Leo Boček

Globaldifferentialgeometrie der Untermannigfaltigkeiten in E_n und S_n

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 1, 36–44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100758

Czechoslovak Mathematical Journal, 17 (92) 1967, Praha

GLOBALDIFFERENTIALGEOMETRIE DER UNTERMANNIGFALTIGKEITEN IN E_n UND S_n

LEO BOČEK, Praha

(Eingegangen am 23. Oktober 1965)

Es sei M eine n-dimensionale reelle differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Metrik $\langle X, Y\rangle$. Den Operator der absoluten Differentiation der Riemannschen Übertragung bezeichnen wir mit ∇. Für die differenzierbaren Vektorfelder X, Y, Z auf M gilt dann

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle\,, \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

und $\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = R(X, Y, Z)$ ist der Krümmungstensor der Riemannschen Übertragung ($[X, Y]$ bezeichnet die sog. Poisson-Klammer).

Es sei weiter Ω eine r-dimensionale reelle differenzierbare Mannigfaltigkeit und φ eine differenzierbare Abbildung von Ω in M, das Differential der Abbildung φ bezeichnen wir φ'. Wir werden immer voraussetzen, dass φ regulär ist, d.h. $\dim \varphi'(T_u(\Omega)) = r$ für alle $u \in \Omega$. Daraus folgt unmittelbar, dass die Abbildung φ lokal eineindeutig ist. $V = \varphi(\Omega)$ braucht keine differenzierbare Mannigfaltigkeit zu sein und wenn wir auch in späteren lokalen Betrachtungen $\varphi(\Omega)$ als eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit ansehen werden, werden wir damit eigentlich die Mannigfaltigkeit $\varphi(U)$ verstehen, wo U so gewählt ist, dass φ auf U umkehrbar eindeutig ist.

Der lineare Unterraum ${}^1O_{\varphi(u)} = \varphi'(T_u(\Omega)) \subset T_{\varphi(u)}(M)$ heisst der Tangentialraum oder auch Oskulationsraum erster Ordnung der Mannigfaltigkeit V im Punkte $\varphi(u)$. Wenn X ein differenzierbares Vektorfeld auf Ω ist und $Y \in T_u(\Omega)$, kann der Vektor $\nabla_{\varphi'(Y)}\varphi'(X)$ eindeutig als eine Summe, bestehend aus dem Vektor $\psi_1(X, Y) \in {}^1O_{\varphi(u)}$ und dem zu ${}^1O_{\varphi(u)}$ orthogonalen Vektor $\varphi_2(X, Y)$ dargestellt werden. Den linearen Raum, der durch alle Vektoren $\varphi_2(X, Y)$ gebildet ist, wo X ein differenzierbares Vektorfeld auf Ω ist und $Y \in T_u(\Omega)$, bezeichnen wir mit ${}^2O_{\varphi(u)}$ und den Raum ${}^1O_{\varphi(u)} \oplus {}^2O_{\varphi(u)}$ nennen wir den Oskulationsraum zweiter Ordnung der Mannigfaltigkeit V im Punkte $\varphi(u)$. Für zwei differenzierbare Vektorfelder X, Y auf Ω sind auch die Abbildungen $u \to \psi_1(X, Y)$, $u \to \varphi_2(X, Y)$ differenzierbar. Wenn wir diese Betrachtungen fortsetzen, bekommen wir unter der Bedingung dim ${}^kO_{\varphi(u)} =$ $=$ const. für differenzierbaren Vektorfelder $X_1, X_2, \ldots$ auf Ω und $Y \in T_u(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
&\text{(1)} \qquad \varphi' Y = \varphi_1(Y)\,,\\
&\nabla_{\varphi' Y}\varphi_1(X_1) = \psi_1(X_1, Y) + \varphi_2(X_1, Y)\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\nabla_{\varphi' Y}\varphi_k(X_1, \ldots, X_k) = \psi_k(X_1, \ldots, X_k, Y) + \varphi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Y)\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

wo $\varphi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Y) \in {}^{k+1}O_{\varphi(u)}$, $\psi_k(X_1, \ldots, X_k, Y) \in \bigoplus_{i=1}^{k} {}^iO_{\varphi(u)}$. ${}^kO_{\varphi(u)}$ und ${}^lO_{\varphi(u)}$ sind für $k \neq l$ orthogonal und der Raum $\bigoplus_{i=1}^{k} {}^iO_{\varphi(u)}$ heisst Oskulationsraum k-ter Ordnung der Mannigfaltigkeit V im Punkte $\varphi(u)$. Sind $Y_1, Y_2, \ldots$ auch differenzierbare Vektorfelder auf Ω und $l \leqq k - 2$, dann ist auf V identisch $\langle \varphi_k(X_1, \ldots, X_k), \varphi_l(Y_1, \ldots, Y_l)\rangle = 0$, woraus wegen (1) unmittelbar $\langle \psi_k(X_1, \ldots, X_k, Y), \varphi_l(Y_1, \ldots, \ldots, Y_l)\rangle = 0$ folgt und deshalb $\psi_k(X_1, \ldots, Y) \in {}^{k-1}O_{\varphi(u)} \oplus {}^kO_{\varphi(u)}$ ist. Verwenden wir auf die Gleichungen (1) den Operator ∇, bekommen wir

$$
\begin{aligned}
&\text{(2)} \qquad \langle \psi_1(X, Y) - \psi_1(Y, X), \varphi_1(Z)\rangle = \langle \varphi_1([Y, X]), \varphi_1(Z)\rangle\,,\\
&\langle \varphi_2(X, Y) - \varphi_2(Y, X), \varphi_2(Z_1, Z_2)\rangle = 0\,,\\
&\langle \nabla_{\varphi' Z}\psi_{k+2}(X_1, \ldots, X_{k+2}, Y) - \nabla_{\varphi' Y}\psi_{k+2}(X_1, \ldots, X_{k+2}, Z), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle =\\
&= \langle R(\varphi' Z, \varphi' Y, \varphi_{k+2}(X_1, \ldots, X_{k+2})), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle\,,\\
&\langle \nabla_{\varphi' Z}\psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}, Y) - \nabla_{\varphi' Y}\psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}, Z), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle =\\
&= \langle \psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}, [Z, Y]) + R(\varphi' Z, \varphi' Y, \varphi_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1})), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle,\\
&\langle \nabla_{\varphi' Z}\psi_k(X_1, \ldots, X_k, Y) - \nabla_{\varphi' Y}\psi_k(X_1, \ldots, X_k, Z), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle +\\
&+ \langle \psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Y, Z) - \psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Z, Y), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle =\\
&= \langle \psi_k(X_1, \ldots, X_k, [Z, Y]) + R(\varphi' Z, \varphi' Y, \varphi_k(X_1, \ldots, X_k)), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle\,,\\
&\langle \psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Y, Z) - \psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Z, Y), \varphi_{k+1}(Y_1, \ldots, Y_{k+1})\rangle +\\
&+ \langle \nabla_{\varphi' Z}\psi_k(X_1, \ldots, X_k, Y) - \nabla_{\varphi' Y}\psi_k(X_1, \ldots, X_k, Z), \varphi_{k+1}(Y_1, \ldots, Y_{k+1})\rangle =\\
&= \langle \varphi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, [Z, Y]) + R(\varphi' Z, \varphi' Y, \varphi_k(X_1, \ldots, X_k)), \varphi_{k+1}(Y_1, \ldots, Y_{k+1})\rangle\,,\\
&\langle \varphi_{k+2}(X_1, \ldots, X_k, Y, Z) - \varphi_{k+2}(X_1, \ldots, X_k, Z, Y), \varphi_{k+2}(Y_1, \ldots, Y_{k+2})\rangle =\\
&= \langle R(\varphi' Z, \varphi' Y, \varphi_k(X_1, \ldots, X_k)), \varphi_{k+2}(Y_1, \ldots, Y_{k+2})\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Aus der zweiten und der letzten Gleichung ersieht man, dass die Werte $\varphi_k(X_1, \ldots, X_k)$

im Punkte $u \in \Omega$ nur von den Werten der Vektorfelder in diesem Punkt abhängen. Für alle k und für jeden Punkt $u \in \Omega$ ist also φ_k eine multilineare Abbildung von $T_u(\Omega)$ auf ${}^kO_{\varphi(u)}$.

Definition. Die $2k$-lineare Form

$$(3) \qquad h_k(X_1, \ldots, X_k; Y_1, \ldots, Y_k) = \langle \varphi_k(X_1, \ldots, X_k), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k) \rangle$$

heisst der k-te metrische Tensor der Abbildung φ resp. der Mannigfaltigkeit $V = \varphi(\Omega)$. Der Rang des k-ten metrischen Tensors ist im Punkte $u \in \Omega$ gleich der Dimension des Raumes ${}^kO_{\varphi(u)}$.

Satz 1. *Ist M der euklidische Raum E_n und C eine Kurve auf Ω mit dem Tangentenvektor X im Punkte $u \in \Omega$ und besitzt die Kurve $\varphi(C) \subset V$ im Punkte $\varphi(u)$ die Krümmungen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots,$ dann ist*

$$(\varkappa_1 \,.\, \varkappa_2 \ldots \varkappa_k \sin \alpha)^2 = \frac{h_{k+1}(X, X, \ldots, X; X, \ldots, X)}{[h_1(X; X)]^{k+1}}$$

wo α den Winkel zwischen der k-ten Normale der Kurve $\varphi(C)$ und dem Oskulationsraum der k-ten Ordnung der Mannigfaltigkeit V im Punkte $\varphi(u)$ bezeichnet.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von MEUSNIER und auch der Beweis ist ganz analog. Der Satz zeigt die geometrische Bedeutung der Tensoren h_i.

Die Übertragung ∇ definiert auf dem Tangentialbündel $\mathcal{T}(M)$ mit der Projektion π_M eine n-dimensionale Distribution $H : X \to H_X$ so, dass $T_X(\mathcal{T}(M)) = V_X \oplus H_X$ für alle $X \in \mathcal{T}(M)$ gilt, wo V_X der sog. Vertikalraum ist, der durch alle Tangentenvektoren der zugehörigen Faser gebildet ist, H_X nennt man den Horizontalraum des Tangentialbündels im Punkte X. Es gilt $\pi'_M(H_X) = T_{\pi_M(X)}(M)$, $\pi'_M(V_X) = 0$. Jeder Vektor $W \in T_X(\mathcal{T}(M))$ kann eindeutig in der Summe $W_v + W_h$ dargestellt werden, $W_v \in V_X$, $W_h \in H_X$. W_v resp. W_h heisst die Vertikal-, resp. Horizontalkomponente des Vektors W. Jedem Vertikalvektor $W \in V_X$ kann man eindeutig durch eine Abbildung ι einen Vektor $\iota W \in T_{\pi_M(X)}(M)$ zuordnen, der durch die folgende Bedingung definiert ist: $(\iota W) f = WF$ für jede differenzierbare Funktion f auf M und F auf $\mathcal{T}(M)$, die wieder durch die Gleichung $F(Y) = Yf$ gegeben ist. Die partielle Abbidlung ι / V_X ist ein Isomorfismus. Wir bezeichnen noch $vW = \iota W_v$, $hW = \pi'_M W$. Es gilt dann das

Lemma 1. *Der Vektor $W \in \mathcal{T}(\mathcal{T}(M))$ ist eindeutig durch die Vektoren vW, hW* und *$\pi_{\mathcal{T}(M)} W$ gegeben.*

Bemerkung. *Führen wir auf $\mathcal{T}(M)$ die Riemannsche Metrik $\langle W_1, W_2 \rangle_{\mathcal{T}(M)}$ so ein, dass $\langle W_1, W_2 \rangle_{\mathcal{T}(M)} = \langle vW_1, vW_2 \rangle + \langle hW_1, hW_2 \rangle$ ist, wir bekommen die Metrik, die* S. SASAKI *in* [3] *betrachtet.*

In Lokalkoordinaten kann man leicht folgende Behauptungen beweisen.

Satz 2. *Es sei B eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ω eine differenzierbare Abbildung von B in $\mathcal{T}(M)$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\omega"] & \mathcal{T}(M) \arrow[rr, "\pi_M"] & & M \\
& & \mathcal{T}(M) \arrow[ur, "\pi_M"] & \\
\mathcal{T}(B) \arrow[uu, "\pi_B"] \arrow[r, "\omega'"] & \mathcal{T}(\mathcal{T}(M)) \arrow[uu, "\pi_{\mathcal{T}(M)}"] \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "v"'] & & \mathcal{T}(M) \arrow[uu, "\pi_M"']
\end{tikzcd}
$$

Satz 3. *Wenn die Abbildung $\varphi = \pi_M \circ \omega$ lokal eineindeutig ist, gilt*

$$(v \circ \omega')\, D = \nabla_{\varphi' D}\,\omega \,.$$

Wenn ω_1, ω_2 zwei differenzierbare Abbildungen von B in $\mathcal{T}(M)$ sind, die die Bedingung $\pi_M \circ \omega_1 = \pi_M \circ \omega_2$ erfüllen und wenn $D \in T_u(B)$ ist, dann gilt

$$D\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \langle v \circ \omega_1' D, \omega_2(u) \rangle + \langle \omega_1(u), v \circ \omega_2' D \rangle \tag{4}$$

$$h \circ (\omega_1 + \omega_2)' = h \circ \omega_1' = h \circ \omega_2' , \quad v \circ (\omega_1 + \omega_2)' = v \circ \omega_1' + v \circ \omega_2' \,. \tag{5}$$

Setzen wir noch voraus, dass λ eine differenzierbare Funktion auf B ist. Wir können dann zu der Abbildung ω die Abbildung $\lambda\omega$ durch $(\lambda\omega)(b) = \lambda(b) \,.\, \omega(b)$ definieren und für diese erwähnen wir noch die Formel

$$[v \circ (\lambda\omega)']\, D = \lambda(\pi_B D) \,.\, (v \circ \omega')\, D + (D\lambda) \,.\, \omega(\pi_B D) \,. \tag{6}$$

Wenn D ein differenzierbares Vektorfeld auf B ist, sind $h \circ \omega' D$, $v \circ \omega' D$ wieder differenzierbare Abbildungen von B in $\mathcal{T}(M)$ und für ein weiteres differenzierbares Vektorfeld C gilt dann

$$
\begin{aligned}
&v \circ (h \circ \omega' D)'\, C - v \circ (h \circ \omega' C)'\, D = h \circ \omega' [C, D] \\
&v \circ (v \circ \omega' D)'\, C - v \circ (v \circ \omega' C)'\, D = v \circ \omega' [C, D] + R(h \circ \omega' C, h \circ \omega' D, \omega(\pi_B C))
\end{aligned} \tag{7}
$$

Die Beweise der letzten Formeln bekommt man wieder durch direkte Berechnung in Lokalkoordinaten.

Es sei $\mathcal{S}$ ein Faserbündel über Ω mit der Projektion π_Ω, dessen Faser $\pi_\Omega^{-1}(u) = S(u)$ Vektorräume der Dimension m sind. $\mathcal{B}$ soll jetzt die Menge aller Linearabbildungen der Räumen $S(u)$ in $T_x(M)$ bezeichnen. Auf $\mathcal{B}$ kann man wieder die Struktur eines Vektorraumbündels mit dem Basisraum $\Omega \times M$ und mit der kanonischen Projektion $v = v_\Omega \times v_M$ einführen dessen typische Faser der Vektorraum G_{mn} aller Matrizen des Types (m, n) ist. Die Strukturgruppe ist die Gruppe $GL(m, R) \times GL(n, R)$, die auf G_{mn} links nach der Regel

$$(A_1, A_2) \in GL(m, R) \times GL(n, R),\ G \in G_{mn} \Rightarrow (A_1, A_2)\, G = A_1 G A_2^{-1}$$

wirkt. Jeder Schnitt s des Faserbündels $\mathscr{S}$ (eine differenzierbare Abbildung $s : \Omega \to \mathscr{S}$ heisst ein Schnitt, wenn sie der Bedingung $\pi_\Omega \circ s = \mathrm{id}_\Omega$ genügt) induziert die differenzierbare Abbildung ω_s, $\omega_s(\Phi_{ux}) = \Phi_{ux}(s(u))$ der Mannigfaltigkeit $\mathscr{B}$ in $\mathscr{T}(M)$.

Wenn D ein Tangentenvektor des Faserbündels $\mathscr{B}$ im Punkte Φ_{ux} ist, dann sind durch D die Vektoren $v'_\Omega D \in T_u(\Omega)$, $v'_M D \in T_x(M)$ und für jeden Schnitt s auch $(v \circ \omega'_s)\, D \in T_x(M)$ gegeben. Es gilt aber auch umgekehrt das folgende Lemma, das wir wieder wegen der Einfachheit ohne Beweis erwähnen.

Lemma 2. *Es seien $X \in T_u(\Omega)$, $Y \in T_x(M)$ und $Z_s \in T_x(M)$ für jeden Schnitt s auf $\mathscr{S}$ so gegeben, dass*

$$Z_{s_1+s_2} = Z_{s_1} + Z_{s_2}\,, \quad Z_{\lambda s} = \lambda(u)\, Z_s + (X\lambda)\,.\,\Phi_{ux}(s(u))$$

gilt. Dann existiert genau ein Vektor $D \in T_{\Phi_{ux}}(\mathscr{B})$, für den $v'_\Omega D = X$, $v'_M D = Y$ und $(v \circ \omega'_s)\, D = Z_s$ ist.

Weiter beschränken wir uns auf den Fall, dass M der euklidische Raum E_n oder die n-dimensionale Sphäre S_n ist. Es ist dann $R(X, Y, Z) = \varepsilon[\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y]$, $\varepsilon = 0$ für E_n, $\varepsilon = \varrho^{-2}$ für S_n, wo ϱ den Radius bezeichnet. Die Formeln (2) haben dann die Gestalt

$$\text{(8)}\qquad \langle \psi_1(X, Y) - \psi_1(Y, X), \varphi_1(Z)\rangle = \langle \varphi_1([Y, X]), \varphi_1(Z)\rangle\,,$$

$$\langle \nabla_{\varphi' Z}\psi_{k+2}(X_1, \ldots, X_{k+2}, Y) - \nabla_{\varphi' Y}\psi_{k+2}(X_1, \ldots, X_{k+2}, Z), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle = 0\,,$$

$$\langle \nabla_{\varphi' Z}\psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}, Y) - \nabla_{\varphi' Y}\psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}, Z), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle =$$
$$= \langle \psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, [Z, Y]), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle\,,$$

$$\langle \nabla_{\varphi' Z}\psi_1(X, Y) - \nabla_{\varphi' Y}\psi_1(X, Z) + \psi_2(X, Y, Z) - \psi_2(X, Z, Y) -$$
$$- \psi_1(X, [Z, Y]), \varphi_1(U)\rangle =$$
$$= \varepsilon[\langle \varphi_1(X), \varphi_1(Y)\rangle \langle \varphi_1(Z), \varphi_1(U)\rangle - \langle \varphi_1(X), \varphi_1(Z)\rangle \langle \varphi_1(Y), \varphi_1(U)\rangle]\,,$$

$$\langle \nabla_{\varphi' Z}\psi_k(X_1, \ldots, X_k, Y) - \nabla_{\varphi' Y}\psi_k(X_1, \ldots, X_k, Z) + \psi_{k+1}(X_1, \ldots, Y, Z) -$$
$$- \psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Z, Y), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle =$$
$$= \langle \psi_k(X_1, \ldots, X_k, [Z, Y]), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k)\rangle\,,$$

$$\langle \psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Y, Z) - \psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Z, Y), \varphi_{k+1}(Y_1, \ldots, Y_{k+1})\rangle +$$
$$+ \langle \nabla_{\varphi' Z}\psi_k(X_1, \ldots, X_k, Y) - \nabla_{\varphi' Y}\psi_k(X_1, \ldots, X_k, Z), \varphi_{k+1}(Y_1, \ldots, Y_{k+1})\rangle =$$
$$= \langle \varphi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, [Z, Y]), \varphi_{k+1}(Y_1, \ldots, Y_{k+1})\rangle$$

$$\varphi_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k-1}, Y, Z) = \varphi_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k-1}, Z, Y)\,.$$

Aus der letzten Gleichung folgt schrittweise für $k = 1, 2, \ldots$ dass die Abbildungen φ_k in allen Argumenten und die Abbildungen ψ_k in den ersten k Argumenten symmetrisch sind und deshalb auch der k-te metrische Tensor h_k in der ersten und auch zweiten Gruppe der Argumenten symmetrisch ist. Wegen $\langle \varphi_k(X_1, \ldots, X_k), \varphi_{k-1}(Y_1, \ldots, \ldots, Y_{k-1}) \rangle = 0$ gilt auch

$$(9) \quad \langle \psi_k(X_1, \ldots, X_k, Z), \varphi_{k-1}(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) \rangle = -h_k(X_1, \ldots, X_k; Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Z)$$

und aus der Bedingung $\langle \psi_k(X_1, \ldots, X_k, Z), \varphi_{k-2}(Y_1, \ldots, Y_{k-2}) \rangle = 0$ bekommen wir

$$\langle \nabla_{\varphi' Y} \psi_k(X_1, \ldots, X_k, Z), \varphi_{k-2}(Y_1, \ldots, Y_{k-2}) \rangle = h_k(X_1, \ldots, X_k; Y_1, \ldots, Y_{k-2}, Y, Z),$$

woraus wieder die Äquivalenz $(8)_2$ und $(8)_7$ folgt. Wenden wir auf die Funktion $h_1(X; Y)$ den Vektor Z an (X, Y zwei differenzierbare Vektorfelder), bekommen wir

$$Zh_1(X; Y) = \langle \psi_1(X, Z), \varphi_1(Y) \rangle + \langle \varphi_1(X), \psi_1(Y, Z) \rangle .$$

Daraus durch zyklische Umtauschung unter Benutzung von $(8)_1$ erhalten wir, wenn Z auch ein differenzierbares Vektorfeld ist,

$$(10) \quad 2\langle \psi_1(X, Z), \varphi_1(Y) \rangle = Xh_1(Y, Z) + Zh_1(X, Y) - Yh_1(X, Z) + \\ + h_1(X, [Y, Z]) + h_1(Z, [Y, X]) - h_1(Y, [X, Z]) .$$

Wir haben also die Funktion $g_1(X, Y, Z) = \langle \psi_1(X, Y), \varphi_1(Z) \rangle$ durch den ersten metrischen Tensor h_1 ausgedrückt. Setzen wir voraus, dass wir schon die Funktion $g_k(X_1, \ldots, X_k, Z, Y_1, \ldots, Y_k) = \langle \psi_k(X_1, \ldots, X_k, Z), \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k) \rangle$ durch die ersten k metrischen Tensoren $h_1, \ldots, h_k$ ausgedrückt haben. Wegen (9) können wir dann auch die Funktionen $f_k(X_1, \ldots, X_k, Y, Z; Y_1, \ldots, Y_k, U) = \langle \psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Y, Z), \psi_k(Y_1, \ldots, Y_k, U) \rangle$ durch die metrischen Tensoren $h_1, h_2, \ldots, h_{k+1}$ berechnen. Aus $\langle \psi_k(X_1, \ldots, X_k, Y), \varphi_{k+1}(Y_1, \ldots, Y_{k+1}) \rangle = 0$ folgt dann $\langle \nabla_{\varphi' Z} \psi_k(X_1, \ldots, X_k, Y), \varphi_{k+1}(Y_1, \ldots, Y_{k+1}) \rangle = -f_k(Y_1, \ldots, Y_{k+1}, Z; X_1, \ldots, X_k, Y)$. Weiterhin folgt aus (3) und $(8)_6$

$$(11) \quad 2g_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}, Z; Y_1, \ldots, Y_{k+1}) = Zh_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}; Y_1, \ldots, Y_{k+1}) + \\ + \sum_{i=1}^{k+1} X_i h_{k+1}(X_{i+1}, \ldots, X_{k+1}, Y_1, \ldots, Y_i; Y_{i+1}, \ldots, Y_{k+1}, Z, X_1, \ldots, X_{i-1}) - \\ - \sum_{i=1}^{k+1} Y_i h_{k+1}(Y_{i+1}, \ldots, Y_{k+1}, Z, X_1, \ldots, X_{i-1}; X_i, \ldots, X_{k+1}, Y_1, \ldots, Y_{i-1}) + A ,$$

wo A eine Summe von Werten der Funktionen h_i und f_i bedeutet. Die Funktionen g_{k+1} sind also, wenn sie der Gleichung

$$(12) \quad g_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}, Z; Y_1, \ldots, Y_{k+1}) + \\ + g_{k+1}(Y_1, \ldots, Y_{k+1}, Z; X_1, \ldots, X_{k+1}) = Zh_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}; Y_1, \ldots, Y_{k+1})$$

und gleichzeitig $(8)_6$ genügen sollen, eindeutig durch die metrischen Tensoren bestimmt. Aus (8)—(10) ergibt sich, dass die Vektoren ψ_k für jeden Punkt $u \in \Omega$ eindeutig durch die Abbildungen φ_i in diesem Punkt und durch die Werte der Tensoren h_i in der Umgebung dieses Punktes gegeben sind. Wir können also durch die metrischen Tensoren auch die Werte

$$\langle \psi_k(X_1, \ldots, X_{k+1}), \psi_k(Y_1, \ldots, Y_{k+1}) \rangle = d_k(X_1, \ldots, X_{k+1}, Y_1, \ldots, Y_{k+1})$$

ausdrücken. Ein mechanischer Kalkül zeigt, dass man die Gleichungen $(8)_4$, $(8)_6$ und $(8)_5$ in der Form

$$\begin{aligned} (13) \qquad & Zg_1(X, Y, U) - d_1(X, Y, U, Z) - h_2(X, Y; U, Z) - Yg_1(X, Z, U) + \\ & + d_1(X, Z, U, Y) + h_2(X, Z, U, Y) = \\ & = g_1(X, [Z, Y], U) + \varepsilon[h_1(X; Y)\, h_1(U; Z) - h_1(X; Z)\, h_1(Y, U)]\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Y, Z; Y_1, \ldots, Y_{k+1}) - g_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Z, Y; Y_1, \ldots, Y_{k+1}) + \\ & + f_k(Y_1, \ldots, Y_{k+1} Y; X_1, \ldots, X_k, Z) - f_k(Y_1, \ldots, Y_{k+1}, Z; X_1, \ldots, X_k, Y) = \\ & = h_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, [Z, Y]; Y_1, \ldots, Y_{k+1}), \quad Zg_k(X_1, \ldots, X_k, Y; Y_1, \ldots, Y_k) - \\ & - d_k(X_1, \ldots, X_k, Y; Y_1, \ldots, Y_k, Z) + h_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Z; Y_1, \ldots, Y_k, Y) - \\ & - Yg_k(X_1, \ldots, X_k, Z; Y_1, \ldots, Y_k) + d_k(X_1, \ldots, X_k, Z; Y_1, \ldots, Y_k, Y) - \\ & - h_{k+1}(Y_1, \ldots, Y_k, Z; X_1, \ldots, X_k, Y) = g_k(X_1, \ldots, X_k, [Z, Y]; Y_1, \ldots, Y_k) \end{aligned}$$

schreiben kann und dass die Formeln $(8)_3$ und $(8)_6$ zugleich gelten. Die Gleichungen (13) sind gewisse Bedingungen für die metrischen Tensoren h_i, die wir *die Integrabilitätsbedingungen* nennen.

Es seien jetzt umgekehrt auf der Mannigfaltigkeit Ω die Tensoren h_i definiert, die die folgende Eigenschaften besitzen:

1) $h_k(X_1, \ldots, X_k; Y_1, \ldots, Y_k) = h_k(Y_1, \ldots, Y_k; X_1, \ldots, X_k)$ sind für differenzierbare Vektorfelder auf Ω differenzierbare Funktionen, symmetrisch in der ersten und zweiten Gruppe von Argumenten;
2) sie genügen den Integrabilitätsbedingungen (13) und der Bedingung (12);
3) es existiert l so, dass $h_{l+1}, h_{l+2}, \ldots$ Nulltensoren sind;
4) die Ränge aller Tensoren h_i sind konstant und für ihre Summe s gilt $s \leqq n$;
5) wenn $h_k(X_1, \ldots, X_k; Y_1, \ldots, Y_k) = 0$ für alle $X_1, \ldots, X_k$ ist, dann ist auch $g_k(X_1, \ldots, \ldots, X_{k+1}; Y_1, \ldots, Y_k) = 0$, $h_{k+1}(X_1, \ldots, X_{k+1}; X_{k+2}, Y_1, \ldots, Y_k) = 0$ für alle $X_1, \ldots, X_{k+2}$.

Wir konstruieren über Ω das Vektorraumbündel $\mathscr{S}$ mit den Fasern $S(u) = \bigoplus_{i=1}^{l} (\otimes^i T_u(\Omega))$ und bezeichnen mit $\mathscr{B}$ die Mannigfaltigkeit aller Linearabbildungen der Räumen $S(u)$ in $T_x(M)$ mit den Projektionen v_Ω, v_M auf Ω und M. Es sei $B \subset \mathscr{B}$ die Untermenge der Abbildungen $\Phi_{ux} \in \mathscr{B}$, die den Beziehungen

(14)
$$\langle \Phi_{ux}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_k), \Phi_{ux}(Y_1 \otimes \ldots \otimes Y_l)\rangle = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ h_k(X_1, \ldots, X_k; Y_1, \ldots, Y_k) & (k = l) \end{cases}$$

genügen.

Lemma 3. *B ist eine differenzierbare Untermannigfaltikeit von $\mathscr{B}$.* Der Beweis folgt bei der Benutzung des Satzes für implizite Funktionen unmittelbar aus den Bedingungen 4) für die Tensoren h_i.

Wir definieren weiter auf B eine Distribution Δ so, dass wir für alle $\Phi_{ux} \in B$ eine Linearabbildung von $T_u(\Omega)$ in $T_{\Phi_{ux}}(B)$ konstruieren und der Wert der Distribution Δ im Punkte Φ_{ux} soll das Bild dieser Abbildung sein: jedem Vektor $Z \in T_u(\Omega)$ ordnen wir den Vektor $D_Z \in T_{\Phi_{ux}}(B)$ zu, der nach dem Lemma 2 durch die Vektoren $v'_\Omega D_Z = Z$, $v'_M D_Z = \Phi_{ux}(Z)$, $(v \circ \omega'_s)\, D_Z$ für jeden Schnitt s auf $\mathscr{S}$ gegeben ist. Die Vektoren $(v \circ \omega'_s)\, D_Z$ sind für jeden Schnitt $s = X_1 \otimes \ldots \otimes X_k$ ($X_1, X_2, \ldots, X_k$ differenzierbare Vektorfelder auf Ω) so festgestellt, dass

$$(15) \qquad (v \circ \omega'_s)\, D_Z \in \bigoplus_{i=k-1}^{k+1} \Phi_{ux}(\otimes^i T_u(\Omega)),$$
$$\langle (v \circ \omega'_s)\, D_Z, \Phi_{ux}(Y_1 \otimes \ldots \otimes Y_{k-1})\rangle = -h_k(Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Z; X_1, \ldots, X_k),$$
$$\langle (v \circ \omega'_s)\, D_Z, \Phi_{ux}(Y_1 \otimes \ldots \otimes Y_k)\rangle = g_k(X_1, \ldots, X_k, Z; Y_1, \ldots, Y_k),$$
$$\langle (v \circ \omega'_s)\, D_Z, \Phi_{ux}(Y_1 \otimes \ldots \otimes Y_{k+1})\rangle = h_{k+1}(X_1, \ldots, X_k, Z; Y_1, \ldots, Y_{k+1})$$

ist. Die Bedingungen des Lemma 2 sind dann erfüllt und nach (12) ist wirklich $D_Z \in T_{\Phi_{ux}}(B)$.

Satz 4. *Die Distribution Δ ist auf B r-dimensional und involutiv.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Bedingung $v'_\Omega D_Z = Z$. Für zwei differenzierbare Vektorfelder X, Y auf Ω ist nach (13) $[D_X, D_Y] = D_{[X,Y]}$ und das gibt die zweite Behauptung.

Aus den letzten Satz folgt, dass es für jeden Punkt B eine einzige maximale zusammenhängende r-dimensionale Integralmannigfaltigkeit W der Distribution Δ gibt. Genau wie in der Arbeit [2] kann man beweisen, dass $v_\Omega(W) = \Omega$. Da v'_Ω ein Isomorfismus zwischen $T_{\Phi_{ux}}(W)$ und $T_u(\Omega)$ ist, ist W eine Überlagerungsmannigfaltigkeit Ω. Die Abbildung v_Ω ist eineindeutig auf jeder zusammenhängenden Komponente der Menge $W \cap v_\Omega^{-1}(U)$, wo U ein einfach zusammenhängender Gebiet auf Ω ist. Die Abbildung v_M ist wegen des konstanten Ranges r auch lokal eineindeutig, aber nicht notwendig eineindeutig. Deswegen werden wir sagen, dass $V = v_M(W)$ eine verallgemeinerte Überlagerungsmannigfaltigkeit der Mannigfaltigkeit Ω ist. Wenn $X_1, \ldots, X_k$ differenzierbare Vektorfelder auf Ω sind, $u \in \Omega$ und $Z \in T_u(\Omega)$, $\varphi =$

$= v_M/W \circ v_\Omega^{-1}$, dann ist $\varphi' Z = \Phi_{ux}(Z)$ und wegen (15) folgt aus dem Satz 3

$$\nabla_{\varphi' Z} \Phi_{ux}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_k) = \Phi_{ux}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_k \otimes Z) \bmod \bigoplus_{i=k-1}^{k} \Phi_{ux}(\otimes^i T_u(\Omega)) .$$

Die gegebene Tensoren h_i sind also die metrischen Tensoren der Mannigfaltigkeit V. Wir fassen zusammen

Satz 5. *Wenn die Tensoren h_i auf Ω die Bedingungen 1)–5) erfüllen, dann existiert in M, abgesehen von der räumlichen Lage, genau eine differenzierbare verallgemeinerte Überlagerungsmannigfaltigkeit V, deren metrische Tensoren die gegebenen Tensoren h_i sind.*

Bemerkung 1. Die Bedingung Rang h_l = const. kann man durch die Bedingung s ist gleich n oder $n - 1$ ersätzen. Wenn aber die Menge der Punkten, in denen $s = n$ nich zusammenhängend ist, gilt im Satz 5 nicht die Eindeutigkeit.

Bemerkung 2. Beim Beweis des Satzes 5 könnten wir uns auf die Differenzierbarkeit der Klasse C^{l+2} beschränken.

Literatur

[1] *K. Nomizu:* Lie groups and differential geometry, Mathematical Society Japan, Tokyo, 1956.

[2] *S. Sasaki:* A global formulation of the fundamental theorem of the theory of surfaces in threedimensional Euclidean space, Nagoya Math. J., *13*, 1958.

[3] *S. Sasaki:* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, Tohôku Math. J., Vol. *10*/1958.

Anschrift des Verfassers: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Резюме

ГЕОМЕТРИЯ В ЦЕЛОМ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ E_n И S_n.

ЛЕО БОЧЕК (Leo Boček), Прага

В работе определены метрические тензоры дифференцируемого отображения многообразия в риманово многообразие и показано геометрическое значение этих тензоров. В случае евклидова пространства или n-мерной шаровой поверхности доказано, что этими тензорами дифференцируемое отображение в это пространство определено глобально и однозначно до перемещения.