldots i}$ pour $i \neq 0$, $T_0 = X$.

[13]) En comparaison avec les classes différentielles prises par rapport à d'autres paramètres admissibles.

Il existe des indices m, m', tels que

$$\text{cl}\, k_i/k_j = a_{jm} - 1\,, \quad a_{im} \neq \bar{a}_{im}$$
$$\text{cl}\, k_j/k_i = a_{im'} - 1\,, \quad a_{jm'} \neq \bar{a}_{jm'}\,.$$

Supposons $a_{im'} < a_{jm}$.

b$_1$) Soit $a_{im'} \neq \bar{a}_{im'}$. Alors, d'après C14, nous avons $a_{im'} = a_{jm'} < a_{jm}$ et d'après C12 $a_{jm} \leqq a_{im}$. Donc

(5.35) $$a_{im'} < a_{im}\,.$$

Introduisons l'ensemble $\mathbf{B}_j$ défini par la relation

$$a_{jr} \in \mathbf{B}_j \Leftrightarrow a_{jr} = a_{jm}\,.$$

On a donc $\mathbf{B}_j \neq \emptyset$. Soit $a_{jp} \in \mathbf{B}_j$ un tel élément que

$$|p - m'| \leqq |r - m'|$$

pour tout r tel que $a_{jr} \in \mathbf{B}_j$. Comme

(5.36) $$a_{jm'} < a_{jm} = a_{jp}\,,$$

il s'ensuit aisément de C2 que $a_{jp} \neq \bar{a}_{jp}$.[14]) On a donc $a_{im'} = a_{jm'} < a_{jp}$ et, d'après C32,

(5.37) $$a_{ip} \geqq a_{im'}\,.$$

Or

$$a_{jp} \neq \bar{a}_{jp} \Rightarrow p \in \mathbf{A}_j\,,$$

donc

(5.38) $$a_{ip} \leqq \max_{u \in \mathbf{A}_j} a_{iu} = a_{im'}\,.$$

Il résulte de (5.36), (5.37) et (5.38) que

$$a_{ip} = a_{im'} < a_{jp} = a_{jm}\,.$$

Donc

$$a_{ip} < a_{jp}\,, \quad a_{ip} < a_{jm}\,,$$

et, d'après C29

$$a_{im} = a_{ip}\,,$$

ce qui est une contradiction, car $a_{ip} = a_{im'} < a_{im}$ – voir (5.35).

[14]) Sans restreindre la généralité de nos raisonnements nous pouvons supposer $p < m'$. Ensuite, on a $a_{jp} > a_{jm'}$ et, compte tenu de la définition de a_{jp}, on doit avoir $a_{jp} > a_{jp+1} \geqq$ $\geqq a_{jm'}$. Donc, en effet, $a_{jp} \neq \bar{a}_{jp}$.

b$_2$) Soit $a_{im'} = \bar{a}_{im'}$. Alors d'après C13 on a

$$a_{im'} < a_{jm'} . \tag{5.39}$$

En vertu de C12 on a alors, comme auparavant, $a_{jm} \leqq a_{im}$.

1) Soit $a_{im'} < a_{jm}$, $a_{jm} < a_{im}$. Alors d'après C33 $a_{jm'} = a_{im'}$, ce qui est en contradiction avec (5.39). On a donc

$$2) \quad a_{im'} < a_{jm} = a_{im} \tag{5.40}$$

et d'après C10 $a_{jm} \neq \bar{a}_{jm}$. On a donc $m \in \mathbf{A}_j$, d'où $a_{im} \leqq \max_{u \in \mathbf{A}_j} a_{iu} = a_{im'}$, ce qui est en contradiction avec (5.40).

L'hypothèse $a_{im'} < a_{jm}$, fait au début du point b) conduit donc toujours à une contradiction. Il en est de même de l'hypothèse $a_{im'} > a_{jm}$.

c) La valeur de cl k_i/k_j introduite par (5.34), vérifie la condition

$$\text{cl } k_i/k_j \geqq \min(\text{cl } k_i/k_u, \text{ cl } k_j/k_u) ; \tag{5.41}$$

elle est donc en accord avec le théorème 4.7, ou avec 4.11.

Si $i = j$, la validité de la relation en question est évidente.

Pour démontrer (5.41) pour $i \neq j$, nous pouvons – compte tenu du fait que nous avons déjà démontré que cl $k_i/k_j =$ cl k_j/k_i – supposer, sans restreindre la généralité, que

$$\text{cl } k_i/k_u \leqq \text{cl } k_j/k_u . \tag{5.42}$$

Il existe alors des indices m, m' tels que

$$\begin{aligned} \text{cl } k_i/k_u &= a_{um} - 1 , \quad a_{im} \neq \bar{a}_{im} \\ \text{cl } k_j/k_u &= a_{um'} - 1 , \quad a_{jm'} \neq \bar{a}_{jm'} . \end{aligned} \tag{5.43}$$

En vertu de (5.42) et C12 nous avons $a_{um} \leqq a_{um'} \leqq a_{jm'}$ et d'après C31 $a_{jm} \geqq a_{um}$. Ensuite

$$\text{cl } k_i/k_j = \max_{p \in \mathbf{A}_i} a_{jp} - 1 .$$

D'après (5.43) $m \in \mathbf{A}_i$, donc

$$a_{um} \leqq a_{jm} \leqq \max_{p \in \mathbf{A}_i} a_{jp} \Rightarrow \text{cl } k_i/k_u \leqq \text{cl } k_i/k_j$$

c.q.f.d.

La relation (5.34) engendre donc une partition finie complète de l'ensemble $\mathscr{I} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et en vertu du théorème 4.23 il est possible de trouver un système de coefficients k_i, $1 \leqq i \leqq n-1$, qui soit en accord avec la partition complète donnée de l'ensemble $\mathscr{I}$. Il nous reste à montrer que toute courbe régulière C correspondant au système de coefficients donné a la matrice $\boldsymbol{M}_n$ pour son type différentiel, ou autrement dit, que la ligne i de la matrice $\mathbf{M}_n$, $0 \leqq i \leqq n - 1$, est la classe différentielle correspondant au paramètre σ_i. D'après les théorèmes 2.17 et 2.31 et la relation (2.18), il suffit de montrer que l'on a

$$(5.44) \qquad \text{d)} \quad a_{ij} \leqq \operatorname{cl} k_i/k_j + 1$$

$$(5.45) \qquad \text{e)} \quad a_{ij} = \bar{a}_{ij} \Rightarrow a_{ij} = \operatorname{cl} k_i/k_j + 1 \,.$$

Ad d). On a

$$\operatorname{cl} k_i/k_j = \operatorname{cl} k_j/k_i = \max_{m \in \mathbf{A}_j} a_{im} - 1 \,.$$

Evidemment $j \in \mathbf{A}_j$, car $a_{jj} \neq \bar{a}_{jj}$ d'après C3. Donc

$$a_{ij} \leqq \max_{m \in \mathbf{A}_j} a_{im} = \operatorname{cl} k_i/k_j + 1 \,.$$

Ad e). Il existe un m tel que

$$\operatorname{cl} k_i/k_j = a_{jm} - 1 \,, \quad a_{im} \neq \bar{a}_{im} \,.$$

D'après C12 $a_{jm} \leqq a_{im}$. D'après C18

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} \Rightarrow a_{ij} \geqq \min(a_{im}, a_{jm}) = a_{jm} \,.$$

Donc

$$a_{ij} \geqq a_{jm} = \operatorname{cl} k_i/k_j + 1$$

et en vertu de la relation (5.44) que nous avons déjà établie, la relation (5.44) est vraie également.

La démonstration du théorème 5.11 est ainsi achevée.

Théorème 5.12. *Les valeurs* $\operatorname{cl} k_i/k_j$ *introduites par la relation* (5.34) *sont les valeurs minima telles que la courbe régulière C correspondant au système des coefficients* $k_0 = 1, k_1, \ldots, k_{n-1}$ *ait la matrice* $\mathbf{M}_n$ *pour son type différentiel.*[15])

Démonstration. En accord avec le théorème 2.3 on doit avoir

$$a_{jm} \leqq \operatorname{cl} k_j/k_m + 1 \,, \quad a_{im} \leqq \operatorname{cl} k_i/k_m + 1 \,,$$

pour tout $m \in \mathbf{A}_i$ (et pour tout système $k_0 = 1, k_1, \ldots, k_{n-1}$ qui conduit au type différentiel donné). D'après C12, on a alors $a_{jm} \leqq a_{im}$, car $a_{im} \neq \bar{a}_{im}$. De plus, on doit avoir

$$\operatorname{cl} k_i/k_j \geqq \min(\operatorname{cl} k_i/k_m\,, \operatorname{cl} k_j/k_m) \geqq \min(a_{im} - 1, a_{jm} - 1) = a_{jm} - 1 \,.$$

La valeur de $\operatorname{cl} k_i/k_j$ vérifiant (5.34) est donc la plus petite possible, c.q.f.d.

[15]) Cela veut dire que pour n'importe quel autre système de coefficients $k'_0, k'_1, \ldots, k'_{n-1}$ correspondant au même type différentiel on a $\operatorname{cl} k'_i/k'_j \geqq \operatorname{cl} k_i/k_j$ pour toute paire d'indices i, j.

Remarque 5.13. Nous obtenons les autres systèmes $k_0 = 1, k_1, \ldots, k_{n-1}$ conduisant à la même matrice $\mathbf{M}_n$ en élevant la valeur de cl k_i/k_j pour certaines paires d'indices i, j, telles que $i \neq j$, $a_{ij} \neq \bar{a}_{ij}$, $a_{ji} \neq \bar{a}_{ji}$; il faut cependant choisir ces paires en accord avec le théorème 4.11. Cela signifie qu'il est parfois impossible d'élever cl k_i/k_j, même si $a_{ij} \neq \bar{a}_{ij}$, $a_{ji} \neq \bar{a}_{ji}$, car il faudrait alors élever aussi cl k_0/k_i, ou cl k_0/k_j, bien que p. ex. $a_{0i} = \bar{a}_{0i}$ ou $a_{i0} = \bar{a}_{i0}$, ou encore $a_{0j} = \bar{a}_{0j}$ ou $a_{j0} = \bar{a}_{j0}$, etc.

Remarque 5.14. Au cours de la démonstration de C1 – C34, nous n'avons nulle part exploité le fait que les valeurs de cl k_i/k_j, $i \neq j$, sont finies. Si nous éliminons le cas banal de cl $k_i = \infty$ pour $1 \leqq i \leqq n - 1$ et si nous posons $r = \min\limits_{1 \leqq i \leqq n-1} \text{cl}\, k_i$, nous aurons évidemment, dans la matrice $\mathbf{M}_n$ qui est le type différentiel d'une courbe régulière C correspondant au système donné, $\min\limits_{0 \leqq m \leqq n-1} a_{jm} = r + 1$, pour tout j, $0 \leqq j \leqq n - 1$; en raison de C2 la valeur maximum d'un élément quelconque a_{pq} de la matrice $\mathbf{M}_n$ est $r + n$. En tenant compte du théorème 5.11 et de sa démonstration, nous pouvons trouver un système de coefficients $k'_0 = 1, k'_1, \ldots, k'_{n-1}$ tel que toutes les valeurs de cl k'_i/k'_j, $i \neq j$, soient finies (au plus égales à $r + n - 1$), le système en question conduisant à la même matrice que le système $k_0 = 1, k_1, \ldots, k_{n-1}$, considéré au début. Nous pouvons donc nous limiter à des partitions finies complètes de l'ensemble $\mathscr{I}$, comme nous l'avons d'ailleurs déjà fait à l'occasion de notre théorème 4.23.

6. L'ÉTABLISSEMENT DU NOMBRE DE CLASSES DE TYPES DIFFÉRENTIELS DANS L'ESPACE E_n[16])

Dans ce paragraphe, nous voulons donner quelques formules de récurrence pour le nombre de toutes les classes possibles des types différentiels dans l'espace E_n. Pour ce but, il nous faudra introduire quelques nouvelles notations, car nous examinerons le nombre de toutes les partitions complètes essentielles (voir la définition 6.6) d'une composante donnée d'ordre α de l'ensemble $\mathscr{I}$.

Définition 6.1. a) Soit $\mathscr{R}$ une partition complète finie de l'ensemble $\mathscr{I}$.[17]) Nous désignerons par

$$\text{cl}_{\mathscr{R}}\, k_i/k_j$$

la valeur de cl k_i/k_j correspondant à la partition $\mathscr{R}$ complète donnée (voir le theorème 4.22).

[16]) Les types différentiels d'une même classe ont la même structure et ne diffèrent que par la valeur de $r = \min\limits_{1 \leqq i \leqq n-1} \text{cl}\, k_i$.

[17]) Voir nos remarques 4.16 et 5.14.

b) Soit $\mathscr{R}$ une partition d'ordre α de l'ensemble $\mathscr{I}$, et supposons que i et j appartiennent à deux $\mathscr{I}^\alpha$ différentes. Nous poserons alors

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_j\,,$$

où $\mathscr{R}_1$ est une partition complète arbitraire qui est prolongement de $\mathscr{R}$ (voir le théorème 4.21).

Définition 6.2. Nous dirons qu'une partition complète $\mathscr{R}$ de l'ensemble $\mathscr{I}$ est essentielle lorsqu'il n'existe pas de partition complète $\mathscr{R}_1$ et deux éléments i, j tels que

1) la partition $\mathscr{R}_1$ conduise au même type différentiel que la partition $\mathscr{R}$

2)
$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_j < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}}\, k_i/k_j\,.$$

Théorème 6.3. *A deux partitions complètes essentielles différentes de l'ensemble $\mathscr{I}$ il correspond* (r étant donné) *deux types différentiels différents.*

La démonstration est presque évidente. Soient $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ les deux partitions données. Comme elles sont différentes, il doit y avoir une paire d'indices i, j telle que

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_i/k_j \neq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j\,.$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_j < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j\,.$$

Or, comme la partition $\mathscr{R}_2$ est essentielle, elle doit conduire à un autre type différentiel que $\mathscr{R}_1$.

Théorème 6.4. *Le nombre de toutes les classes possibles de types différentiels dans l'espace E_n égale le nombre de toutes les partitions complètes essentielles possibles de l'ensemble $\mathscr{I}$ (vérifiant la condition* $\min\limits_{1 \leq i \leq n-1} \mathrm{cl}\, k_i = r$, *où r est un entier non-négatif arbitraire).*

Démonstration. En vertu du théorème 5.12 et de la remarque 5.14, il est évident qu'à chaque type différentiel on peut associer une partition complète finie essentielle de l'ensemble $\mathscr{I}$. Notre théorème 6.4 découle alors immédiatement du théorème 6.3 pourvu que nous démontrions encore que le nombre des partitions complètes essentielles de l'ensemble $\mathscr{I}$ ne dépend pas du choix du paramètre r. Or cela deviendra clair au cours de nos raisonnements suivants.

Définition 6.5. Soit donné une partition $\mathscr{R}$ d'ordre α de l'ensemble $\mathscr{I}$. Nous dirons que la partition $\mathscr{R}$ est essentielle lorsqu'elle peut se prolonger en une partition complète essentielle de l'ensemble $\mathscr{I}$ (voir la définition 4.17).

Définition 6.6. a) Soit $\mathscr{I}^\alpha$ une composante d'ordre α qui fait partie d'une partition essentielle d'ordre α de l'ensemble $\mathcal{I}$. Nous dirons qu'une partition complète de l'ensemble $\mathcal{I}^\alpha$ est essentielle lorsqu'on peut l'étendre en une partition complète essentielle de l'ensemble $\mathcal{I}$ (voir la définition 4.18).

b) Nous dirons qu'une partition d'une composante $\mathcal{I}^\alpha$ en composantes d'ordre $\alpha + 1$ (par rapport à l'ensemble $\mathcal{I}$, cfr. notre convention 4.24) est essentielle lorsqu'on peut l'étendre en une partition essentielle d'ordre $\alpha + 1$ de l'ensemble $\mathcal{I}$.

Convention 6.7. Dans la suite, en parlant d'une composante d'ordre α nous entendrons par cela toujours, à moins que le contraire ne soit explicitement constaté, une composante engendrée par une partition essentielle d'ordre α.

Théorème 6.8. *Une partition $\mathcal{R}$ d'une composante $\mathcal{I}^\alpha$ en composantes d'ordre $\alpha + 1$ est essentielle si et seulement si l'on peut la prolonger en une partition complète essentielle de la composante $\mathcal{I}^\alpha$.* (Voir la définition 4.17).

Démonstration. Supposons que la partition $\mathcal{R}$ de la composante $\mathcal{I}^\alpha$ donnée en composantes d'ordre $\alpha + 1$ soit essentielle au sens de la définition 6.6 b). Il est donc possible de l'étendre en une telle partition $\mathcal{R}_1$ d'ordre $\alpha + 1$ de l'ensemble $\mathcal{I}$ qu'il soit possible de prolonger en une partition complète essentielle de l'ensemble $\mathcal{I}$. Soit $\mathcal{R}_2$ cette partition et soit $\mathcal{R}_3$ la partition complète de la composante $\mathcal{I}^\alpha$ impliquée par la partition $\mathcal{R}_2$ (voir la définition 4.20a)). Alors, en vertu des définitions 4.17 et 6.6a) la partition $\mathcal{R}_3$ est un prolongement de la partition $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_3$ est une partition complète essentielle de la composante $\mathcal{I}^\alpha$.

Supposons par contre qu'il existe une partition $\mathcal{R}_3$, prolongement de $\mathcal{R}$, et qui soit en même temps une partition complète essentielle de la composante $\mathcal{I}^\alpha$. Alors, d'après la définition 6.6a), il est possible de prolonger $\mathcal{R}_3$ en une partition complète essentielle $\mathcal{R}_2$ de l'ensemble $\mathcal{I}$. Alors, évidemment, $\mathcal{R}_1$ est une partition essentielle et qui est en même temps un prolongement de $\mathcal{R}$, donc, d'après la définition 6.6b) la partition $\mathcal{R}$ est essentielle.

Définition 6.9. Supposons qu'une partition essentielle $\mathcal{R}$ d'ordre α de l'ensemble $\mathcal{I}$ engendre la composante $\mathcal{I}^\alpha = \{i_0, i_1, \ldots, i_p\}$, où $0 \leqq p \leqq n - 2$, $0 \leqq i_m \leqq n - 1$, $0 \leqq m \leqq p$. Nous dénoterons le nombre de toutes les partitions complètes essentielles de la composante $\mathcal{I}^\alpha$ par le symbole que nous obtenons à partir du symbole $C_\alpha(i_0 i_1 \ldots i_p)$

a) en y remplaçant i_j par u dans le cas où il est possible de trouver un indice i_s tel que

$$\text{cl}_{\mathcal{R}}\, k_{i_j}/k_{i_s} + |i_s - i_j| \leqq r + \alpha \qquad (6.1)$$ [18])

b) en remplaçant i_j par $\bar{u}$ dans le cas où il n'est pas possible de trouver un indice i_s vérifiant (6.1);

[18]) La valeur $s = j$ ne vérifie évidemment pas la relation donnée. Il faut donc que l'on ait $\text{cl}_{\mathcal{R}}\, k_{i_j}/k_{i_s} < r + \alpha$. S'il existe donc un élément jouissant de la propriété en question, alors évidemment $i_s \notin \mathcal{I}^\alpha$. (Il résulte de cela que la notation $\text{cl}_{\mathcal{R}}\, k_{i_j}/k_{i_s}$ a un sens — voir la définition 6.1 b)).

c) en omettant l'indice α.[19])

Nous parlerons en cette connexion d'un produit formel $i_0 i_1 \dots i_p$, en appelant les indices i_m, $0 \leqq m \leqq p$, facteurs du produit formel. D'une manière analogue, nous parlerons d'un produit formel des valeurs u et $\bar{u}$ (en respectant l'ordre dans lequel ces valeurs $u, \bar{u}$ suivent l'une l'autre). Si nous voulons souligner le fait qu'il s'agit d'un produit formel des valeurs u et $\bar{u}$, nous parlerons d'un u-produit formel.

A la lumière du texte qui va suivre on verra que le nombre de toutes les partitions complètes essentielles de la composante donnée à $p + 1$ éléments ne dépend effectivement que du nombre et de l'ordre des valeurs u et $\bar{u}$ (voir la définition 6.10).

Définition 6.10. a) Si le symbole i_j est remplacé, au sens de la définition 6.9, par la lettre u, nous parlerons tout court d'une valeur u, et, dans le cas contraire d'une valeur $\bar{u}$; soit d'une façon plus précise d'une valeur u ou $\bar{u}$ par rapport à la partition d'ordre α considérée.

b) Si nous voulons souligner la connexion avec la composante $\mathscr{I}^\alpha$, nous dénoterons le nombre de toutes les partitions complètes essentielles de la composante $\mathscr{I}^\alpha$par le symbole $\mathbf{C}_{\mathscr{I}^\alpha}$.

Théorème 6.11. *Une partition $\mathscr{R}$ d'ordre α est essentielle si et seulement si la partition $\mathscr{R}_1$ d'ordre $\alpha + 1$ qui est le prolongement de $\mathscr{R}$ tel que toutes ses composantes d'ordre $\alpha + 1$ se composent d'un seul point chacune, est elle-aussi essentielle.*

Démonstration. Supposons qu'il existe au moins une composante d'ordre α qui contienne plus d'un point – autrement le théorème ne dirait rien.

a) La partition $\mathscr{R}_1$ est évidemment complète; si c'est une partition complète essentielle, la partition $\mathscr{R}$ sera également essentielle, en vertu de la définition 6.5.

b) Il nous reste donc à démontrer seulement la seconde partie de notre énoncé qui dit ceci: Si la partition $\mathscr{R}$ est essentielle, la partition $\mathscr{R}_1$ l'est également. Supposons le contraire, c'est-à-dire supposons qu'il existe un prolongement complet essentiel $\mathscr{R}_2$ de la partition $\mathscr{R}$, la partition $\mathscr{R}_1$ n'étant pas essentielle.

---

[19]) Soit p. ex. $n = 8$ et soit $\mathscr{I}^2$ une des composantes d'ordre 2, $\mathscr{I}^2 = \{0, 2, 3, 4, 7\}$. Pour $i \in \mathscr{I}^2$ soit $\mathrm{cl}\, k_i/k_1 = \mathrm{cl}\, k_i/k_5 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, k_i/k_6 = r$. Alors, nous écrivons

$$C_2(0\ 2\ 3\ 4\ 7) = C(uu\bar{u}uu)\,.$$

Soit $\mathscr{I}^3$ la composante d'ordre 3, qui contient les mêmes éléments que $\mathscr{I}^2$. (Voir la note [38]) dans la première partie de cet article, p. 351). Alors

$$C_3(0\ 2\ 3\ 4\ 7) = C(uuuuu)\,.$$

Comme $\mathscr{R}_1$ n'est pas essentielle, il existe une partition complète essentielle $\mathscr{R}_1'$ telle que $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_1'$ nous donnent la même matrice $\mathbf{M}_n$ pour le type différentiel correspondant et que, pour une paire d'indices p, q au moins, on ait

(6.2) $$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_p/k_q < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_p/k_q ,$$

tandis que pour tout i, j, $i \neq j$,

(6.3) $$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_i/k_j \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_i/k_j \leqq r + \alpha .$$ [20])

Ensuite, en vertu de la définition même de $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ on a pour toute paire u, v

(6.4) $$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_u/k_v \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_u/k_v$$

avec

(6.5) $$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_u/k_v < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_u/k_v \Rightarrow \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_u/k_v = r + \alpha , \quad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_u/k_v > r + \alpha .$$ [21])

Ensuite, en vertu de (6.2), (6.3) et (6.4) nous avons

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_u/k_v \geqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_u/k_v ,$$

où l'on a l'inégalité stricte dans un cas au moins.

Définissons maintenant la partition $\mathscr{R}_3$ en posant

(6.6) $$\begin{aligned} \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_i/k_j &= \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_i/k_j \quad \text{pour} \quad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_i/k_j < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_i/k_j \\ \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_i/k_j &= \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j \quad \text{pour} \quad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_i/k_j . \end{aligned}$$

Bien entendu, il nous faut encore justifier cette définition, c'est-à-dire montrer que la relation

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_i/k_j \geqq r + \beta , \quad \beta \geqq 0$$

est une relation d'équivalence.

La réflexivité et la symétrie de cette relation découlent immédiatement des propriétés analogues pour les partitions $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_1'$, $\mathscr{R}_2$. Ensuite, on a évidemment

(6.7) $$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j \geqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_i/k_j \geqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_i/k_j .$$

---

[20]) La première partie de la relation (6.3) découle du fait que la partition $\mathscr{R}_1'$ est essentielle et conduit à la même matrice $\mathbf{M}_n$ que la partition $\mathscr{R}_1$, la deuxième partie découle de ce que toutes les composantes d'ordre $\alpha + 1$ qui font partie de la partition $\mathscr{R}_1$ se composent chacune d'un seul point (cfr nos hypothèses).

[21]) Voir le théorème 4.21, appliqué à la partition $\mathscr{R}$ et à son prolongement $\mathscr{R}_1$, ou $\mathscr{R}_2$.

Pour démontrer la transitivité, c'est-à-dire la relation

$$(6.8) \qquad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j \geqq \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_u,\ \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_j/k_u\right),$$

nous allons considérer plusieurs cas.

$\bar{\mathrm{a}}$) $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_u$, $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_j/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_j/k_u$.
Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j \geqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_j \geqq \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_u,\ \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_j/k_u\right) =\\ = \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_u,\ \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_j/k_u\right).\end{aligned}$$

$\bar{\mathrm{b}}$) $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_u$, $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_j/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_j/k_u > \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_j/k_u$.
Dans ce cas-là, on a d'après la définition (6.6)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_j/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_j/k_u < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_j/k_u$$

et d'après (6.5)

$$(6.9) \qquad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_j/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_j/k_u = r + \alpha\,, \quad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_j/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_j/k_u > r + \alpha\,.$$

D'autre part, d'après (6.3) on a

$$(6.10) \qquad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_u \leqq r + \alpha\,,$$

donc

$$\min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_u,\ \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_j/k_u\right) = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_u \leqq r + \alpha$$

et, compte tenu de (6.9) et (6.10)

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j \geqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_j \geqq \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_u,\ \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_j/k_u\right) =\\ = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_u = \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_u,\ \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_j/k_u\right).\end{aligned}$$

$\bar{\mathrm{c}}$) $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_u > \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_u$, $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_j/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_j/k_u > \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_j/k_u$.
Dans ce cas-ci, nous avons — de façon analogue à $\bar{\mathrm{b}}$) —

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_u = r + \alpha\,, \quad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_j/k_u = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_j/k_u = r + \alpha\,.$$

C'est pourquoi

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_j \geqq \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_u,\ \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_j/k_u\right) = r + \alpha\,,$$

donc, en vertu de (6.3),

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_j = r + \alpha\,.$$

Compte tenu de (6.6) il en résulte

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j \geqq \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_u,\ \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_j/k_u\right) =\\ = \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_u,\ \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_j/k_u\right).\end{aligned}$$

La relation (6.8) est ainsi démontrée pour tous les cas possibles.

Désignons maintenant par les symboles a_{ik}, $0 \leqq i \leqq n-1$, $0 \leqq k \leqq n-1$, les éléments de la matrice $\mathbf{M}_n$ correspondant aux partitions $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}'_1$; et soient b_{ik} les éléments de la matrice $\mathbf{M}'_n$ correspondant à la partition $\mathscr{R}_2$ et enfin c_{ik} les éléments de la matrice $\mathbf{M}''_n$ correspondant à la partition $\mathscr{R}_3$. Nous allons montrer que

$$\mathbf{M}'_n = \mathbf{M}''_n \tag{6.11}$$

avec

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_p/k_q < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_p/k_q$$

pour une paire p, q au moins – cfr. (6.2), (6.4) et (6.6). La partition $\mathscr{R}_2$ n'est donc pas essentielle, comme nous avons supposé au début de l'alinéa b) de la démonstration du théorème 6.11; il résultera de cette contradiction que la deuxième partie du théorème 6.11 est également vraie. Il ne reste donc qu'à démontrer (6.11).

1) Soit

$$a_{ij} = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_t/k_i + |t-j| + 1 < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_j/k_i + 1\,.$$

D'après (6.3)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_j/k_i \leqq r + \alpha\,,$$

donc

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_t/k_i < r + \alpha\,. \tag{6.12}$$

Ensuite, on a évidemment

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_t/k_i + |t-j| + 1 \geqq a_{ij}\,.\text{[22)]}$$

Comme la partition $\mathscr{R}'_1$ est essentielle, la dernière inégalité entraîne

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_t/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_t/k_i\,, \tag{6.13}$$

donc aussi

$$a_{ij} = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'}\, k_t/k_i + |t-j| + 1\,.$$

D'après (6.5) et (6.12) nous avons

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_t/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_t/k_i \tag{6.14}$$

et d'après (6.6) et (6.13)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_t/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_t/k_i\,.$$

[22)] La relation donnée résulte du fait que la partition $\mathscr{R}'_1$ donne, par hypothèse, la même matrice $\mathbf{M}_n$ que la partition $\mathscr{R}_1$.

De plus

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_t/k_i + |t - j| + 1 \geqq b_{ij} = \min_{0 \leqq t' \leqq n-1} [\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_i + |t' - j|] + 1 \geqq$$

$$\geqq \min_{0 \leqq t' \leqq n-1} [\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_{t'}/k_i + |t' - j|] + 1 = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_t/k_i + |t - j| + 1 =$$

$$= \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_t/k_i + |t - j| + 1$$

en vertu de (6.14), donc

$$b_{ij} = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_t/k_i + |t - j| + 1 = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_t/k_i + |t - j| + 1 = a_{ij}\,.$$

Si nous remplaçons, dans le dernier système de relations, la partition $\mathscr{R}_2$ par la partition $\mathscr{R}_3$ et la partition $\mathscr{R}_1$ par la partition $\mathscr{R}'_1$, nous obtiendrons d'une manière analogue l'égalité $c_{ij} = a_{ij}$, d'où $c_{ij} = b_{ij}$.

2) Soit

$$a_{ij} = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_j/k_i + 1 < r + \alpha + 1\,,$$

c'est-à-dire supposons que la relation (6.12) ait lieu pour $t = j$. Alors de la même façon que dans le cas 1) on montre que $c_{ij} = b_{ij} = a_{ij}$.

3) Soit

$$a_{ij} = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_j/k_i + 1 = r + \alpha + 1\,.$$

Alors aussi

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_j/k_i = r + \alpha\,.$$ [23])

Si l'on a également

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_j/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_j/k_i = r + \alpha\,,$$

on voit aisément de nouveau que $c_{ij} = b_{ij} = a_{ij}$.

4) Soit

$$a_{ij} = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_j/k_i + 1 = r + \alpha + 1\,, \quad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_j/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_j/k_i > r + \alpha\,.$$

Alors

$$b_{ij} = \min_{0 \leqq t' \leqq n-1} [\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_i + |t' - j|] + 1\,,$$

$$c_{ij} = \min_{0 \leqq t' \leqq n-1} [\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_{t'}/k_i + |t' - j|] + 1\,,$$

et il existe t tel que

$$c_{ij} = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_t/k_i + |t - j| + 1 \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_t/k_i + |t - j| + 1\,. \tag{6.15}$$

[23]) La démonstration est la même que celle de la relation (6.13).

Si l'on a l'égalité en (6.15), alors

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_t/k_i + |t - j| + 1 \geqq b_{ij} = \min_{0 \leqq t' \leqq n-1} [\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_i + |t' - j|] + 1 \geqq$$
$$\geqq \min_{0 \leqq t' \leqq n-1} [\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_{t'}/k_i + |t' - j|] + 1 = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_t/k_i + |t - j| + 1 =$$
$$= \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_t/k_i + |t - j| + 1 ,$$

donc $b_{ij} = c_{ij}$.

Supposons maintenant que l'on a l'inégalité stricte en (6.15). Alors en vertu de (6.6) on a

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_t/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_t/k_i < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_t/k_i . \tag{6.16}$$

Il en résulte

$$a_{it} \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_t/k_i + 1 < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_t/k_i + 1 ;$$

il existe donc un indice $m \neq t$ tel que

$$\begin{aligned} a_{it} - 1 &= \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_m/k_i + |t - m| = \\ &= \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_m/k_i + |t - m| \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_t/k_i \leqq r + \alpha . \end{aligned} \tag{6.17}$$

Par conséquent

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_m/k_i < r + \alpha$$

et en vertu de (6.5) et (6.6)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_m/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_m/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_m/k_i .$$

Or, si nous tenons maintenant compte de (6.17), (6.16) et (6.15) nous voyons que

$$b_{ij} - 1 \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_m/k_i + |m - j| = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_m/k_i + |m - j| \leqq$$
$$\leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1} k_m/k_i + |t - m| + |t - j| \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1'} k_t/k_i + |t - j| =$$
$$= \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_t/k_i + |t - j| = c_{ij} - 1 ,$$

c'est-à-dire

$$b_{ij} \leqq c_{ij} . \tag{6.18}$$

Mais compte tenu de (6.7) et de la signification de b_{ij}, c_{ij}, on a évidemment

$$c_{ij} \leqq b_{ij} . \tag{6.19}$$

En combinant (6.18) et (6.19) nous obtenons une fois de plus l'égalité $c_{ij} = b_{ij}$. La relation (6.11) est donc bien établie et le théorème 6.11 est démontré complétement.

Théorème 6.12. *Soit $\mathscr{R}$ une partition essentielle d'ordre α de l'ensemble $\mathscr{I}$ et soit $\mathscr{R}_1$ une partition d'ordre $\alpha + 1$, prolongement de $\mathscr{R}$. Alors la partition $\mathscr{R}_1$ est essentielle si, et seulement si, ou bien toutes les composantes d'ordre $\alpha + 1$ ne contiennent qu'un seul point chacune, ou bien chacune des composantes d'ordre $\alpha + 1$ con-*

tenant plusieurs points contient au moins une valeur $\bar{u}$ par rapport à la partition $\mathscr{R}$ d'ordre α donnée.

Démonstration. a) Supposons que la partition $\mathscr{R}_1$ produit une composante $\mathscr{I}^{\alpha+1}$ contenant plus d'un point et qui ne contient que des valeurs u par rapport à la partition $\mathscr{R}$ d'ordre α. Soit $\mathscr{R}_2$ une partition complète arbitraire de l'ensemble $\mathscr{I}$, prolongement de $\mathscr{R}_1$. Soit ensuite $\mathscr{R}_3$ une partition complète de l'ensemble $\mathscr{I}$, jouissant des propriétés que voici

$\bar{\text{a}}$) $\mathscr{R}_3$ est un prolongement de $\mathscr{R}$;

$\bar{\text{b}}$) A la place de la composante $\mathscr{I}^{\alpha+1}$ considérée, la partition $\mathscr{R}_3$ contient le nombre correspondant de composantes d'ordre $\alpha + 1$ à un seul point chacune;

$\bar{\text{c}}$) Les autres composantes d'ordre $\alpha + 1$, ou supérieur, qui font partie de $\mathscr{R}_3$, font également partie de $\mathscr{R}_2$.

A la partition $\mathscr{R}_2$ soit associée la matrice $\mathbf{M}_n$ aux éléments a_{ik} et à la partition $\mathscr{R}_3$ soit associée la matrice $\mathbf{M}_n'$ aux éléments b_{ik}. Nous allons montrer que pour toute paire d'indices i, j on a

$$b_{ij} = a_{ij} \tag{6.20}$$

et, vu la définition des partitions $\mathscr{R}_2$ et $\mathscr{R}_3$, on a pour toute paire k, m

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_k/k_m \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_k/k_m\,; \tag{6.21}$$

de plus, pour toute paire d'éléments u, v, $u \neq v$, de la composante $\mathscr{I}^{\alpha+1}$ donnée de la partition $\mathscr{R}_2$ on a

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_u/k_v = r + \alpha < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_u/k_v\,. \tag{6.22}$$

La partition $\mathscr{R}_2$ n'est donc pas essentielle. Or, comme $\mathscr{R}_2$ était un prolongement complet arbitraire de la partition $\mathscr{R}_1$, cette dernière n'est pas essentielle non plus (voir la définition 6.5).

Il nous reste donc à démontrer (6.20).

$\bar{\bar{\text{a}}}$) Soit $i \notin \mathscr{I}^{\alpha+1}$ (par rapport à $\mathscr{R}_2$). Alors évidemment

$$b_{ij} - 1 = \min_{0 \leqq t \leqq n-1} \left[\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_t/k_i + |t - j|\right] =$$

$$= \min_{0 \leqq t \leqq n-1} \left[\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_t/k_i + |t - j|\right] = a_{ij} - 1\,.$$

$\bar{\bar{\text{b}}}$) Soit $i \in \mathscr{I}^{\alpha+1}$ dans la partition $\mathscr{R}_2$. Il existe alors un indice t tel que

$$b_{ij} - 1 = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_t/k_i + |t - j|\,.$$

$\bar{\bar{\mathrm{b}}}_1$) Soit $t \notin \mathscr{I}^{\alpha+1}$ (par rapport à $\mathscr{R}_2$). Alors

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_t/k_i + |t - j| = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_t/k_i + |t - j| \geqq a_{ij} - 1 .$$

On a donc $b_{ij} \geqq a_{ij}$, mais (6.21) entraîne

$$a_{ij} \geqq b_{ij} ; \tag{6.23}$$

on a donc, dans ce cas aussi, $b_{ij} = a_{ij}$.

$\bar{\bar{\mathrm{b}}}_2$) Soit $t \in \mathscr{I}^{\alpha+1}$ (par rapport à $\mathscr{R}_2$). Alors en vertu de (6.22) on a

$$b_{ij} - 1 = r + \alpha + |t - j| . \tag{6.24}$$

Comme t est une valeur u par rapport à la partition $\mathscr{R}$ (voir les définitions 6.9 et 6.10), il existe un indice s tel que

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}\, k_t/k_s + |s - t| = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_t/k_s + |s - t| \leqq r + \alpha \tag{6.25}$$

et en même temps

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_t/k_s < r + \alpha .$$

Comme $i, t \in \mathscr{I}^{\alpha+1}$, on a

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_t/k_i \geqq r + \alpha + 1 ,$$

donc

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} \frac{k_s}{k_i} = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} \left(\frac{k_s}{k_t} : \frac{k_i}{k_t} \right) = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} \frac{k_s}{k_t} .$$

Ensuite, on a évidemment

$$\begin{aligned} a_{ij} - 1 \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_s/k_i + |s - j| &\leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_s/k_i + |s - t| + |t - j| = \\ &= \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_t/k_s + |s - t| + |t - j| . \end{aligned} \tag{6.26}$$

En comparant (6.26), (6.25) et (6.24) nous obtenons de nouveau[24])

$$b_{ij} = a_{ij} .$$

La relation (6.20) est aussi établie dans tous les cas possibles. En même temps la démonstration de la première partie du théorème 6.12 est terminée.

b) Passons maintenant à la démonstration de la deuxième partie du théorème. Le cas où toutes les composantes contiennent un point chacune a été traité au théorème 6.11.

Soit donc $\mathscr{R}_1$ une partition d'ordre $\alpha + 1$ et supposons que chaque composante d'ordre $\alpha + 1$ qui contient plusieurs points contient au moins un élément qui soit une valeur $\bar{u}$ par rapport à la partition $\mathscr{R}$ d'ordre α; supposons de plus que cette partition ne soit pas essentielle. D'après notre théorème 6.11 ceci est équivalent

[24]) Nous tenons compte du fait que (6.23) est de nouveau vrai.

à l'hypothèse que la partition $\mathscr{R}_2$ d'ordre $\alpha + 2$ qui est un prolongement de $\mathscr{R}_1$ tel que toutes les composantes d'ordre $\alpha + 2$ contiennent un seul point chacune n'est pas, elle non plus, essentielle. Il existe donc une partition complète essentielle $\mathscr{R}_3$ telle que $\mathscr{R}_2$ et $\mathscr{R}_3$ correspondent à la même matrice $\boldsymbol{M}_n$ (c'est le type différentiel correspondant) et pour tout $i \neq j$ on a

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_i/k_j \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j \leqq r + \alpha + 1 \tag{6.27}$$

et pour au moins une paire u, v on a

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_u/k_v < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_u/k_v \,. \tag{6.28}$$

Soit ensuite $\mathscr{R}_4$ une partition qui est prolongement de $\mathscr{R}$ tel que toutes les composantes d'ordre $\alpha + 1$ contiennent un seul point chacune. D'après notre théorème 6.11, $\mathscr{R}_4$ est une partition complète essentielle et l'on a, compte tenu de la signification de $\mathscr{R}_2$ et $\mathscr{R}_4$,

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j \geqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4} k_i/k_j$$

et pour $i \neq j$

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j > \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4} k_i/k_j \Rightarrow \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4} k_i/k_j = r + \alpha \,, \quad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j = r + \alpha + 1 \,. \tag{6.29}$$

Dans ce qui suit, nous dénoterons a_{ik} les éléments de la matrice $\boldsymbol{M}_n$ correspondant aux partitions $\mathscr{R}_2$ et $\mathscr{R}_3$. La matrice $\boldsymbol{M}'_n$ aux éléments b_{ik} sera associée à la partition $\mathscr{R}_4$.

Tout d'abord, nous allons établir la relation

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_i/k_j \neq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j \Rightarrow \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4} k_i/k_j \,. \tag{6.30}$$

Soit

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j > \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4} k_i/k_j \,. \tag{6.31}$$

Alors en vertu de (6.29)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j = r + \alpha + 1 \,, \tag{6.32}$$

c'est-à-dire que les indices i et j appartiennent, dans la partition $\mathscr{R}_2$, à la même composante $\mathscr{I}^{\alpha+1}$ qui contient au moins une valeur $\bar{u}$ par rapport à la partition $\mathscr{R}$. Soit k cet indice. On a alors (pour $k \neq i$, $k \neq j$)

$$\begin{gathered} \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_k = r + \alpha + 1 \,, \quad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_j/k_k = r + \alpha + 1 \,, \\ a_{ik} - 1 = \min_{0 \leqq t' \leqq n-1} \left[\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_i + |t' - k|\right] . \end{gathered} \tag{6.33}$$

Examinons les valeurs que peut prendre pour différents t' l'expression dont nous cherchons le minimum.

1) $t' = k \Rightarrow \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_k/k_i = r + \alpha + 1.$

2) $t' \neq k,\ \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_i \geqq r + \alpha \Rightarrow \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_i + |t' - k| \geqq r + \alpha + 1.$

3) $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_i < r + \alpha.$

Alors

(6.34) $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_k = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}(k_{t'}/k_i : k_k/k_i) = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_i < r + \alpha \Rightarrow \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_k = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}} k_{t'}/k_k .$

A présent, compte tenu du fait que l'indice k est une valeur $\bar{u}$ par rapport à la partition $\mathscr{R}$ — voir la définition 6.9b) — nous avons

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}} k_{t'}/k_k + |t' - k| \geqq r + \alpha + 1 .$$

D'après (6.34) on a dans ce dernier cas

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}} k_{t'}/k_k ,$$

et c'est pourquoi

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_{t'}/k_i + |t' - k| \geqq r + \alpha + 1 .$$

On a donc dans tous les cas

$$a_{ik} - 1 \geqq r + \alpha + 1 . \tag{6.35}$$

D'autre part

$$a_{ik} - 1 = \min_{0 \leqq t' \leqq n-1} [\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_{t'}/k_i + |t' - k|] \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_k/k_i . \tag{6.36}$$

Donc, en vertu de (6.33), (6.35) et (6.36) on a

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_k/k_i \geqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_k/k_i . \tag{6.37}$$

En raison de (6.27) l'égalité doit avoir lieu en (6.37) et d'après (6.33)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_k/k_i = r + \alpha + 1 .$$

D'une manière analogue on démontre que

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_k/k_j = r + \alpha + 1 ,$$

donc, compte tenu de (6.27),

$$r + \alpha + 1 \geqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_i/k_j \geqq \min(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_k/k_i, \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_k/k_j) = r + \alpha + 1 ,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_i/k_j = r + \alpha + 1 = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_i/k_j$$

(pour $i \neq j$, voir (6.32)).

Si l'indice k est égal à l'un des indices i, j, l'idée principale de la démonstration restera évidemment la même, mais la démonstration sera un peu plus courte.

La relation (6.31) implique donc

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j$$

et c'est pourquoi

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j \neq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j \Rightarrow \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_i/k_j$$

car la relation

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_i/k_j$$

est impossible, vu la définition de $\mathscr{R}_4$.

Définissons maintenant la partition $\mathscr{R}_5$ par les relations

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j \Rightarrow \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j \tag{6.38}$$

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j \Rightarrow \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_i/k_j\,. \tag{6.39}$$

Tout comme à la démonstration du théorème 6.11, il nous faut maintenant établir la relation

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_j \geqq \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_u, \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_j/k_u\right). \tag{6.40}$$

Considérons d'abord les relations suivantes: Dans le cas où

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j$$

on a

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_i/k_j\,.$$

Dans le cas où

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j$$

on aura d'après (6.30)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_i/k_j\,,$$

donc d'après (6.38)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_i/k_j\,.$$

Il en résulte que pour n'importe quel i, j

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_j \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_i/k_j \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j\,. \tag{6.41}$$

Ensuite on a en (6.39)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_i/k_j \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j\,, \tag{6.42}$$

donc d'après (6.38) et (6.42) on aura pour tout i, j aussi

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_j \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_i/k_j\,.$$

Revenons maintenant à la relation (6.40). Nous avons ou bien

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_j &\geqq \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_i/k_u, \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_j/k_u\right) \geqq \\ &\geqq \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_u, \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_j/k_u\right)\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_j = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_i/k_j &\geqq \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_i/k_u, \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_j/k_u\right) \geqq \\ &\geqq \min\left(\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_i/k_u, \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_j/k_u\right).\end{aligned}$$

La relation (6.40) est donc bien établie.

A la partition $\mathscr{R}_5$ soit associée la matrice $\boldsymbol{M}_n''$ aux éléments c_{ik}. Nous allons démontrer que

$$\boldsymbol{M}_n'' = \boldsymbol{M}_n'\,. \tag{6.43}$$

(Nous rappelons que $\boldsymbol{M}_n'$ correspond à la partition $\mathscr{R}_4$.) Mais d'après (6.28) il existe au moins une paire d'éléments u, v telle que

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_u/k_v < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_u/k_v\,.$$

Pour cette paire on a d'après (6.38)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_u/k_v = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_u/k_v\,.$$

D'après (6.30) on a ensuite

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_u/k_v = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3}\, k_u/k_v < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2}\, k_u/k_v = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_u/k_v\,,$$

et la partition $\mathscr{R}_4$ ne pourrait être essentielle, ce qui est contraire à nos hypothèses. Cela achève la démonstration de la deuxième partie du théorème 6.12.

Il nous reste donc à démontrer la relation (6.43). Nous avons évidemment

$$c_{ij} \leqq b_{ij}\,. \tag{6.44}$$

Ensuite, il existe un indice t tel que

$$c_{ij} - 1 = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_t/k_i + |t - j|\,.$$

1) Soit

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5}\, k_t/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_t/k_i\,.$$

Alors on a également

$$c_{ij} - 1 = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4}\, k_t/k_i + |t - j| \geqq b_{ij} - 1$$

et en vertu de (6.44) $c_{ij} = b_{ij}$.

2) Soit

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5} k_t/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_t/k_i < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4} k_t/k_i .^{25})$$

On a évidemment

$$a_{ij} - 1 \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_t/k_i + |t - j|$$

et il existe un indice m tel que

$$a_{ij} - 1 = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_m/k_i + |m - j| = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_m/k_i + |m - j| ,^{26})$$

et c'est pourquoi on a d'après (6.39) et (6.42)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5} k_m/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4} k_m/k_i \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_m/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_m/k_i .$$

Donc

$$\begin{aligned} b_{ij} - 1 &\leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4} k_m/k_i + |m - j| \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_m/k_i + |m - j| = \\ &= a_{ij} - 1 \leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_t/k_i + |t - j| = c_{ij} - 1 . \end{aligned}$$

Nous avons donc de nouveau $b_{ij} \leqq c_{ij}$, d'où en vertu de (6.44) $b_{ij} = c_{ij}$. La relation (6.43) est ainsi bien établie et la deuxième partie du théorème 6.12 est démontrée.

Voici une conséquence immédiate de notre théorème 6.12:

Théorème 6.13. *Supposons que tous les facteurs du produit formel correspondant à une composante d'ordre α (engendrée par une partition essentielle $\mathscr{R}$ d'ordre α) soient des valeurs u.*[27]) *Alors, quel que soit leur nombre ($\leqq n - 1$) et quel que soit α, on a*

$$\mathrm{C}\,(u \ldots u) = 1$$

Théorème 6.14. *Soit $\mathscr{R}$ une partition d'ordre α et $\mathscr{R}_1$ une partition d'ordre $\alpha + 1$, prolongement de $\mathscr{R}$. Alors les valeurs u et $\bar{u}$ par rapport à la partition $\mathscr{R}$ deviennent des valeurs u et $\bar{u}$ par rapport à la partition $\mathscr{R}_1$ suivant les règles que voici:*

a) *Chaque valeur u par rapport à $\mathscr{R}$ est aussi une valeur u par rapport à $\mathscr{R}_1$.*

---

[25]) Le cas où

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_5} k_t/k_i = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_t/k_i > \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_4} k_t/k_i$$

ne peut se présenter en raison de (6.41).

[26]) Evidemment

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_m/k_i \geqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_m/k_i ,$$

mais le cas où

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_3} k_m/k_i < \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_2} k_m/k_i$$

ne peut se réaliser car la valeur de l'élément a_{ik} calculée relativement à la partition $\mathscr{R}_3$ serait plus petite que celle relative à $\mathscr{R}_2$.

[27]) Cela signifie qu'il n'y a pas de valeurs $\bar{u}$ en ce produit.

b) *Supposons que l'indice i soit une valeur* $\bar{u}$ *par rapport à* $\mathscr{R}_1^*$, *mais qu'un au moins des indices* $i - 1$, $i + 1$ *soit une valeur u par rapport à* $\mathscr{R}$ (*donc, d'après a*), *aussi par rapport à* $\mathscr{R}_1$). *Alors i est une valeur u par rapport à* $\mathscr{R}_1$.

c) *Lorsque* $i \in \mathscr{I}^{\alpha+1}$ *mais en même temps une au moins des relations* $i - 1 \notin \mathscr{I}^{\alpha+1}$, $i + 1 \notin \mathscr{I}^{\alpha+1}$ *est vérifiée, alors i est une valeur u par rapport à* $\mathscr{R}_1$ *que ce soit une valeur u ou une valeur* $\bar{u}$ *par rapport à* $\mathscr{R}$.[28])

d) *Les valeurs* $\bar{u}$ *par rapport à* $\mathscr{R}$ *dont on ne parle ni en b) ni en c) restent des valeurs* $\bar{u}$ *même par rapport à* $\mathscr{R}_1$.

Démonstration. a) L'énoncé a) est évident en raison de (6.1).

b) Soit $i - 1$ une valeur u par rapport à $\mathscr{R}$ et supposons que $i - 1$ et i appartiennent à la même $\mathscr{I}^{\alpha+1}$. (Le cas contraire sera discuté en c).) D'après (6.1) il existe un indice s tel que

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}\, k_{i-1}/k_s + |s - (i - 1)| \leqq r + \alpha\,.$$

Mais alors

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}\, k_{i-1}/k_s = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_{i-1}/k_s < r + \alpha$$

(voir la définition 6.1b)) et comme i et $i - 1$ appartiennent à la même $\mathscr{I}^{\alpha+1}$, nous avons aussi

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_s = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_{i-1}/k_s\,.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_s + |s - i| &= \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_{i-1}/k_s + |s - (i - 1) - 1| \leqq \\ &\leqq \mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_{i-1}/k_s + |s - (i - 1)| + 1 \leqq r + \alpha + 1\,,\end{aligned}$$

donc i est une valeur u par rapport à la partition $\mathscr{R}_1$ d'ordre $\alpha + 1$.

c) Supposons maintenant que les éléments i et $i - 1$ n'appartiennent pas à la même composante $\mathscr{I}^{\alpha+1}$. Alors

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_{i-1} \leqq r + \alpha\,,$$

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_{i-1} + |i - (i - 1)| \leqq r + \alpha + 1\,,$$

d'où il résulte que i (et aussi $i - 1$) est une valeur u par rapport à $\mathscr{R}_1$.

d) Soit i une valeur $\bar{u}$ par rapport à $\mathscr{R}$ et supposons que les éléments $i - 1$, $i + 1$ appartiennent à la même $\mathscr{I}^{\alpha+1}$ que i et qu'ils soient également des valeurs $\bar{u}$ par rapport à $\mathscr{R}$. Nous allons examiner plusieurs cas:

d_1) Soit

$$s < i - 1\,, \quad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}}\, k_i/k_s < r + \alpha\,.$$

[28]) Si $i = 0$ ou bien $i = n - 1$, les cas b) et c) restent vrais en ce sens qu'on y considère un seul indice voisin.

Alors aussi

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}\, k_{i-1}/k_s = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}}\, k_i/k_s < r + \alpha$$

et d'après (6.1)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}\, k_{i-1}/k_s + i - 1 - s > r + \alpha\,. \tag{6.45}$$

Comme

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_s = \mathrm{cl}_{\mathscr{R}}\, k_i/k_s\,,$$

on a en vertu de (6.45)

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_s + i - s > r + \alpha + 1\,.$$

d_2) Le cas où

$$s > i + 1\,, \quad \mathrm{cl}_{\mathscr{R}}\, k_i/k_s < r + \alpha$$

s'examine de la même façon que le cas d_1.

d_3) Soit

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_s = r + \alpha\,.$$

Alors en vertu de nos hypothèses $s \neq i - 1$, $s \neq i + 1$, et c'est pourquoi

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{R}_1}\, k_i/k_s + |s - i| \geqq r + \alpha + 2 > r + \alpha + 1\,.$$

En résumant les résultats de d_1, d_2 et d_3, nous voyons que – cfr. la définition 6.9b) – l'indice i est une valeur $\bar{u}$ par rapport à la partition $\mathscr{R}_1$ d'ordre $\alpha + 1$.

Complément 6.15.[29]) A partir du théorème 6.14 nous pouvons déduire quelques procédés pratiques de calcul avec des valeurs u et $\bar{u}$:

Soit p. ex. $n = 10$ et supposons qu'une composante d'ordre 2, nous la désignerons $\mathscr{I}^2$, contienne les éléments 0, 1, 2, 4, 8, 9. Supposons ensuite que nous ayons pour $i \in \mathscr{I}^2$: $\mathrm{cl}\, k_i/k_3 = \mathrm{cl}\, k_i/k_7 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, k_i/k_5 = \mathrm{cl}\, k_i/k_6 = r$. Nous avons alors

$$C_2\,(012489) = C\,(\bar{u}\bar{u}uuu\bar{u})\,. \tag{6.46}$$

Prenons maintenant un sous-ensemble arbitraire de $\mathscr{I}^2$ (voir la note[38]) dans la première partie de cet article, p. 351) et considérons-le comme une composante d'ordre 3. Nous allons nous intéresser au produit formel correspondant (nous l'appellerons produit d'ordre 3).

a) Toute valeur u reste valeur u, en accord avec notre théorème 6.14.

b) Toute valeur $\bar{u}$ de l'expression (6.46) qui, dans le produit formel d'ordre 3 sera voisine d'une valeur u de (6.46) deviendra valeur u, en vertu du théorème 6.14, b) ou c) suivant que les indices i_p et i_q, correspondant à ces valeurs $\bar{u}$ et u considérées, sont voisins dans l'ordre naturel des indices $0, 1, \ldots, n - 1$, ou non.

---

[29]) En ce complément nous nous exprimons d'une façon plutôt sommaire, sans trop de précision; il s'agit d'ailleurs seulement de procédés de calcul pratiques, tout étant bien compréhensible.

c) Si une valeur $\bar{u}$ de l'expression (6.46) est voisine des deux côtés de valeurs $\bar{u}$ (par rapport à (6.46)) et qui sont voisines même dans le produit formel de l'expression (6.46), elle reste valeur $\bar{u}$ même dans le produit formel d'ordre 3 (s'il s'agit d'indices extrêmes 0 ou $n - 1$, nous ne considérons que le voisinage d'un seul côté; autrement les indices extrêmes des composantes d'ordre 3 ainsi formées deviennent valeurs u — cela découle des points d) et c) du théorème 6.14).

d) Une valeur $\bar{u}$ voisine d'une valeur $\bar{u}$ qui n'est pas sa voisine dans le produit formel de l'expression (6.46) devient valeur u — cela découle du point c) du théorème 6.14.

Nous aurons donc dans notre cas p. ex.

$$\begin{aligned} &C_3(01) = C(\bar{u}u)\,, \qquad C_3(09) = C(uu)\,, \\ &C_3(012) = C(\bar{u}uu)\,, \quad C_3(124) = C(uuu)\,, \\ &C_3(012489) = C(\bar{u}uuuuu)\,. \end{aligned}$$

Théorème 6.16. *Soit*

$$\min_{0 \leqq i \leqq n-1} \operatorname{cl} k_i = r \tag{6.47}$$

et soit $\mathbf{D}(n)$ *le nombre des types différentiels différents qui sont en accord avec* (6.47). *Alors*

$$\mathbf{D}(n) = \sum_{\bigcup_{i=1}^{\omega_1} \mathscr{I}_i^1 = \mathscr{I}}{}' \mathbf{C}_{\mathscr{I}_1{}^1} \mathbf{C}_{\mathscr{I}_2{}^1} \ldots \mathbf{C}_{\mathscr{I}_{\omega_1}{}^1} \tag{6.48}$$

où $\mathscr{I}_i^1$ *dénote une composante de décomposition d'ordre* 1 *et où l'accent sur le* $\sum$ *signifie que nous éliminons une partition telle qui ait une seule composante d'ordre* 1 *contenant tous les éléments de l'ensemble* $\mathscr{I}$. *Les valeurs de* $\mathbf{C}_{\mathscr{I}_i{}^1}$ *peuvent se calculer à l'aide des formules de récurrence*

$$\mathbf{C}_{\mathscr{I}_j{}^\alpha} = \sum_{\bigcup_{q=1}^{\omega_j} \mathscr{I}_{j_q}{}^{\alpha+1} = \mathscr{I}_j{}^\alpha} \mathbf{C}_{\mathscr{I}_{j_1}{}^{\alpha+1}} \mathbf{C}_{\mathscr{I}_{j_2}{}^{\alpha+1}} \ldots \mathbf{C}_{\mathscr{I}_{j_{\omega_j}}{}^{\alpha+1}}\,, \tag{6.49}$$

la sommation y étant éténdue à toutes les partitions essentielles de la composante $\mathscr{I}_j^\alpha$.

Démonstration. S'il existait une composante d'ordre 1 contenant tous les éléments de l'ensemble $\mathscr{I}$, on aurait pour tout $m : \operatorname{cl} k_m/k_0 = \operatorname{cl} k_m \geqq r + 1$, en contradiction avec (6.47). Ensuite, il est évident que: Si nous considérons l'ensemble $\mathscr{I}$ comme une composante d'ordre zéro, alors tous ses éléments sont des valeurs $\bar{u}$ et toute partition en (6.48) est essentielle.

Supposons ensuite que la composante $\mathscr{I}_j^\alpha$ soit engendrée par une partition essentielle d'ordre α. Nous obtenons la partition complète essentielle de la composante $\mathscr{I}_j^\alpha$ si nous décomposons d'abord essentiellement la composante $\mathscr{I}_j^\alpha$ en composantes d'ordre $\alpha + 1$, puis nous décomposons essentiellement ces composantes, etc, jusqu' à ce que nous arrivons aux composantes contenant un seul point chacune. En vertu du théorème 6.12 nous trouvons facilement que toute partition complète essentielle d'une composante $\mathscr{I}_{j_p}^{\alpha+1}$ jouit de la propriété suivante: toutes les composantes de n'importe quel ordre $\beta > \alpha + 1$ contenant plusieurs points contiennent au moins une valeur $\bar{u}$ (par rapport à la partition de l'ordre $\beta - 1$), autrement dit: Si nous décomposons essentiellement la composante $\mathscr{I}_j^\alpha$ et puis nous décomposons d'une façon essentielle mais arbitraire chacune des composantes d'ordre $\alpha + 1$ ainsi engendrées, nous obtenons ainsi une partition essentielle de la composante $\mathscr{I}_j^\alpha$. Par contre il est impossible d'arriver à la partition complète essentielle de la composante $\mathscr{I}_j^\alpha$ par un autre procédé. La formule (6.49) est donc valable. Compte tenu du théorème 6.4, cela achève aussi la démonstration du théorème 6.16.

Remarque 6.17. Il résulte de nos théorèmes 6.13 et 6.14 qu'en appliquant les formules (6.48) et (6.49) nous arrivons toujours au but après un nombre de pas fini.

Exemple 6.18. Pour illustrer nos résultats nous allons calculer le nombre des classes de types différentiels dans l'espace E_n pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

E_2: $\mathbf{D}(2) = \mathrm{C}^2(u) = 1$

E_3: $\mathbf{D}(3) = \mathrm{C}^3(u) + \mathrm{C}(\bar{u}u)\,\mathrm{C}(u) + \mathrm{C}(uu)\,\mathrm{C}(u) + \mathrm{C}(u)\,\mathrm{C}(u\bar{u})$, où $\mathrm{C}(\bar{u}u) =$
$= \mathrm{C}(u\bar{u}) = \mathrm{C}^2(u) + \mathrm{C}(uu) = 2$, donc $\mathbf{D}(3) = 1 + 2 + 1 + 2 = 6$.

E_4: Nous faisons d'abord des calculs auxiliaires.

$$\mathrm{C}(\bar{u}uu) = \mathrm{C}(uu\bar{u}) = \mathrm{C}(u\bar{u}u) = \mathrm{C}^3(u) + 2\mathrm{C}(uu)\,\mathrm{C}(u) + \mathrm{C}(uuu) = 4$$
$$\mathrm{C}(\bar{u}\bar{u}u) = \mathrm{C}(u\bar{u}\bar{u}) = \mathrm{C}^3(u) + [\mathrm{C}(\bar{u}u) + 2\mathrm{C}(uu)]\,\mathrm{C}(u) + \mathrm{C}(\bar{u}uu) =$$
$$= 1 + 4 + 4 = 9$$
$$\mathbf{D}(4) = \mathrm{C}^4(u) + [\mathrm{C}(\bar{u}u) + \mathrm{C}(u\bar{u}) + 4\mathrm{C}(uu)]\,\mathrm{C}^2(u) + \mathrm{C}(\bar{u}u)\,\mathrm{C}(u\bar{u}) +$$
$$+ 2\mathrm{C}^2(uu) + [\mathrm{C}(\bar{u}\bar{u}u) + \mathrm{C}(\bar{u}uu) + \mathrm{C}(uu\bar{u}) + \mathrm{C}(u\bar{u}\bar{u})]\,\mathrm{C}(u) = 1 + 8 +$$
$$+ 4 + 2 + 26 = 41$$

E_5: Nous aurons besoin des calculs auxiliaires que voici:

$$\mathrm{C}(\bar{u}uuu) = \mathrm{C}^4(u) + 3\mathrm{C}(uu)\,\mathrm{C}^2(u) + 3\mathrm{C}(uuu)\,\mathrm{C}(u) + \mathrm{C}(uuuu) = 8$$
$$\mathrm{C}(\bar{u}uu\bar{u}) = \mathrm{C}^4(u) + 5\mathrm{C}(uu)\,\mathrm{C}^2(u) + 2\mathrm{C}^2(uu) + 4\mathrm{C}(uuu)\,\mathrm{C}(u) + \mathrm{C}(uuuu) =$$
$$= 13$$
$$\mathrm{C}(\bar{u}\bar{u}uu) = \mathrm{C}(uu\bar{u}\bar{u}) = \mathrm{C}^4(u) + [\mathrm{C}(\bar{u}u) + 4\mathrm{C}(uu)]\,\mathrm{C}^2(u) + 2\mathrm{C}^2(uu) +$$
$$+ [2\mathrm{C}(\bar{u}uu) + 2\mathrm{C}(uuu)]\,\mathrm{C}(u) + \mathrm{C}(\bar{u}uuu) = 1 + 6 + 2 + 10 + 8 = 27$$
$$\mathrm{C}(\bar{u}\bar{u}\bar{u}u) = \mathrm{C}(u\bar{u}\bar{u}\bar{u}) = \mathrm{C}^4(u) + \mathrm{C}^2(u)\,[\mathrm{C}(\bar{u}u) + 5\mathrm{C}(uu)] + \mathrm{C}(\bar{u}u)\,\mathrm{C}(uu) +$$
$$+ 2\mathrm{C}^2(uu) + \mathrm{C}(u)\,[\mathrm{C}(\bar{u}\bar{u}u) + \mathrm{C}(\bar{u}uu) + 2\mathrm{C}(uuu)] + \mathrm{C}(\bar{u}\bar{u}uu) = 1 + 7 +$$
$$+ 2 + 2 + 15 + 27 = 54$$

$\mathbf{D}(5) = C^5(u) + C^3(u)\,[2C(\bar{u}u) + 8C(uu)] + C(u)\,[C^2(\bar{u}u) +$
$+ 4C(\bar{u}u)\,C(uu) + 10C^2(uu)] + C^2(u)\,[2C(\bar{u}\bar{u}u) + 4C(\bar{u}uu) + C(u\bar{u}u) +$
$+ 3C(uuu)] + 2C(\bar{u}\bar{u}u)\,C(\bar{u}u) + 4C(\bar{u}uu)\,C(uu) + 3C(uuu)\,C(uu) +$
$+ C(u\bar{u}u)\,C(uu) + [C(\bar{u}\bar{u}\bar{u}u) + C(\bar{u}\bar{u}uu) + C(\bar{u}uu\bar{u}) + C(uu\bar{u}\bar{u}) +$
$+ C(u\bar{u}\bar{u}\bar{u})]\,C(u) = 1 + 12 + 22 + 41 + 36 + 16 + 3 + 4 + 54 + 27 +$
$+ 13 + 27 + 54 = 310$

E_6: Faisons d'abord les calculs auxiliaires:

$C(uu\bar{u}u) = C(\bar{u}uuu) = 8$

$C(u\bar{u}\bar{u}u) = C^4(u) + 5C(uu)\,C^2(u) + 2C^2(uu) + 4C(uuu)\,C(u) + C(uuuu) =$
$= 13$

$C(\bar{u}uuuu) = C^5(u) + 4C(uu)\,C^3(u) + 6C(uuu)\,C^2(u) + 4C(uuuu)\,C(u) +$
$+ C(uuuuu) = 16$

$C(\bar{u}\bar{u}uuu) = C^5(u) + C^3(u)\,[C(\bar{u}u) + 6C(uu)] + 6C^2(uu)\,C(u) +$
$+ C^2(u)\,[3C(\bar{u}uu) + 6C(uuu)] + 6C(uuu)\,C(uu) + 3C(\bar{u}uuu)\,C(u) +$
$+ 2C(uuuu)\,C(u) + C(\bar{u}uuuu) = 1 + 8 + 6 + 18 + 6 + 24 + 2 + 16 = 81$

$C(\bar{u}\bar{u}\bar{u}uu) = C^5(u) + C^3(u)\,[C(\bar{u}u) + 8C(uu)] + C(u)\,[2C(\bar{u}u)\,C(uu) +$
$+ 10C^2(uu)] + C^2(u)\,[C(\bar{u}\bar{u}u) + 2C(\bar{u}uu) + 7C(uuu)] + [2C(\bar{u}uu) +$
$+ 6C(uuu)]\,C(uu) + C(uuu)\,C(\bar{u}u) + [2C(\bar{u}\bar{u}uu) + C(\bar{u}uuu) +$
$+ 2C(uuuu)]\,C(u) + C(\bar{u}\bar{u}uuu) = 1 + 10 + 14 + 24 + 14 + 2 + 64 +$
$+ 81 = 210$

$C(\bar{u}\bar{u}uu\bar{u}) = C^5(u) + C^3(u)\,[C(\bar{u}u) + 8C(uu)] + C(u)\,[2C(\bar{u}u)\,C(uu) +$
$+ 10C^2(uu)] + C^2(u)\,[3C(\bar{u}uu) + 7C(uuu)] + 2C(\bar{u}uu)\,C(uu) +$
$+ 6C(uuu)\,C(uu) + C(uuu)\,C(\bar{u}u) + [3C(\bar{u}uuu) + 2C(uuuu)]\,C(u) +$
$+ C(\bar{u}uuuu) = 1 + 10 + 14 + 19 + 8 + 6 + 2 + 26 + 16 = 102$

$C(\bar{u}\bar{u}\bar{u}\bar{u}u) = C^5(u) + C^3(u)\,[C(\bar{u}u) + 9C(uu)] + C(u)\,[3C(\bar{u}u)\,C(uu) +$
$+ 12C^2(uu)] + C^2(u)\,[C(\bar{u}\bar{u}u) + 2C(\bar{u}uu) + C(u\bar{u}u) + 6C(uuu)] +$
$+ [C(\bar{u}\bar{u}u) + 2C(\bar{u}uu) + C(u\bar{u}u) + 5C(uuu)]\,C(uu) + C(uuu)\,C(\bar{u}u) +$
$+ C(u)\,[C(\bar{u}\bar{u}\bar{u}u) + C(\bar{u}\bar{u}uu) + C(\bar{u}uuu) + C(uuuu) + C(u\bar{u}uu) +$
$+ C(\bar{u}\bar{u}\bar{u}uu)] = 1 + 11 + 18 + 27 + 26 + 2 + 98 + 210 = 393$

$\mathbf{D}(6) = C^6(u) + C^4(u)\,[2C(\bar{u}u) + 13C(uu)] + C^2(u)\,[C^2(\bar{u}u) +$
$+ 10C(\bar{u}u)\,C(uu) + 34C^2(uu)] + [C^2(\bar{u}u)\,C(uu) + 4C(\bar{u}u)\,C^2(uu) +$
$+ 10C^3(uu)] + C^3(u)\,[2C(\bar{u}\bar{u}u) + 6C(\bar{u}uu) + 2C(u\bar{u}u) + 10C(uuu)] +$
$+ C(u)\,\{2C(\bar{u}\bar{u}u)\,[2C(uu) + C(\bar{u}u)] + C(\bar{u}uu)\,[2C(\bar{u}u) + 16C(uu)] +$
$+ C(u\bar{u}u)\,[2C(\bar{u}u) + 4C(uu)] + C(uuu)\,[28C(uu) + 2C(\bar{u}u)]\} + C^2(\bar{u}\bar{u}u) +$
$+ C^2(\bar{u}uu) + 2C(\bar{u}uu)\,[C(uuu) + C(u\bar{u}u)] + 4C^2(uuu) + C^2(u)\,[2C(\bar{u}\bar{u}\bar{u}u) +$
$+ 4C(\bar{u}\bar{u}uu) + C(\bar{u}uu\bar{u}) + 4C(\bar{u}uuu) + 2C(uu\bar{u}u) + C(u\bar{u}\bar{u}u) + C(uuuu)] +$
$+ 2C(\bar{u}\bar{u}\bar{u}u)\,C(\bar{u}u) + [4C(\bar{u}\bar{u}uu) + C(\bar{u}uu\bar{u}) + 4C(\bar{u}uuu) + 2C(uu\bar{u}u) +$
$+ C(u\bar{u}\bar{u}u) + C(uuuu)]\,C(uu) + [2C(\bar{u}\bar{u}\bar{u}\bar{u}u) + 2C(\bar{u}\bar{u}\bar{u}uu) +$
$+ 2C(\bar{u}\bar{u}uu\bar{u})]\,C(u) = 1 + 17 + 58 + 22 + 60 + \{72 + 80 + 32 + 32\} +$
$+ 81 + 16 + 40 + 4 + 291 + 216 + 183 + 786 + 420 + 204 = 2615.$

Remarque 6.19. Si nous voulions écrire systématiquement tous les types différentiels dans l'espace E_n, n étant donné, pour une valeur r donnée (voir (6.47)), il nous faudrait introduire un certain ordre dans l'ensemble des types différentiels. On peut le faire de plusieurs façons différentes. Une de ces possibilités est la suivante: Nous ordonnons d'une façon léxicographique toutes les paires (i, j), où $i < j$, $0 \leqq i \leqq \leqq n - 2$, $1 \leqq j \leqq n - 1$, et puis par rapport à cet ordre des paires (i, j) nous ordonnons lécixographiquement tous les systèmes de valeurs cl k_i/k_j correspondant à une partition complète essentielle de l'ensemble $\mathscr{I} = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Ce procédé ordonnerait les six types différentiels dans l'espace E_3 comme ceci (la notation étant empruntée au travail [1]): (4.4), (4.6), (4.8), (4.5), (4.7), (4.9), tandis que les 41 types différentiels dans l'espace E_4 (à la même notation) seraient ordonnés ainsi: (6.6), (6.9), (6.10), (6.8), (6.7), (6.11), (6.12), (6.13), (6.15), (6.14), (6.16), (6.17), (6.18), (6.19), (6.23), (6.29), (6.22), (6.28), (6.43), (6.44), (6.45), (6.46), (6.20), (6.24), (6.25), (6.39), (6.40), (6.30), (6.34), (6.33), (6.21), (6.26), (6.27), (6.41), (6.42), (6.31), (6.35), (6.37), (6.32), (6.36), (6.38).

7. CONCLUSIONS

Le présent travail géneralise les résultats de E. ČECH, contenus dans ses travaux [1] et [2], en ce sens qu'on a trouvé ici la relation qui existe entre les classes différentielles des différents coefficients de Frenet et la classe différentielle ou le type différentiel d'une courbe régulière C qui y correspond, tout cela dans un espace de dimension arbitraire.[30]) De plus, on a discuté en détail la structure du type différentiel d'une courbe et l'on a trouvé quatre systèmes équivalents $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4$, de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice carrée du type $n \times n$ soit le type différentiel d'une courbe régulière C plongée dans l'espace E_n. On peut calculer, suivant les formules de récurrence (6.48) et (6.49), le nombre des classes de types différentiels dans l'espace E_n, pour n quelconque. Il faut toutefois admettre que ces formules conduisent à des calculs assez compliqués. On ne s'est pas intéressé ici au problème de trouver des fonctions $f(n)$ et $g(n)$ telles que l'on ait $f(n) = O(\mathbf{D}(n))$, $g(n) = o(\mathbf{D}(n))$, ou une formule asymptotique.

On ne s'est pas intéressé non plus à chercher les relations auxquelles satisfont les symboles exprimant le nombre de toutes les partitions complètes essentielles d'une composante, introduits par la définition 6.9. Il est p. ex. évident que, en général, $\mathrm{C}(\bar{u}u \ldots u) = 2^{n-1}$, n étant le nombre de facteurs du produit formel en question. Il résulte ensuite de nos calculs que p. ex. $\mathrm{C}(\bar{u}\bar{u}u) = 9 = 3^2$, $\mathrm{C}(\bar{u}\bar{u}uu) = 27 = 3^3$, $\mathrm{C}(\bar{u}\bar{u}uuu) = 81 = 3^4$. La question de savoir si ce résultat peut être généralisé et si l'on peut trouver encore d'autres relations générales qui pourraient éventuellement simplifier l'emploi des formules (6.48) et (6.49), reste pour le moment ouverte.

---

[30]) On a en même temps généralisé — voir le texte précédant l'exemple 1.4 — la définition de la classe différentielle d'une fonction.

Il résulte des calculs faits dans le présent travail que les cinq premiers membres de la suite $\{\mathbf{D}(n)\}$, $n \geqq 2$, croissent comme ceci.

Si nous posons $\mathbf{D}(n) = \mathbf{D}(n-1)\, q_{n-1}$, nous aurons $\mathbf{D}(2) = 1$, $\mathbf{D}(3) = 6$, $\mathbf{D}(4) = 41$, $\mathbf{D}(5) = 310$, $\mathbf{D}(6) = 2615$; $q_2 = 6$, $q_3 = 6{,}83\ldots$, $q_4 = 7{,}56\ldots$, $q_5 = 8{,}43\ldots$ Les valeurs q_n sont donc pour $n = 2, \ldots, 5$ croissantes en fonction de n et la différence de deux valeurs voisines varie, d'une façon non-monotone, entre 0,72 et 0,88.

Liste des conditions auxquelles doit satisfaire une matrice carrée M_n pour être le type différentiel d'une courbe régulière C.

$a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Leftrightarrow a_{ik} \leqq \min(a_{ik-1}, a_{ik+1})$

C1: a_{ik} entiers, positifs

C2: $|a_{ik} - a_{ik+1}| \leqq 1,\ 0 \leqq i \leqq n-1,\ 0 \leqq k \leqq n-2$

C3: $a_{ii} = \min(a_{ii-1}, a_{ii+1}) + 1$ pour $1 \leqq i \leqq n-2$

$a_{00} = a_{01} + 1,\ a_{n-1n-1} = a_{n-1n-2} + 1$

C4: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{ik} \geqq \min(a_{ij}, a_{jk})$

C5: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow \min(a_{ji}, a_{jk}) \leqq a_{ik}$

C4′: $a_{ik} \geqq \min(a_{ij}, a_{jk})$

C5′: $a_{ik} \geqq \min(a_{ji}, a_{jk})$

C6: $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{jk} \leqq a_{ik}$

C7: $a_{kk} \geqq a_{ik}$

C8: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{kk} > a_{ik}$

C9: $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{kk} = a_{ik}$

C10: $a_{ik} = a_{jk} \Rightarrow \begin{cases} \text{soit } a_{ik} = \bar{a}_{ik},\ a_{jk} = \bar{a}_{jk} \\ \text{soit } a_{ik} \neq \bar{a}_{ik},\ a_{jk} \neq \bar{a}_{jk} \end{cases}$

C11: $a_{ik} < a_{jk} \Rightarrow a_{ik} = \bar{a}_{ik}$

C12: $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{jk} \leqq a_{ik}$

C13: $a_{ik} = \bar{a}_{ik},\ a_{jk} \neq \bar{a}_{jk} \Rightarrow a_{ik} < a_{jk}$

C14: $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik},\ a_{jk} \neq \bar{a}_{jk} \Rightarrow a_{ik} = a_{jk}$

C15: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{ki} \leqq a_{ik}$

C16: $a_{ik} = \bar{a}_{ik},\ a_{ki} = \bar{a}_{ki} \Rightarrow a_{ik} = a_{ki}$

C17: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{ik} \geqq \min(a_{ji}, a_{kj})$

C18: $a_{ik} = \bar{a}_{ik} \Rightarrow a_{ik} \geqq \min(a_{ij}, a_{kj})$

C19: $a_{ik} < a_{ij} \Rightarrow a_{jk} = a_{ik}$

C20: $a_{ik} = \bar{a}_{ik},\ a_{ik} < a_{ij} \Rightarrow a_{kj} = a_{ik}$

C21: $a_{ik} = \bar{a}_{ik},\ a_{ik} < a_{kj} \Rightarrow a_{ij} = a_{ik}$

C22: $a_{ik} < a_{ji} \Rightarrow a_{jk} = a_{ik}$

C23: $a_{ik} = \bar{a}_{ik},\ a_{ji} = \bar{a}_{ji},\ a_{ji} < a_{kj} \Rightarrow a_{ik} = a_{ji}$

C24: $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$, $a_{kj} = \bar{a}_{kj}$, $a_{kj} < a_{ji} \Rightarrow a_{ik} = a_{kj}$

C25: $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$, $a_{ij} < a_{kj} \Rightarrow a_{ik} = a_{ij}$

C26: $a_{ik} = \bar{a}_{ik}$, $a_{kj} < a_{ij} \Rightarrow a_{ik} = a_{kj}$

C27: $|a_{ii} - a_{i+1\,i+1}| \leqq 1$ pour $0 \leqq i \leqq n - 2$

C28: $\min\limits_{0 \leqq k \leqq n-1} a_{ik} = \min\limits_{0 \leqq m \leqq n-1} a_{jm}$, $0 \leqq i \leqq n - 1$, $0 \leqq j \leqq n - 1$

C29: $a_{ik} < a_{jk}$, $a_{ik} < a_{jm} \Rightarrow a_{im} = a_{ik}$

C30: $a_{ik} < a_{jk}$, $a_{ik} < a_{im} \Rightarrow a_{jm} = a_{ik}$

C31: $a_{ik} \lesseqqgtr a_{im} \leqq a_{jm} \Rightarrow a_{jk} \geqq a_{ik}$; égalité pour $a_{ik} < a_{im}$, ou $a_{ik} \neq \bar{a}_{ik}$

C32: $a_{ik} = a_{jk} < a_{jm} \Rightarrow a_{im} \geqq a_{ik}$

C33: $a_{ik} < a_{jm} \leqq a_{im} \Rightarrow a_{jk} = a_{ik}$

C34: $a_{ik} = a_{jm} < a_{jk} \Rightarrow a_{im} \geqq a_{jm}$; égalité pour $a_{jm} \neq \bar{a}_{jm}$

S1: C1 – C5

S2: C1, C3, C4, C5, C6

S3: C1, C3, C4, C5, C7

S4: C1, C3, C4, C5, C9

Littérature

[1] *E. Čech:* Détermination du type différentiel d'une courbe de l'espace à deux, trois ou quatre dimensions; Czech. Math. Journal, *7* (*82*), 1957, 599—631.

[2] *E. Čech:* Sulla differenziabilità del triedro di Frenet; Ann. Mat. Pur. Appl., Ser. IV, t. *LXIX*, 1960, 91—96.

[3] *E. Čech:* Classe différentielle des courbes. Sections et projections; Revue Math. Pur. Appl., *II*, 1957, 151—159.

[4] *E. Čech:* Sur le type différentiel anallagmatique d'une courbe plane ou gauche; Coll. Math., 1958, 141—143.

[5] *E. Čech:* Classe différentielle des courbes. Cercles osculateurs et sphères osculatrices; Bull. Inst. Polit. Iassi, *V*(*IX*), 1959, 1—4.

[6] *A. Švec:* Sur la différentiabilité du repère de Winternitz d'une courbe; Czech. Math. Journal, *12* (*87*), 1962, 356—365.

[7] *A. Bílková:* Sur la différentiabilité du tétraèdre de Frenet dans l'espace E_4; Czech. Math. Journal, *13* (*88*), 1963, 507—532.

[8] *E. Kreyszig:* Differentialgeometrie; Leipzig, 1957.

Adresse de l'auteur: Vysoká škola zemědělská, Praha-Suchdol, ČSSR.