Miroslav Sova

Примитивность функций в линейных топологических пространствах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 4, 471–481

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100796

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Математический институт Чехословацкой Академии наук

Т. *17* (*92*) ПРАГА 20. XI. 1967 г., No 4

ПРИМИТИВНОСТЬ ФУНКЦИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

MIROSLAV SOVA (Мирослав Сова), Прага

(Поступило в редакцию 7/I 1963 г., переработаное 11/I 1966 г.)

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы будем заниматься обращением операции „дифференциал". Значит, мы будем искать условия для того, чтобы данная функция была дифференциалом какой-то другой функции, то есть чтобы она имела примитивную функцию. Условия интегрального типа общеизвестны, так что главное внимание будет уделено условиям в том случае, когда интегралы (по треугольнику) не встречаются. Для случая, когда исследуемая функция непрерывно дифференцируема, известно условие о замене частных производных. Это утверждение переносится при помощи аппроксимаций на совершенно общий случай. Важным следствием этих локальных условий является теорема о существовании примитивной функции произведения двух функций, имеющих примитивные функции.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА

1,1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1,1,1. Без каких бы то ни было пояснений пользуемся обозначениями и понятиями, введенными в [1], [2].

1,1,2. *Если $f \in \mathscr{C}(D, E)$ и $K_0, K_1, \ldots, K_k$ — компактные части E, то для любого $W \in \mathfrak{V}(E)$ существует $V \in \mathfrak{V}(D)$ так, что*

$$f(x_0 + x_1 + \ldots + x_k) - f(y_0 + y_1 + \ldots + y_k) \in W$$

при любых $x_i, y_i \in K_i$, $x_i - y_i \in V$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Доказательство провести нетрудно.

1,1,3. Лин. топ. пр. E назовем компактно полным, если каждая замкнутая прекомпатная часть E является компактной (т.е. полной).

1,1,4. *Если D — лин. топ. пр., δ — опорная система в D и E — компактно полное лин. топ. пр., то $\mathscr{C}_\delta(D, E)$ (и значит также $\mathscr{L}_\delta(D, E)$) является компактно полным лин. топ. пр.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K}$ — замкнутая, прекомпактная часть $\mathscr{C}_\delta(D, E)$. Из этого сразу видно, что множество $\mathfrak{K}(x) = \{f(x) : f \in \mathfrak{K}\}$ прекомпактно в E для каждого $x \in D$. Из условия компактной полноты вытекает, что $\overline{\mathfrak{K}(x)}$ также компактное множество.

Остается доказать, что $\mathfrak{K}$ полно в $\mathscr{C}_\delta(D, E)$. Пусть f_α — обобщенная основная (в смысле $\mathscr{C}_\delta(D, E)$) последовательность из $\mathfrak{K}$. Потому что последовательность $f_\alpha(x)$ и является основной (Коши) для каждого $x \in D$, то она также сходится. Если положим $f(x) = \lim\limits_\alpha f_\alpha(x)$, можем легко видеть, что $f \in \mathscr{C}(D, E)$ и $f_\alpha \to f$ в $\mathscr{C}_\delta(D, E)$. Из замкнутости $\mathfrak{K}$ получим $f \in \mathfrak{K}$.

1,1,5. В работе встретимся с интегралами функций, непрерывных на замкнутом единичном k-мерном кубе $Q_k = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \ldots \times \langle 0, 1\rangle$ со значениями в некотором компактно полном пространстве E. Определение и основные свойства, которые нам понадобятся, настолько подобны интегралу Римана действительных непрерывных функций, что их здесь приводить не будем. Отметим только общую форму теоремы о среднем значении, которая нам понадобится.

1,1,6. *Если E — компактно полоное лин. топ. пр. и f — непрерывная на кубе Q_k функция со значениями в E, то*

$$\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(t_1, t_2, \ldots, t_k)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_k =$$

$$= \overline{\mathrm{co}}\, \{f(t_1, t_2, \ldots, t_k) : 0 \leqq t_i \leqq 1,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

1,2. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

1,2,1. Пусть D — пр. Фр. и E — компактно полное лин. топ пр. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, h_1, h_2, \ldots, h_k \in D$ и $f \in \mathscr{C}(D, E)$ определим функцию $\mathrm{Z}^{(k)}(h_1, h_2, \ldots$ $\ldots, h_k, f) \in \mathscr{F}(D, E)$ следующим образом: для каждого $x \in D$ положим

$$\mathrm{Z}^{(k)}(h_1, h_2, \ldots, h_k, f)(\mathrm{x}) = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x + t_1 h_1 + t_2 h_2 + \ldots + t_k h_k)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_k$$

Так как функция $f(x + t_1h_1 + t_2h_2 + \ldots + t_kh_k)$ является по 1,1,2 очевидно непрерывной на единичном кубе Q_k, это определение оправдано.

1,2,2. *Для каждого* $x \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, $h_1, h_2, \ldots, h_k \in D$ *и* $f \in \mathscr{C}(D, E)$ *будет* $Z^{(k)}(h_1, h_2, \ldots, h_k, f)(x) \in \overline{\text{co}}\,\{f(y) : y \in D\}$.

Доказательство легко вытекает из 1, 1, 6.

1,2,3. *Для каждого* $k = 1, 2, \ldots$, $h_1, h_2, \ldots, h_k \in D$ *и* $f \in \mathscr{C}(D, E)$ *будет* $Z^{(k)}(h_1, h_2, \ldots, h_k, f) \in \mathscr{C}(D, E)$ *и* $Z^{(k)}(h_1/n, h_2/n, \ldots, h_k/n, f) \to f (n \to \infty)$ *в* $\mathscr{C}_\kappa(D, E)$.

Доказательство вытекает легко из 1,1,2 и 1,1,6 (для первого утверждения возьмем в качестве K_0 сходящуюся последовательность, для второго будет K_0 данным множеством из $\kappa(D)$ и $y_0 = x_0$).

1,2,4. *Для каждого* $k = 1, 2, \ldots$, $h_1, h_2, \ldots, h_k \in D$ *и* $f \in \mathscr{C}(D, E)$ *функция* $Z^{(k)}(h_1, h_2, \ldots, h_k, f)$ *является глобально дифференцируемой по* h_i, $i = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Очевидно, что утверждение достаточно доказать, например, для h_1. Обозначим для краткости $g = Z^{(k)}(h_1, h_2, \ldots, h_k, f)$ и $g_0 = f$, если $k = 1$, и $g_0 = Z^{(k-1)}(h_2, h_3, \ldots, h_k, f)$, если $k \geqq 2$. Тогда для $s > 0$ будет

$$s^{-1}(g(x + sh_1) - g(x)) =$$

$$s^{-1} \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 [f(x + (t_1 + s) h_1 + t_2h_2 + \ldots + t_kh_k) -$$

$$- f(x + t_1h_1 + t_2h_2 + \ldots + t_kh_k)] \, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k$$

$$s^{-1} \int_0^1 [g_0(x + (t_1 + s) h_1) - g(_0x + t_1h_1)] \, \mathrm{d}t_1 =$$

$$s^{-1} \left[\int_s^{1+s} g_0(x + t_1h_1) \, \mathrm{d}t_1 - \int_0^1 g(x + t_1h_1) \, \mathrm{d}t_1 \right] =$$

$$s^{-1} \int_1^{1+s} g_0(x + t_1h_1) \, \mathrm{d}t_1 - s^{-1} \int_0^s g(x + t_1h_1) \, \mathrm{d}t_1 \,,$$

что для $s \to 0_+$ сходится к $g_0(x + t_1) - g_0(x)$. Так как, согласно 1,2,3, $g_0 \in \mathscr{C}(D, E)$, утверждение теоремы этим доказано.

2. ПРИМИТИВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

2,1. ПОНЯТИЕ ПРИМИТИВНОСТИ ФУНКЦИЙ И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

2,1,1. Пусть D – пр. Фр., E – лин. топ. пр., δ – опорная система в D и $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$. Тогда мы скажем, что F является δ-примитивной[1] или что F имеет δ-примитивную функцую, если существует $f \in \mathscr{F}(D, E)$, которая глобально δ-дифференцируема и $\delta^*(f) = F$. Функцию f мы назовем δ-примитивной функцией к F.

2,1,2. *Если F_1, F_2 – δ-примитивны, то и $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ будет δ-примитивной.*

2,1,3. *Если f_1, f_2 – δ-примитивные функции к F, то $f_1 - f_2$ постоянна.*

2,1,4. *Пусть D – пр. Фр., E – лин. топ. пр., δ – опорная система в D. Если $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$, то F будет δ-примитивной тогда и только тогда, когда она κ-примитивна.*

Доказательство. 1) Если F – δ-примитивна, то она и κ-примитивна. 2) Пусть F – κ-примитивна и пусть, следовательно, существует $f \in \mathscr{F}(D, E)$ так, что $\kappa^*(f) = F$. Но в таком случае из $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$ вытекает по теореме 1,3,2 из [2], что $\delta^*(f) = F$.

2,1,5. (предельная теорема). *Пусть D – пр. Фр., E – лин. топ. пр., δ – опорная система в D. Пусть F_α – обобщенная последоватеьлность из $\mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$ и F – функция из $\mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$. Если F_α δ-примитивна и $F_\alpha \to F$ в $\mathscr{F}_\kappa(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$, то и F является δ-примитивной.*

Доказателство вытекает непосредственно из теоремы [1] 3,3,1.

2,2. ПРИМИТИВНОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

2,2,1. В настоящем разделе мы будем все время предполагать, что D – пр. Фр., δ – опорная система в D и E – компактно полное лин. топ. пр.

2,2,2. *Если $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$, то F является δ-примитивной тогда и только*

[1]) **Замечание.** В советской литературе (если в других странах, мне неизвестно) вместо „примитивный" употребляется слово „потенциальный", и примитивная функция называется потенциалом. Для высказывания это весьма удобное название, однако слово „потенциал" употребляется чаще для обозначения другого (или других) понятия. Поэтому мы им пользоваться не будем.

тогда, когда для каждого x, h, $g \in D$ выполнено следующее:

$$\int_0^1 F(x + th)(h)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F(x + tg)(g)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 F(x + h + t(g - h))(g - h)\,\mathrm{d}t = 0 .$$

Доказательство не будем проводить, оно в основном известно, см. [4] гл. II, 6.1.

2,2,3. *Пусть $h, g \in D$, $F \in \mathscr{F}(D, \mathscr{L}(D, E))$. Если функции $F(.)(h)$, $F(.)(g)$ непрерывно глобально дифференцируемы по h и g и если для каждого $x \in D$ и каждой линейной комбинации u, v элементов h, g будет*

[*]
$$\int_0^1 F(x + tu)(u)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F(x + tv)(v)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 F(x + u + t(v - u))(v - u)\,\mathrm{d}t = 0 ,$$

то для каждого $x \in D$ будет

$$\frac{\partial^*}{\partial h} F(x)(g) = \frac{\partial^*}{\partial g} F(x)(h) .$$

Доказательство. Обозначим через $P(h, g)$ множество всех неотрицательных линейных комбинаций элементов h, g. Для любых w, $z \in P(h, g)$ существует тогда $(\partial^*/\partial w)\,F(x)(z)$, как вытекает легко из предположения. Фиксируем $x \in D$ и для любых u, $v \in P(h, g)$ обозначим:

$$M(u, v) = \frac{\partial^*}{\partial u} F(x)(v) .$$

Из нашего условия еще вытекает, что M линейна по u (по v это разумеется само собой). Теперь нам надо доказать, что

$$M(g, h) = M(h, g) .$$

Пусть $x \in D$, a, $b \in P(h, g)$. Тогда

$$\int_0^1 F(x + ta)(a)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 F(x + a + tb)(b)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 F(x + tb)(b)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 F(x + b + ta)(a)\,\mathrm{d}t ,$$

так как по предположению [*] обе части равны $\int_0^1 F(x + t(a + b))(a + b)\,\mathrm{d}t$

Уравнение перепишем следующим образом:

$$\int_0^1 F(x + a + tb)(b)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F(x + tb)(b)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 (Fx + b + ta)(a)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F(x + ta)(a)\,\mathrm{d}t .$$

Пусть $\xi_n > 0$, $\xi_n \to 0 (n \to \infty)$; положим $\xi_n h = a$, $\xi_n g = b$ и получим

$$\int_0^1 F(x + \xi_n h + t\xi_n g)(\xi_n g)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F(x + t\xi_n g)(\xi_n g)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 F(x + \xi_n g + t\xi_n h)(\xi_n h)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F(x + t\xi_n h)(\xi_n h)\,\mathrm{d}t .$$

Преобразуем так:

[**] $$\xi_n^{-1} \int_0^1 [F(x + \xi_n h + t\xi_n g)(g) - F(x + t\xi_n g)(g)]\,\mathrm{d}t =$$
$$= \xi_n^{-1} \int_0^1 [F(x + \xi_n g + t\xi_n h)(h) - F(x + t\xi_n h)(h)]\,\mathrm{d}t .$$

Теперь достаточно доказать, что левая часть сходится к $M(h, g)$ и правая часть к $M(g, h)$. Рассмотрим левую часть. Выражения за знаком интеграла можем переписать следующим образом:

$$\xi_n^{-1}[F(x + \xi_n h + t\xi_n g)(g) - F(x)(g)] - \xi_n^{-1}[F(x + t\xi_n g)(g) - F(x)(g)] .$$

Эти выражения сходятся равномерно в $|t| \leqq 1$ к $M(h + tg, g)$ и к $-M(tg, g)$. Но $M(h + tg, g) - M(tg, g) = M(h, g)$. Отсюда легко вытекает, что

$$\xi_n^{-1} \left[\int_0^1 F(x + \xi_n h + t\xi_n g)(g)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F(x + t\xi_n g)(g)\,\mathrm{d}t\right] \to M(h, g) .$$

Совсем аналогично докажем, что правая часть уравнения [**] сходится к $M(g, h)$, и доказательство этим закончено.

2,2,4. *Пусть* $h, g \in D$. *Если* $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$ *и если для каждого* $x \in D$ *и любых* u, v, *которые являются линейными комбинациями элементов* h, g,

[*] $$\int_0^1 F(x + tu)(u)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F(x + tv)(v)\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \int_0^1 F(x + u + t(v - u))(v - u)\,\mathrm{d}t = 0$$

то для каждого $x \in D$ будет

$$\left[\frac{\partial^*}{\partial h} Z^{(2)}(h, g)(F)\right](x)(g) = \left[\frac{\partial^*}{\partial g} Z^{(2)}(h, g)(F)\right](x)(h).$$

Доказательство. Для краткости положим $G = Z^{(2)}(h, g)(F)$. Тогда согласно 1, 2, 9 будет $G(x) = \int_0^1(\int_0^1 F(x + \alpha h + \beta g)\,\mathrm{d}\alpha)\,\mathrm{d}\beta$ для $x \in D$. Если это выражение подставим в [*], получим для u, v, которые являются комбинациями h, g, следующее:

$$\int_0^1 G(x + tu)(u)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 G(x + tv)(v)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 G(x + u + t(v - u))(v - u)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Далее, из 1,2,4 вытекает, что G выполняет условия 2,2,3 и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial^*}{\partial h} G\right)(x)(g) = \left(\frac{\partial^*}{\partial g} G\right)(x)(h)$$

что требовалось доказать.

2,2,5. (главная теорема). *Если $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$ и F — δ-примитивна, то для любых $h, g \in D$ существует последовательность функций $F_n \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$ так, что*

(1) *$F_n \to F$ в $\mathscr{C}_\kappa(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$,*

(2) *для каждого $x \in D$ и $n = 1, 2, \ldots$ $F_n(x) \in \overline{\mathrm{co}}\,\{F(z) : z \in D\}$ причем замыкание в $\mathscr{L}_\kappa(D, E)$,*

(3) *функции F_n, $n = 1, 2, \ldots$ непрерывно глобально дифференцируемы по h и g относительно топологии $\mathscr{L}_\kappa(D, E)$,*

(4) $\left(\frac{\partial^*}{\partial h} F_n\right)(x)(g) = \left(\frac{\partial^*}{\partial g} F_n\right)(x)(h)$

для $x \in D$ и $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Положим $F_n = Z^{(2)}(h/n, g/n)(F)$ и утверждение нашей теоремы получим легко из 1,2,2–1,2,4, 2,2,2 и 2,2,4.

2,2,6. *Пусть $h, g \in D$. Если $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$, если функции $F(.)(h)$, $F(.)(g)$ непрерывно глобально дифференцируемы по h и g и если для каждого $x \in D$*

$$\left(\frac{\partial^*}{\partial h} F\right)(x)(g) = \left(\frac{\partial^*}{\partial g} F\right)(x)(h)$$

то для каждого $x \in D$ будет

$$\int_0^1 F(x + th)(h)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F(x + tg)(g)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 F(x + h + t(g - h)(g - h)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Доказательство также известно, см. [4], гл. II, 5.3.

2,2,7. *Если* $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, E))$ *и если для любых* $h, g \in D$ *существует последовательность функций* $F_n \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$ *так, что выполнены условия* (1), (3), (4) *из* 2,2,5, *то* F *является* δ*-примитивной.*

Доказательство легко вытекает из 2,2,6 и 2,2,2.

2,2,8. Пусть, далее, D – конечномерное пространство. Тогда, очевидно, все опорвные системы совпадают, и существует только один тип дифференцируемости и примитивности.

2,2,9. *Если* $F \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$ *примитивна, то существует последовательность функций* $F_n \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\kappa(D, E))$ *так, что*

(1), (2) *как в случае* 2,2,5,

(3) *функции* F_n *непрерывно глобально дифференцируемы,*

(4) $[(\partial^*/\partial h)\, F_n](x)\,(g) = [(\partial^*/\partial g)\, F_n](x)\,(h)$ *для любых* $x \in D$, $h, g \in D$, $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Выберем в D какой-нибудь базис $e_1, e_2, \ldots, e_q$ (q – размерность D) и положим $F_n = Z^{(q)}(e_1/n, e_2/n, \ldots, e_q/n)\,(F)$. Согласно 1,2,4 F_n является непрерывно глобально дифференцируемой по e_i, $i = 1, 2, \ldots, q$ и, значит, непрерывно глобально дифференцируемой. Остальные утверждения можно доказать одинаково, как в 2,2,5.

Замечание. Главная разница по сравнению с 2,2,5 заключается в том, что последовательность F_n не зависит от пар h, g.

2,3. ПРИМИТИВНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

2,3,1. *Пусть* S — *компактное топ. пр.,* D – *лин. пр. Фр.,* δ – *опорная система в* D. *Пусть, далее,* $\boldsymbol{L}$ – *компактное множество в* $\mathscr{L}_\delta(D, D)$ *и пусть для каждого* $L \in \boldsymbol{L}$ *выполнено* $L(\delta) \subseteq \delta$. *Если* $F_n \in \mathscr{C}(S, \mathscr{L}_\delta(D, D))$ *и* $F_n(x) \to 0$ *равномерно на* S *при топологии* $\mathscr{L}_\delta(D, D)$, *то* $F_n(x) \circ L \to 0$ *равномерно для* $x \in S$ *и* $L \in \boldsymbol{L}$.

Доказательство. Требуется доказать следующее: если $V \in \mathfrak{B}(D)$, $A \in \delta$ то для каждого $x \in S$, $h \in A$ и $L \in \boldsymbol{L}$ и $n \geqq n_0$ будет

$$(F_n(x) \circ L)\,(h) \in V.$$

Будем предполагать, что окрестность $V \in \mathfrak{B}(E)$ является симметричной и выпуклой. Операторы $F_n(x)$, $x \in S$, $n = 1, 2, \ldots$ равностепенно непрерывны. Это вытекает из теоремы о равностепенной непрерывности, потому что для каждого $h \in D$ множество $\{F_n(x)\,(h) : x \in S,\ n = 1, 2, \ldots\}$ ограничено. Значит, мы можем найти такое $W \in \mathfrak{B}(D)$, что для каждого $x \in S$ и для каждого n будет

$$F_n(x)(W) \subseteq \tfrac{1}{2}V.$$

Теперь рассмотрим $\boldsymbol{L}$. Из компактности $\boldsymbol{L}$ в $\mathscr{L}_\delta(D, D)$ вытекает, что существует конечное число $L_i \in \boldsymbol{L}$ таких, что к любому $L \in \boldsymbol{L}$ можно найти $1 \leqq i \leqq n$, для которого имеет место соотношение:

$$(L_i - L)(A) \subseteq W,$$

следовательно, $L(A) \subseteq L_i(A) + W$. По предположению $L_i(A) \in \delta$. Значит, существует n_0 так, что для $n \geqq n_0$ и для каждого $x \in S$ будет: $(F_n(x) \circ L)(A) \subseteq \frac{1}{2}V$. Для любого $L \in \boldsymbol{L}$ будет при $n \geqq n_0$, $x \in S$

$$(F_n(x) \circ L)(A) \subseteq (F_n(x) \circ L_i)(A) + F_n(x)(W) \subseteq \tfrac{1}{2}V + \tfrac{1}{2}V \subseteq V,$$

чем доказательство закончено.

2,3,2. (примитивность произведений). *Пусть D — пр. Фр., δ — опорная система в D, $F^{(1)}, F^{(2)}$ — δ-примитивные функции в $\mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, D))$. Если*

(1) *$F^{(1)}, F^{(2)}$ взаимно коммутативны, т.е. для любых $x, y \in D$ выполнено $F^{(1)}(x) \circ F^{(2)}(y) = F^{(2)}(y) \circ F^{(1)}(x)$,*

(2) *для каждого $x \in D$, $A \in \delta$ находится как $F^{(1)}(x)(A)$ так и $F^{(2)}(x)(A)$ опять в δ,*

то $F(x) = F^{(1)}(x) \circ F^{(2)}(x) \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, D))$ и является δ-примитивной.

Доказательство. Обозначим через $\Sigma(F)$ замкнутую выпуклую оболочку в $\mathscr{L}_\delta(D, D)$ множества $\{F(x) : x \in D\}$. Обе функции $F^{(1)}, F^{(2)}$ δ-примитивны и, следовательно, по теореме 2,2,5 существуют для любых $h, g \in D$ две последовательности $F_n^{(1)}, F_n^{(2)}$, обладающие следующими свойствами:

(a) $F_n^{(1)} \to F^{(1)}$, $F_n^{(2)} \to F^{(2)}$ при топологии $\mathscr{C}_\kappa(D, \mathscr{L}_\kappa(D, D))$,

(b) $F_n^{(1)}(x) \in \Sigma(F^{(1)})$, $F_n^{(2)}(x) \in \Sigma(F^{(2)})$ для каждого $x \in D$,

(c) $F_n^{(1)}, F_n^{(2)}$ непрерывно глобально дифференцируемы по h, g,

(d) $\left(\dfrac{\partial^*}{\partial h} F_n^{(i)}\right)(x)(g) = \left(\dfrac{\partial^*}{\partial g} F_n^{(i)}\right)(x)(h) \quad (i = 1, 2)$

для каждого $x \in D$, $n = 1, 2, \ldots$

Из предположения (1) легко вытекает

(e) $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$ для $L_1 \in \Sigma(F^{(1)})$, $L_2 \in \Sigma(F^{(2)})$, в частности, если воспользоваться свойством (b), получаем

$$F_n^{(1)}(x) \circ F_n^{(2)}(y) = F_n^{(2)}(y) \circ F_n^{(1)}(x) \quad \text{для} \quad x, y \in D, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теперь докажем, что функции $F_n^{(1)} \circ F_n^{(2)}$ имеют непрерывные производные по h, g. Пусть $t_k > 0$, $t_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Тогда

$$\frac{\partial^*}{\partial h}(F_n^{(1)} \circ F_n^{(2)})(x) = \lim_{k\to\infty} t_k^{-1}[F_n^{(1)}(x + t_k h) \circ F^{(2)}(x + t_k h) - F_n^{(1)}(x) \circ F_n^{(2)}(x)] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} t_k^{-1}[F_n^{(1)}(x + t_k h) \circ (F_n^{(2)}(x + t_k h) - F_n^{(2)}(x)) +$$

$$+ (F_n^{(1)}(x + t_k h) - F_n^{(1)}(x)) \circ F_n^{(2)}(x)] =$$

$$= F_n^{(1)}(x) \circ \left(\frac{\partial^*}{\partial h} F_n^{(2)}\right)(x) + \left(\frac{\partial^*}{\partial h} F_n^{(1)}\right)(x) \circ F_n^{(2)}(x)$$

(Пределы разумеются в $\mathscr{L}_\kappa(D, D)$ – сравни [2], 1,2,2) Аналогично для g. Далее из доказанных выше свойств легко вытекает дозволенность замены дифференцирования по h, g:

$$\frac{\partial^*}{\partial h}(F_n^{(1)} \circ F_n^{(2)})(x)(g) = \left[F_n^{(1)}(x) \circ \left(\frac{\partial^*}{\partial h} F_n^{(2)}\right)(x)\right](g) + \left[F_n^{(2)}(x) \circ \left(\frac{\partial^*}{\partial h} F_n^{(1)}\right)(x)\right](g) =$$

$$= \left[F_n^{(1)}(x) \circ \left(\frac{\partial^*}{\partial g} F_n^{(2)}\right)(x)\right](h) + \left[F_n^{(2)}(x) \circ \left(\frac{\partial^*}{\partial g} F_n^{(1)}\right)(x)\right](h) =$$

$$= \frac{\partial^*}{\partial g}(F_n^{(1)} \circ F_n^{(2)})(x)(h).$$

Остается уже только последний шаг:

$F_n^{(1)}(x) \circ F_n^{(2)}(x) \to F^{(1)}(x) \circ F^{(2)}(x)$ в пространстве $\mathscr{C}_\kappa(D, \mathscr{L}_\kappa(D, D))$ т.е. равномерно на компактных множествах в D при топологии $\mathscr{L}_\kappa(D, D)$. Имеем

$$F_n^{(1)}(x) \circ F_n^{(2)}(x) - F^{(1)}(x) \circ F^{(2)}(x) =$$

$$= [F_n^{(1)}(x) - F^{(1)}(x)] \circ F_n^{(2)}(x) + F^{(1)}(x) \circ [F_n^{(2)}(x) - F^{(2)}(x)] =$$

$$= [F_n^{(1)}(x) - F^{(1)}(x)] \circ F_n^{(2)}(x) + [F_n^{(2)}(x) - F^{(2)}(x)] \circ F^{(1)}(x)$$

вследствие коммутативности по (е). Пусть теперь K – компактное множество в D. Тогда, очевидно, $\{F^{(1)}(x) : x \in K\}$ компактно в $\mathscr{L}_\delta(D, D)$ и ко второму члену можем применить теорему 2,3,1. Чтобы мы могли применить ее и к первому члену, надо доказать, что $\{F_n^{(2)}(x) : x \in K,\ n = 1, 2, \ldots\}$ компактно в $\mathscr{L}_\delta(D, D)$. Это легко вытекает из того обстоятельства, что $F_n^{(2)}(x) \to F^{(2)}(x)$ равномерно на K в $\mathscr{L}_\delta(D, D)$.

Еще надо доказать, что функций $F^{(1)}(x) \circ F^{(2)}(x)$ и $F_n^{(1)}(x) \circ F_n^{(2)}(x)$ принадлежат $\mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, D))$. Это опять-таки легко при помощи теоремы 2,3,1.

2,3,3. (примитивность степеней). *Пусть D – пр. Фр., δ – опорная система в D и F — δ-примитивная функция из $\mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, D))$. Если*

(1) *F коммутативна, т.е. для $x, y \in D$ выполнено $F(x) \circ F(y) = F(y) \circ F(x)$,*

(2) *для каждого $x \in D$, $A \in \delta$ будет и $F(x)(A)$ тоже в δ,*

то функция $G(x) = (F(x))^n \in \mathscr{C}(D, \mathscr{L}_\delta(D, D))$ и она тоже является δ-примитивной для любого $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство методом индукции. Положим $F^{(1)}(x) = F(x)$ и $F^{(2)}(x) = (F(x))^n$. Тогда $(F(x))^{n+1} = F^{(1)}(x) \circ F^{(2)}(x)$ и достаточно проверить, что выполнены условия предыдущей теоремы, что совсем нетрудно.

Литература

[1] *M. Sova:* Общая теория дифференцируемости в линейных топологических пространствах. Чех. мат. ж. *14* (*89*) 1964, 485—508.

[2] *M. Sova:* Условия дифференцируемости в линейных топологических пространствах. Чех. мат ж. *16* (*91*) 1966, 339—362.

[3] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов:* Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва 1959.

[4] *М. М. Вайнберг:* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Москва 1956.

Адрес автора: Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).