Maria Hasse; Lothar Michler

Einige Bemerkungen über freie Kategorien und freie Gruppoide

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 16 (1966), No. 3, 424–445

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100741

Чехословацкий математический журнал, т. 16 (91) 1966, Прага

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER FREIE KATEGORIEN UND FREIE GRUPPOIDE

MARIA HASSE, LOTHAR MICHLER, Dresden

(Eingegangen am 13. September 1965)

I. GRUNDBEGRIFFE

Es sei M eine beliebige Menge und N die Menge der positiven ganzrationalen Zahlen. Dann heisst eine Abbildung $\varphi \in \bigcup_{k \in N} \bigcup_{X \in \mathfrak{P}(M^k)} M^X$ eine *Operation* in M. Bei $\varphi \in M^X$ $(X \in \bigcup_{k \in N} \mathfrak{P}(M^k))$ wird X der Definitionsbereich von φ genannt und im folgenden mit $D(\varphi)$ bezeichnet. Ist $D(\varphi) \in \mathfrak{P}(M^k) - \{\emptyset\}$, so heisst φ genauer eine *k-stellige* Operation in $M(k \in N)$. Eine Operation φ in M nennt man *vollständig*, wenn $D(\varphi) = M^k$ mit einem $k \in N$ ist.

Eine *universelle Algebra* oder kurz eine *Algebra* ist gegeben durch eine Menge M und eine Familie $(\varphi_\varrho)_{\varrho \in P}$ von Operationen in M [1]). Für diese Algebra schreiben wir $[M,(\varphi_\varrho)_{\varrho \in P}]$. Den Begriff einer Algebra sehen wir als einen primitiven Begriff an. Die Menge M wird die *Trägermenge* oder kurz der *Träger* und die Operationen $\varphi_\varrho(\varrho \in P)$ in M werden die *definierenden Operationen* der Algebra genannt. Im Falle $P = \emptyset$ wird diese mit M identifiziert. Die Algebra heisst *nicht leer*, wenn $M \neq \emptyset$ ist. Sie heisst speziell *vollständig*, wenn alle definierenden Operationen vollständige Operationen in M sind.

Die Algebren $[M, (\varphi_\varrho)_{\varrho \in P}]$ und $[M', (\psi_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}]$ heissen *gleich*, wenn $M = M'$, $P = \Sigma$ und $\varphi_\varrho = \psi_\varrho$ für jedes $\varrho \in P$ ist.

Wir werden im folgenden eine Algebra mit $A, B, C, \ldots, A_\iota, \ldots, C_e, \ldots$ und deren Träger bzw. mit $A_0, B_0, C_0, \ldots, A_{\iota,0}, \ldots, C_{e,0}, \ldots$ bezeichnen. Unter den Elementen einer Algebra A versteht man die Elemente ihres Trägers. Sind A und B Algebren, so nennt man eine Abbildung von A_0 in B_0 auch eine Abbildung von A in B. Unter einer Relation in einer Algebra A ist im folgenden eine binäre Relation in A_0 zu verstehen.

[1]) D.h. eine Abbildung von einer Menge P auf eine Menge von Operationen in M. Unter einer Abbildung ist stets eine eindeutige Abbildung zu verstehen.

Die Algebren $A = [A_0, (\varphi_\varrho)_{\varrho\in P}]$ und $B = [B_0, (\psi_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}]$ heissen *typengleich*, wenn $\Sigma = P$ ist und wenn zu jedem $\varrho \in P$ ein $k_\varrho \in N$ mit $\varphi_\varrho \in A_0^X$, $\psi_\varrho \in B_0^Y$ und $X \in P(A_0^{k_\varrho})$, $Y \in P(B_0^{k_\varrho})$ existiert.

Wenn es zu keinen Verwechslungen führen kann, werden bei typengleichen Algebren $[A_0, (\varphi_\varrho)_{\varrho\in P}]$ und $[B_0, (\psi_\varrho)_{\varrho\in P}]$ die einander entsprechenden Operationen φ_ϱ und $\psi_\varrho (\varrho \in P)$ mit demselben Zeichen – etwa φ_ϱ – bezeichnet. Ist insbesondere $P = \{1, 2, \ldots, r\}$ mit einem $r \in N$, so geben wir eine Algebra $[A_0, (\varphi_\varrho)_{\varrho\in P}]$ auch einfach mit $[A_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r]$ an.

Eine *Teilalgebra* einer Algebra $A = [A_0, (\varphi_\varrho)_{\varrho\in P}]$ ist eine zu A typengleiche Algebra $A' = [A'_0, (\varphi'_\varrho)_{\varrho\in P}]$ mit den Eigenschaften a) $A'_0 \subseteq A_0$, b) $D(\varphi'_\varrho) \subseteq D(\varphi_\varrho)$ für jedes $\varrho \in P$, c) $\varphi'_\varrho = \varphi_\varrho \mid D(\varphi'_\varrho)$ für jedes $\varrho \in P$. Dabei bezeichnet $\varphi_\varrho \mid D(\varphi'_\varrho)$ die Beschränkung von φ_ϱ auf $D(\varphi'_\varrho)$. Ist $(A_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie paarweise typengleicher Algebren mit $A_\iota = [A_{\iota,0}, (\varphi_\varrho^{(\iota)})_{\varrho\in P}]$ $(\iota \in I)$, so verstehen wir unter der Summe dieser Familie – in Zeichen: $\sum_{\iota\in I} A_\iota$ – die Algebra $A = [A_0, (\varphi_\varrho)_{\varrho\in P}]$, wobei $A_0 = \bigcup_{\iota\in I} (\{\iota\} \times A_{\iota,0})$, und φ_ϱ für jedes $\varrho \in P$ die Operation in A_0 mit

$$D(\varphi_\varrho) = \bigcup_{\iota\in I} \{((\iota, x_1), (\iota, x_2), \ldots, (\iota, x_{k_\varrho})) : (x_1, x_2, \ldots, x_{k_\varrho}) \in D(\varphi_\varrho^{(\iota)})\}$$

und

$$\varphi_\varrho(((\iota, x_1), (\iota, x_2), \ldots, (\iota, x_{k_\varrho}))) = (\iota, \varphi_\varrho^{(\iota)}((x_1, x_2, \ldots, x_{k_\varrho})))$$

für jedes $((\iota, x_1), (\iota, x_2), \ldots, (\iota, x_{k_\varrho})) \in D(\varphi_\varrho)$ ist.

Eine *Kongruenzrelation* einer Algebra $A = [A_0, (\varphi_\varrho)_{\varrho\in P}]$ ist eine Äquivalenzrelation R in A_0 mit

$$\begin{aligned} &\forall (x_1, x_2, \ldots, x_{k_\varrho}) \, \forall (x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k\varrho}) \, ((x_1, x_2, \ldots, x_{k_\varrho}), (x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k\varrho}) \in D(\varphi_\varrho) \\ &\wedge x_1 R x'_1 \wedge x_2 R x'_2 \wedge \ldots \wedge x_{k_\varrho} R x'_{k\varrho} \Rightarrow \varphi_\varrho((x_1, x_2, \ldots, x_{k_\varrho})) \, R \varphi_\varrho((x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k\varrho}))) \end{aligned}$$

für jedes $\varrho \in P$. Ist R eine Kongruenzrelation einer Algebra $A = [A_0, (\varphi_\varrho)_{\varrho\in P}]$ und bezeichnen wir für jedes $a \in A_0$ die Äquivalenzklasse mod R, die a als Element enthält, mit $\bar{a}$, so sei $\bar{\varphi}_\varrho$ für jedes $\varrho \in P$ die Operation in der Quotientenmenge A_0/R von A_0 nach R [2]) mit

$$D(\bar{\varphi}_\varrho) = \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{k\varrho}) : D(\varphi_\varrho) \cap (\bar{x}_1 \times \bar{x}_2 \times \ldots \times \bar{x}_{k\varrho}) \neq \emptyset\}$$

und

$$\bar{\varphi}_\varrho((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{k_\varrho})) = \overline{\varphi_\varrho((x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k\varrho}))}$$

für jedes $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{k_\varrho}) \in D(\bar{\varphi}_\varrho)$, wobei $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k\varrho})$ ein beliebiges Element von $D(\varphi_\varrho) \cap (\bar{x}_1 \times \bar{x}_2 \times \ldots \times \bar{x}_{k_\varrho})$ ist. Die zu A typengleiche Algebra $[A_0/R, (\bar{\varphi}_\varrho)_{\varrho\in P}]$ heisst dann die *Quotienten-* oder *Faktoralgebra von A nach* R und wird mit A/R bezeichnet.

---

[2]) Wir setzen hierbei $\emptyset/\emptyset = \emptyset$.

Sind $A = [A_0, (\varphi_\varrho)_{\varrho\in P}]$ und $A' = [A'_0, (\varphi'_\varrho)_{\varrho\in P}]$ typengleiche Algebren und ist $(k_\varrho)_{\varrho\in P}$ eine Familie von Elementen aus N mit $D(\varphi_\varrho) \in \mathfrak{P}(A_0^{k_\varrho})$, $D(\varphi'_\varrho) \in \mathfrak{P}(A_0'^{k_\varrho})$ für jedes $\varrho \in P$, so heisst eine Abbildung Φ von A_0 in A'_0 eine *homomorphe Abbildung* von A in A', wenn für jedes $\varrho \in P$ gilt:

$$\forall \mathfrak{x}(\mathfrak{x} \in D(\varphi_\varrho) \Rightarrow \Phi^{(k_\varrho)}(\mathfrak{x}) \in D(\varphi'_\varrho) \wedge \Phi(\varphi_\varrho(\mathfrak{x})) = \varphi'_\varrho(\Phi^{(k_\varrho)}(\mathfrak{x}))\ ^{3}).$$

Ist Φ eine eineindeutige homomorphe Abbildung von einer Algebra A auf eine zu A typengleiche Algebra A' und ist Φ^{-1} eine homomorphe Abbildung von A' auf A, so wird Φ eine *isomorphe Abbildung* von A auf A' genannt. Eine Algebra A' heisst zu einer Algebra A isomorph – in Zeichen: $A \simeq A'$ –, wenn eine isomorphe Abbildung von A auf A' existiert.

Ist Φ eine homomorphe Abbildung von einer Algebra A auf eine zu A typengleiche Algebra A', so ist die Relation R in A_0 mit $\forall x \forall y(xRy \Leftrightarrow x, y \in A_0 \wedge \Phi(x) = \Phi(y))$ eine Kongruenzrelation von A. Diese nennen wir die *zu der homomorphen Abbildung Φ von A in A' gehörige Kongruenzrelation* von A. Ist Φ insbesondere eine homomorphe Abbildung von $A = [A_0, (\varphi_\varrho)_{\varrho\in P}]$ auf $A' = [A'_0, (\varphi'_\varrho)_{\varrho\in P}]$ und bezeichnen wir für jedes $a \in A_0$ die Äquivalenzklasse mod R, die a als Element enthält, mit $\bar{a}$, so ist die Abbildung Ψ von A/R auf A' mit $\Psi(\bar{x}) = \Phi(x)$ für jedes $x \in A_0$ eine eineindeutige homomorphe Abbildung von A/R auf A'. Ist $(k_\varrho)_{\varrho\in P}$ eine Familie von Elementen von N mit $D(\varphi_\varrho) \in \mathfrak{P}(A_0^{k_\varrho})$, $D(\varphi'_\varrho) \in \mathfrak{P}(A_0'^{k_\varrho})$ für jedes $\varrho \in P$, so ist Ψ genau dann eine isomorphe Abbildung von A/R auf A', wenn $P(\Phi^{(k_\varrho)})(D(\varphi_\varrho)) = D(\varphi'_\varrho)$ für jedes $\varrho \in P$ ist[4]).

Es sei Q eine Kongruenzrelation einer Algebra A, und $\bar{a}$ bezeichne für jedes $a \in A_0$ die a als Element enthaltende Äquivalenzklasse mod Q. Ist Θ eine isomorphe Abbildung von A/Q auf eine zu A typengleiche Algebra A' und ist R' eine Kongruenzrelation von A', so ist die Relation R in A mit $\forall x \forall y(xRy \Leftrightarrow x, y \in A_0 \wedge \Theta(\bar{x})\, R'\, \Theta(\bar{y}))$ eine weitere Kongruenzrelation von A, und es ist $A/R \simeq A'/R'$. Sind $A = [A_0, (\varphi_\varrho)_{\varrho\in P}]$ und $A' = [A'_0, (\varphi'_\varrho)_{\varrho\in P}]$ typengleiche Algebren und ist $(k_\varrho)_{\varrho\in P}$ eine Familie von Elementen aus N mit $D(\varphi_\varrho) \in \mathfrak{P}(A_0^{k_\varrho})$, $D(\varphi'_\varrho) \in \mathfrak{P}(A_0'^{k_\varrho})$ für jedes $\varrho \in P$, so heisst eine Abbildung Φ von einer Teilmenge X von A_0 in A'_0 eine *mit den Definitionsbereichen von A und A' verträgliche Abbildung* von X in A'_0, wenn $P(\Phi^{(k_\varrho)})(X^{k_\varrho} \cap D(\varphi_\varrho)) \subseteq D(\varphi'_\varrho)$ für jedes $\varrho \in P$ ist.

Ein *gerichteter Graph* oder kurz ein *Graph* ist eine Algebra $C = [C_0, \alpha, \beta]$, wobei $D(\alpha) = D(\beta) = C_0$ und $\alpha\,\alpha = \alpha\,\beta = \alpha$, $\beta\,\alpha = \beta\,\beta = \beta$ gilt[5]). Ist $C = [C_0, \alpha, \beta]$

---

[3]) Ist Θ eine Abbildung von einer Menge M in eine Menge M', so ist unter $\Theta^{(k)}(k \in N)$ die Abbildung von M^k in M'^k mit $\Theta^{(k)}((x_1, x_2, \ldots, x_k)) = (\Theta(x_1), \Theta(x_2), \ldots, \Theta(x_k))$ für jedes $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in M^k$ zu verstehen.

[4]) Ist Θ eine Abbildung von einer Menge M in eine Menge M', so ist unter $P(\Theta)$ die Abbildung von $\mathfrak{P}(M)$ in $\mathfrak{P}(M')$ mit $P(\Theta)(X) = \{\Theta(x) : x \in X\}$ für jedes $X \in \mathfrak{P}(M)$ zu verstehen. Anstelle von $P(\Theta)(M)$ schreiben wir einfach $\Theta(M)$.

[5]) Ist Θ eine Abbildung von einer Menge M in eine Menge M' und Θ' eine Abbildung von der Menge M' in eine Menge M'', so ist unter $\Theta\,\Theta'$ die Abbildung von M in M'' mit $(\Theta\,\Theta')(x) = \Theta'(\Theta(x))$ für jedes $x \in M$ zu verstehen.

ein Graph, so ist $\alpha(C_0) = \beta(C_0)$. Jedes Element von $\alpha(C_0)$ heisst ein *Eckpunkt* von C, während jedes Element von $C_0 - \alpha(C_0)$ eine *Kante* des Graphen C genannt wird. Ein Element e von $\alpha(C_0)$ heisst ein *isolierter Eckpunkt* von C, wenn keine Kante x von C mit $\alpha(x) = e$ oder $\beta(x) = e$ existiert. Ein Graph $C = [C_0, \alpha, \beta]$ heisst ein *schlichter Graph*, wenn

$$\forall x \forall y (x, y \in C_0 \wedge \alpha(x) = \alpha(y) \wedge \beta(x) = \beta(y) \Rightarrow x = y)$$

gilt. Ein Graph $C' = [C_0', \alpha', \beta']$, der Teilalgebra eines Graphen $C = [C_0, \alpha, \beta]$ ist, heißt ein *Teilgraph* von C. Ist insbesondere $\alpha'(C_0') = \alpha(C_0)$, so heißt der Teilgraph auch ein *Untergraph* von C. Ein Teilgraph C' eines Graphen C heißt ein *voller Teilgraph* von C, wenn

$$\forall x (x \in C_0 \wedge \alpha(x), \beta(x) \in \alpha'(C_0') \Rightarrow x \in C_0')$$

gilt. Ist $(C_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von Graphen, so ist auch $\sum_{\iota \in I} C_\iota$ ein Graph.

Ist $C = [C_0, \alpha, \beta]$ ein Graph, so sei R^0 die durch die Relation Q in $\alpha(C_0)$ mit

$$\forall e \forall e' (eQe' \Leftrightarrow \exists x (x \in C_0 \wedge \alpha(x) = e \wedge \beta(x) = e'))$$

induzierte Äquivalenzrelation in $\alpha(C_0)$ (man siehe etwa [10], S. 12) und R die Äquivalenzrelation in C_0 mit

$$\forall x \forall y (xRy \Leftrightarrow x, y \in C_0 \wedge \alpha(x)\, R^0\, \alpha(y)) .$$

Dann ist jede Äquivalenzklasse mod R der Träger eines vollen Teilgraphen von C. Jeder dieser Teilgraphen heißt eine *zusammenhängende Komponente* von C. Ist C_e die $e \in \alpha(C_0)$ als Element enthaltende zusammenhängende Komponente von C, so ist $C \simeq \sum_{e \in V} C_e$, wenn V ein Repräsentatensystem der zu R^0 gehörigen Klasseneinteilung von $\alpha(C_0)$ ist. Bei $\overline{\overline{V}} \leqq 1$ [6]) heißt C ein *zusammenhängender Graph*.

Für einen Graphen $C = [C_0, \alpha, \beta]$ sind die beiden Familien $(D_n)_{n \in N}$ und $(W_n)_{n \in \{0\} \cup N}$ von Mengen mit

$$D_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C_0^n \wedge \beta(x_1) = \alpha(x_2) \wedge \\ \wedge \beta(x_2) = \alpha(x_3) \wedge \ldots \wedge \beta(x_{n-1}) = \alpha(x_n)\}$$ [7])

und

$$W_n = \{(e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e') : (e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e') \in D_{n+2} \wedge \\ \wedge e = \alpha(x_1) \wedge e' = \beta(x_n) \wedge x_1, x_2, \ldots, x_n \in C_0 - \alpha(C_0)\}$$

für jedes $n \in N$ sowie $W_0 = \{(e, e) : e \in \alpha(C_0)\}$ im folgenden von Bedeutung.

---

[6]) Ist M eine Menge, so bezeichnet $\overline{\overline{M}}$ die Kardinalzahl von M.

[7]) Insbesondere ist $D_1 = C_0$.

Jedes Element w von $F_0 = \bigcup_{n \in \{0\} \cup N} W_n$ heißt ein *Weg über* C. Bei $w \in W_n$ nennen wir w genauer einen Weg der Länge n über C. Die Elemente von W_0 heißen die Einheitswege über C, während die Elemente von W_1 auch die Elementarwege über C genannt werden.

Es sei E die Abbildung von F_0 in $\mathfrak{P}(C_0 - \alpha(C_0))$ mit $E(w) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, falls $w = (e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e') \in F_0$ mit $e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e' \in C_0$ [8]. Einen Graphen $C = [C_0, \alpha, \beta]$ nennen wir einen *gestreckten Graphen*, wenn $C_0 - \alpha(C_0) \neq \emptyset$ ist, wenn er keine isolierten Eckpunkte hat und wenn es genau einen Weg w über C mit $E(w) = C_0 - \alpha(C_0)$ gibt. Für einen gestreckten Graphen C gilt also $3 \leqq \overline{\overline{C_0}} < \aleph_0$. Ein Graph, dessen sämtliche zusammenhängenden Komponenten gestreckte Graphen sind, heißt ein *Grundgraph*.

Ein *doppelt-gerichteter Graph* oder kurz ein *d-Graph* ist eine Algebra $C = [C_0, \alpha, \beta, \gamma]$, wobei $[C_0, \alpha, \beta]$ ein gerichteter Graph ist sowie $D(\gamma) = C_0$, $\gamma\alpha = \beta$, $\gamma\beta = \alpha$, $\gamma\gamma = Id_{C_0}$ und $\gamma \mid \alpha(C_0) = Id_{\alpha(C_0)}$ gilt [9]. Auch hier heißen die Elemente von $\alpha(C_0)$ die Eckpunkte und die Elemente von $C_0 - \alpha(C_0)$ die Kanten von C. Ist $[C_0, \alpha, \beta]$ ein schlichter Graph, so heißt C ein schlichter d-Graph. Ein d-Graph $C' = [C_0', \alpha', \beta', \gamma']$, der Teilalgebra eines d-Graphen $C = [C_0, \alpha, \beta, \gamma]$ ist, wird ein d-Teilgraph von C genannt. Ist $[C_0', \alpha', \beta']$ insbesondere ein Untergraph bzw. voller Teilgraph von $[C_0, \alpha, \beta]$, so heißt der d-Teilgraph C' von C auch ein d-Untergraph bzw. ein voller d-Teilgraph von C.

Es sei $C = [C_0, \alpha, \beta, \gamma]$ ein d-Graph, und es sei $[C_0', \alpha', \beta']$ eine zusammenhängende Komponente des Graphen $[C_0, \alpha, \beta]$. Dann ist C_0' der Träger eines vollen d-Teilgraphen C' von C. Dieser heißt eine zusammenhängende Komponente des d-Graphen C. Ist $(C_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von d-Graphen, so ist auch $\sum_{\iota \in I} C_\iota$ ein d-Graph.

Ist C_e die $e \in \alpha(C_0)$ als Element enthaltende zusammenhängende Komponente eines d-Graphen $C = [C_0, \alpha, \beta, \gamma]$ und ist V ein Repräsentantensystem der für $[C_0, \alpha, \beta]$ zu R^0 (S. 427) gehörigen Klasseneinteilung von $\alpha(C_0)$, so ist $C \simeq \sum_{e \in V} C_e$. Bei $\overline{\overline{V}} \leqq 1$ heißt C ein zusammenhängender d-Graph.

Ein d-Graph $C = [C_0, \alpha, \beta, \gamma]$ heißt ein *Baum*, wenn er schlicht ist und wenn für jeden Weg $(\alpha(x_1), x_1, x_2, \ldots, x_n, \beta(x_n))$ einer Länge $\geqq 2$ über $[C_0, \alpha, \beta]$ bei $\beta(x_n) = \alpha(x_1)$ ein $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ mit $x_{i+1} = \gamma(x_i)$ existiert.

Ein *multiplikativer Graph* ist eine Algebra $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ mit $D(\alpha) = D(\beta) = C_0$, $D(\varphi) \subseteq C_0^2$ und

M I. $\forall x \forall y((x, y) \in D(\varphi) \Rightarrow \beta(x) = \alpha(y))$,

M II. $\forall x \forall y((x, y) \in D(\varphi) \Rightarrow \alpha(xy) = \alpha(x) \wedge \beta(xy) = \beta(y))$,

M III. $\forall x(x \in C_0 \Rightarrow (\alpha(x), x), (x, \beta(x)) \in D(\varphi) \wedge \alpha(x)\, x = x\, \beta(x) = x)$.

---

[8]) Sprechen wir im folgenden von einem Element $w = (e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e')$ von F_0 bzw. von einem Element $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von $\bigcup_{k \in N} D_k$, so sollen dabei stets $e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e'$ bzw. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Elemente von C_0 sein.

[9]) Ist M eine Menge, so bezeichnet Id_M die Identitätsabbildung von M.

Hierbei wurde – wie auch im folgenden – bei $(x, y) \in D(\varphi)$ anstelle von $\varphi((x, y))$ einfach xy geschrieben.

Ist $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ ein multiplikativer Graph, so ist $[C_0, \alpha, \beta]$ ein Graph. Dieser heißt der zu C gehörige Graph und wird im folgenden mit $\vec{C}$ bezeichnet. Ein Eckpunkt von $\vec{C}$ wird eine *Einheit* von C genannt und zwar $\alpha(x)$ die *Linkseinheit* und $\beta(x)$ die *Rechtseinheit* des Elementes x von C (in C). Ein Element e von $\alpha(C_0)$ heißt eine isolierte Einheit, wenn e ein isolierter Eckpunkt von $\vec{C}$ ist. Ist C ein multiplikativer Graph und ist R eine Kongruenzrelation von C, so ist die Faktoralgebra C/R ebenfalls ein multiplikativer Graph, der sogenannte *multiplikative Faktorgraph* von C nach R.

Eine *Kategorie* ist ein multiplikativer Graph $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$, für den speziell gilt

C I. $\forall x \forall y (x, y \in C_0 \wedge \beta(x) = \alpha(y) \Rightarrow (x, y) \in D(\varphi))$,

C II. $\forall x \forall y \forall z ((x, y), (y, z), (xy, z), (x, yz) \in D(\varphi) \Rightarrow (xy)\, z = x(yz))$.

Es sei $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ eine Kategorie und $(D_n)_{n \in N}$ die zu $\vec{C}$ gehörige Familie von Mengen (S. 427). Wir betrachten die durch φ bestimmte Familie $(\varphi_n)_{n \in N}$ von Operationen in C_0 mit $D(\varphi_n) = D_n$ und

$$\varphi_n((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{([(x_1 x_2)\, x_3]\, x_4 \ldots)\, x_{n-1}\}\, x_n$$

für jedes $n \in N$ und jedes $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_n$. Insbesondere ist $\varphi_1 = Id_{C_0}$ und $\varphi_2 = \varphi$. Wir schreiben im folgenden für jedes $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \bigcup_{k \in N} D_k$ anstelle von $\varphi_n((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ einfach $x_1 x_2 \ldots x_n$. Bei $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \bigcup_{k \in N} D_k$ sagen wir, daß das Produkt $x_1 x_2 \ldots x_n$ in C existiert. Schreiben wir im nachstehenden eine Gleichung $x_1 x_2 \ldots x_n = x$ oder $x = x_1 x_2 \ldots x_n$, so soll damit gleichzeitig die Existenz des Produktes $x_1 x_2 \ldots x_n$ in C ausgedrückt sein.

Ist T eine Teilmenge von C_0, so sagen wir, daß sich $x \in C_0$ als Produkt von Elementen von T (in C) darstellen lässt, wenn ein $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \bigcup_{k \in N} (D_k \cap T^k)$ mit $x_1 x_2 \ldots x_n = x$ existiert. Die Gleichung $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ heisst dann eine Darstellung von x als Produkt von Elementen von T. Eine Kategorie C, für die $\vec{C}$ ein schlichter Graph ist, heisst eine *schlichte Kategorie*.

Eine Kategorie C', die Teilalgebra einer Kategorie C ist, wird eine *Teilkategorie* von C genannt. Eine Kategorie $C' = [C_0', \alpha', \beta', \varphi']$ ist genau dann Teilkategorie einer Kategorie $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$, wenn $C_0' \subseteq C_0$, $\alpha' = \alpha \mid C_0'$, $\beta' = \beta \mid C_0'$ und $\varphi' = \varphi \mid (D(\varphi) \cap C_0'^2)$ ist. Ist $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ eine Kategorie, so ist eine Teilmenge C_0' von C_0 genau dann Träger einer Teilkategorie von C, wenn

$$\forall x (x \in C_0' \Rightarrow \alpha(x), \beta(x) \in C_0')$$

und

$$\forall x \forall y(x, y \in C_0' \wedge (x, y) \in D(\varphi) \Rightarrow xy \in C_0')$$

gilt. Für eine Teilkategorie C' einer Kategorie $\vec{C}$ ist C' ein Teilgraph von $\vec{C}$. Ist $\vec{C}$ insbesondere ein Untergraph bzw. ein voller Teilgraph von $\vec{C}$, so wird C' auch eine *Unterkategorie* bzw. eine *volle Teilkategorie* von C genannt.

Es sei $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ eine Kategorie und $[C_0', \alpha', \beta']$ eine zusammenhängende Komponente des Graphen $\vec{C}$. Dann ist C_0' der Träger einer vollen Teilkategorie von C. Diese heisst eine zusammenhängende Komponente der Kategorie C. Ist $(C_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von Kategorien, so ist auch $\sum_{\iota \in I} C_\iota$ eine Kategorie. Ist C eine Kategorie, C_e für jedes $e \in \alpha(C_0)$ die e als Element enthaltende zusammenhängende Komponente von C und V ein Repräsentantensystem der für $\vec{C}$ zu R^0 (S. 427) gehörigen Klasseneinteilung von $\alpha(C_0)$, so ist $C \simeq \sum_{e \in V} C_e$. Bei $\overline{\overline{V}} \leqq 1$ heisst C eine *zusammenhängende Kategorie.*

Eine homomorphe Abbildung von einer Kategorie C in eine Kategorie C' wird auch ein *Funktor* von C in C' genannt. Sind $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ und $C' = [C_0', \alpha', \beta', \varphi']$ zwei nicht notwendig verschiedene Kategorien, so ist eine Abbildung Φ von C_0 in C_0' genau dann ein Funktor von C in C', wenn $P(\Phi)(\alpha(C_0)) \subseteq \alpha'(C_0')$ und

$$\forall x \forall y((x, y) \in D(\varphi) \Rightarrow (\Phi(x), \Phi(y)) \in D(\varphi') \wedge \Phi(xy) = \Phi(x)\,\Phi(y))$$ [10])

gilt. Ein eineindeutiger Funktor von einer Kategorie C auf eine Kategorie C' ist eine isomorphe Abbildung von C auf C'.

Ist R eine Kongruenzrelation einer Kategorie C, so ist der multiplikative Graph C/R im allgemeinen keine Kategorie. Ist C/R insbesondere eine Kategorie, so nennen wir R eine *ausgezeichnete Kongruenzrelation* von C und C/R die *Faktorkategorie von C nach R.* Man erkennt leicht, dass eine Kongruenzrelation R einer Kategorie $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von C ist, wenn

(1) $$\forall e \forall x(e \in \alpha(C_0) \wedge x \in C_0 \wedge eR\,\alpha(x) \Rightarrow \exists y(yRx \wedge \alpha(y) = e))$$

gilt.

Ist R eine Kongruenzrelation von C mit

$$\forall e \forall e'(e, e' \in \alpha(C_0) \wedge eRe' \Rightarrow e = e'),$$

so gilt auch (1), und folglich ist R eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von C.

Es sei C eine Kategorie. Dann heisst eine Teilmenge K von C_0 ein *Erzeugendensystem* von C, wenn keine von C verschiedene Teilkategorie C' von C mit $K \subseteq C_0'$ existiert. Ein Erzeugendensystem K einer nicht leeren Kategorie C wird ein *mini-*

[10]) Wir bezeichnen hier — wie auch ähnlich im folgenden — für jedes $(x, y) \in D(\varphi)$ und jedes $(x', y') \in D(\varphi')$ sowohl $\varphi((x, y))$ mit xy als auch $\varphi'((x', y'))$ mit $x'y'$.

males Erzeugendensystem von C genannt, wenn kein Element der Familie $(K - \{x\})_{x \in K}$ ein Erzeugendensystem von C ist[11]).

Ist eine Teilmenge K von C_0 ein Erzeugendensystem einer Teilkategorie C' von C, so heisst C' die *von K erzeugte Teilkategorie* von C.

Es sei $C' = [C'_0, \alpha', \beta', \varphi']$ eine Teilkategorie einer Kategorie $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$. Dann heisst ein Element p von C ein *bez. C' irreduzibles Element* von C, wenn

$$p \in C'_0 - \alpha'(C'_0)$$

ist und

$$\forall x \forall y((x, y) \in D(\varphi) \wedge p = xy \wedge x \neq \alpha(p) \wedge y \neq \beta(p) \Rightarrow x \notin C'_0 \wedge y \notin C'_0)$$

gilt. Ein bez. C irreduzibles Element von C wird auch ein irreduzibles Element von C genannt. Genau dann ist $p \in C_0$ ein irreduzibles Element von C, wenn $p \notin \alpha(C_0)$ ist und

$$\forall x \forall y((x, y) \in D(\varphi) \wedge p = xy \Rightarrow x = \alpha(p) \vee y = \beta(p))$$

gilt.

Ein Element x einer Kategorie $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ heisst ein (in C) *invertierbares Element*, wenn ein — dann durch x eindeutig bestimmtes — Element x^{-1} von C mit (x, x^{-1}), $(x^{-1}, x) \in D(\varphi)$ und $xx^{-1} = \alpha(x)$, $x^{-1}x = \beta(x)$ existiert. Es ist dann $\alpha(x^{-1}) = \beta(x)$ und $\beta(x^{-1}) = \alpha(x)$. Jede Einheit von C ist ein in C invertierbares Element von C. Eine Kategorie C heisst ein *Gruppoid*, wenn die Menge der in C invertierbaren Elemente von C mit C_0 übereinstimmt. Ist eine Teilkategorie C' einer Kategorie C ein Gruppoid, so wird C' auch ein Teilgruppoid von C genannt. Ist C' noch speziell eine Unterkategorie bzw. volle Teilkategorie von C, so heisst C' ein Untergruppoid bzw. volles Teilgruppoid von C. Ein zusammenhängendes Gruppoid wird ein *transitives Gruppoid* oder auch ein *Brandtsches Gruppoid* [2] genannt. Die zusammenhängenden Komponenten eines Gruppoids C sind Brandtsche Gruppoide, die wir die *maximalen Brandtschen Teilgruppoide* von C nennen. Ist e eine Einheit eines Gruppoids $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$, so ist $H_{e,0} = \{x : x \in C_0 \wedge \alpha(x) = = \beta(x) = e\}$ der Träger eines Teilgruppoids $H_e = [H_{e,0}, \alpha', \beta', \varphi']$ von C. Die Algebra $[H_{e,0}, \varphi']$ ist dann eine Gruppe. H_e heisst die *zu e gehörige maximale Teilgruppe* von C, und $[H_{e,0}, \varphi']$ nennen wir die *zu H_e gehörige Gruppe*.

Die zu den maximalen Teilgruppen eines nicht leeren Brandtschen Gruppoids gehörigen Gruppen sind sämtlich isomorph. Ein Gruppoid $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ ist genau dann ein schlichtes Gruppoid, wenn $\forall e(e \in \alpha(C_0) \Rightarrow \overline{\overline{H}}_{e,0} = 1)$ gilt.

Gibt es einen Funktor von einem Gruppoid C auf eine Kategorie C', so ist auch C' ein Gruppoid. Ist Φ ein Funktor von einem Gruppoid C in ein Gruppoid C', so ist $\Phi(x^{-1}) = (\Phi(x))^{-1}$ für jedes $x \in C_0$. Die Brandtschen Gruppoide $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ und $C' = [C'_0, \alpha', \beta', \varphi']$ sind genau dann isomorph, wenn $\alpha(C_0) = \alpha'(C'_0)$ ist und

[11]) Die leere Menge wird als ein minimales Erzeugendensystem der leeren Kategorie betrachtet.

bei $C_0 \neq \emptyset$, $C'_0 \neq \emptyset$ die zu einer maximalen Teilgruppe von C gehörige Gruppe zu der zu einer maximalen Teilgruppe von C' gehörige Gruppe isomorph ist.

Ist R eine ausgezeichnete Kongruenzrelation einer Kategorie C, so ist C/R ein Gruppoid, wenn C speziell ein Gruppoid ist. Ist C ein Gruppoid und R eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von C, so heisst C/R das *Faktorgruppoid von C nach R*.

II. FREIE KATEGORIEN

Es sei $F_0 = \bigcup_{k \in \{0\} \cup N} W_k$ (S. 428) die Menge aller Wege über einem gerichteten Graphen $C = [C_0, \alpha, \beta]$, und es seien α_f, β_f die Operationen in F_0 mit $D(\alpha_f) = D(\beta_f) = F_0$ und für jedes $w \in F_0$:

$$\alpha_f(w) = (e, e), \quad \beta_f(w) = (e', e'),$$

wenn e der in w an erster Stelle stehende Eckpunkt und e' der in w an letzter Stelle stehende Eckpunkt von C ist. Weiterhin sei φ_f die Operation in F_0 mit $D(\varphi_f) = \{(w, w'): w, w' \in F_0 \wedge \beta_f(w) = \alpha_f(w')\}$ und für jedes $(w, w') \in D(\varphi_f)$

$$ww' = \begin{cases} (e, x_1, x_2, \ldots, x_m, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, e''), \text{ falls } w = (e, x_1, x_2, \ldots, x_m, e'), \\ \qquad\qquad w' = (e', x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, e'') \in \bigcup_{k \in N} W_k, \\ w, \text{ falls } w' = \beta_f(w), \\ w', \text{ falls } w = \alpha_f(w'). \end{cases}$$

Dann ist $F = [F_0, \alpha_f, \beta_f, \varphi_f]$ eine Kategorie mit $\alpha_f(F_0) = W_0$. Diese nennen wir die *freie Kategorie über C*. Ist F_e die $(e, e) \in \alpha_f(F_0)$ als Element enthaltende zusammenhängende Komponente von F, so ist F_e die freie Kategorie über der $e \in \alpha(C_0)$ als Element enthaltenden zusammenhängenden Komponente C_e des Graphen C.

Die freie Kategorie $F = [F_0, \alpha_f, \beta_f, \varphi_f]$ über einem gerichteten Graphen $C = [C_0, \alpha, \beta]$ hat genau ein minimales Erzeugendensystem. Ist I die Menge der isolierten Eckpunkte von C, so ist die Teilmenge $X = W_1 \cup \{(e, e): e \in I\}$ von F_0 ein minimales Erzeugendensystem von F. Jedes Element $(e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e')$ von $F_0 - \alpha_f(F_0)$ lässt sich nämlich als Produkt von Elementen von W_1 in F darstellen:

$$(e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e') = (e, x_1, \beta(x_1)) (\alpha(x_2), x_2, \beta(x_2)) \ldots (\alpha(x_n), x_n, e'),$$

und es ist $\alpha_f(X) \cup \beta_f(X) = \alpha(F_0)$. Weiterhin lässt sich kein Element w von W_1 als Produkt von Elementen von $W_1 - \{w\}$ darstellen, und es gilt

$$\forall e(e \in I \Rightarrow (e, e) \notin P(\alpha_f)(X - \{(e, e)\}) \cup P(\beta_f)(X - \{(e, e)\})).$$

Ist X' ein minimales Erzeugendensystem von F, so ist notwendig $W_1 \subseteq X'$ und $\{(e, e): e \in I\} \subseteq X'$, also $X \subseteq X'$ und damit $X' = X$.

Satz 1. *Jede Kategorie* $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ *ist isomorph zu einer Faktorkategorie der freien Kategorie* $F = [F_0, \alpha_f, \beta_f, \varphi_f]$ *über* $\vec{C} = [C_0, \alpha, \beta]$.

Beweis. Offenbar ist die Abbildung Φ von F_0 auf C_0 mit

$$\Phi(w) = \begin{cases} x_1 x_2 \ldots x_n, \text{ falls } w = (e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e') \in F_0 - \alpha_f(F_0) \\ e, \text{ falls } w = (e, e) \in \alpha_f(F_0) \end{cases}$$

ein Funktor von F auf C. Man beachte dabei, dass $P(\Phi)(X \cup \alpha(C_0)) = C_0$ gilt, wenn X das minimale Erzeugendensystem von F ist. Weiterhin ist $P(\Phi^{(2)})(D(\varphi_f)) = D(\varphi)$. Demnach ist $F/R \simeq C$, wenn R die zu dem Funktor Φ von F auf C gehörige Kongruenzrelation von F ist.

Satz 2. *Jede Kategorie ist isomorph zu einer Faktorkategorie der freien Kategorie über einem Grundgraphen.*

Beweis. Es seien $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ eine Kategorie, $F = [F_0, \alpha_f, \beta_f, \varphi_f]$ die freie Kategorie über $\vec{C} = [C_0, \alpha, \beta]$ und Λ die Abbildung von $F_0 = \bigcup_{k \in \{0\} \cup N} W_k$ (S. 428) in $\{0\} \cup N$ mit $w \in W_{\Lambda(w)}$ für jedes $w \in F_0$. Schliesslich sei $(E_w)\, w \in F_0 - \alpha_f(F_0)$ eine Familie von Mengen mit

$$\Big(\bigcup_{w \in F_0 - \alpha_f(F_0)} E_w\Big) \cap C_0 = \emptyset\,,$$

$$\forall w \forall w' (w, w' \in F_0 - \alpha_f(F_0) \wedge w \neq w' \Rightarrow E_w \cap E_{w'} = \emptyset)$$

und

$$\forall w (w \in F_0 - \alpha_f(F_0) \Rightarrow \overline{\overline{E}}_w = \Lambda(w) + 1)\,,$$

und $(\Delta_w)_{w \in F_0 - \alpha_f(F_0)}$ sei eine Familie von eineindeutigen Abbildungen, wobei Δ_w für jedes $w \in F_0 - \alpha_f(F_0)$ eine Abbildung von $E(w)$ (S. 428) in E_w ist. Für jedes $w = (e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e') \in F_0 - \alpha_f(F_0)$ seien weiter α_w und β_w die Operationen in $E(w) \cup E_w$ mit $D(\alpha_w) = D(\beta_w) = E(w) \cup E_w$ und mit

$$\alpha_w(x) = \begin{cases} \Delta_w(x), & \text{falls } x \in E(w), \\ x, & \text{falls } x \in E_w \end{cases}$$

und

$$\beta_w(x) = \begin{cases} \Delta_w(x_{i+1}), \text{ falls } x = x_i \text{ mit } i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \\ e \text{ mit } e \in E_w - \Delta_w(E(w)), \text{ falls } x = x_n, \\ x, \text{ falls } x \in E_w. \end{cases}$$

Dann sind die Algebren $G_w = [E(w) \cup E_w, \alpha_w, \beta_w]$ mit $w \in F_0 - \alpha_f(F_0)$ für jedes gestreckte Graphen. Offenbar ist $G_{w'} \neq G_{w''}$ bei beliebigen $w', w'' \in F_0 - \alpha_f(F_0)$ mit $w' \neq w''$.

Es sei weiter I die Menge der isolierten Einheiten von C. Im Falle, dass $I \neq \emptyset$ ist, wählen wir drei paarweise elementfremde, zu I gleichmächtige Mengen X, E und E' und je eine eineindeutige Abbildung Θ von I auf X, Ξ von I auf E und Ξ' von I auf E'. Dann ist für jedes $i \in I$, die Algebra $G_i = [\{\Theta(i), \Xi(i), \Xi'(i)\}, \alpha_i, \beta_i]$ ein gestreckter Graph, wenn α_i und β_i die vollständigen einstelligen Operationen in $\{\Theta(i), \Xi(i), \Xi'(i)\}$ mit $\alpha_i(\Theta(i)) = \Xi(i)$, $\beta_i(\Theta(i)) = \Xi'(i)$, $\alpha_i(\Xi(i)) = \beta_i(\Xi(i)) = \Xi(i)$, $\alpha_i(\Xi'(i)) = \beta_i(\Xi'(i)) = \Xi'(i)$ sind.

Ist $\Sigma = I \cup (F_0 - \alpha_f(F_0))$, so ist also $G = \sum_{\sigma \in \Sigma} G_\sigma$ ein Grundgraph. Es sei nun $\tilde{F} = [\tilde{F}_0, \tilde{\alpha}_f, \tilde{\beta}_f, \tilde{\varphi}_f]$ die freie Kategorie über diesem Grundgraphen $G = [G_0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$. Dann ist die Abbildung Φ von $\tilde{F}_0$ auf F_0 mit

$$\Phi(\tilde{w}) = \begin{cases} (i, i), \text{ falls } \tilde{w} \in \{((i, \Xi(i)), (i, \Theta(i)), (i, \Xi'(i))), \\ ((i, \Xi(i)), (i, \Xi(i))), ((i, \Xi'(i)), (i, \Xi'(i)))\} \text{ mit } i \in I, \\ (\alpha(x), \alpha(x)), \text{ falls } \tilde{w} = ((w, e), (w, e)) \\ \quad \text{mit } w \in F_0 - \alpha_f(F_0),\ e = \alpha_w(x),\ x \in E(w), \\ (\beta(x'), \beta(x')), \text{ falls } \tilde{w} = ((w, e), (w, e)) \\ \quad \text{mit } w \in F_0 - \alpha_f(F_0),\ e = \beta_w(x'),\ x' \in E(w), \\ (\alpha(x_1), x_1, x_2, \ldots, x_n, \beta(x_n)), \text{ falls} \\ \quad \tilde{w} = ((w, e), (w, x_1), (w, x_2), \ldots, (w, x_n), (w, e')) \in \\ \quad \in \tilde{F}_0 - \tilde{\alpha}_f(\tilde{F}_0) \text{ mit } w \in F_0 - \alpha_f(F_0) \end{cases}$$

offensichtlich ein Funktor von $\tilde{F}$ auf F. Für diesen gilt insbesondere $P(\Phi^{(2)})(D(\tilde{\varphi}_f)) = D(\varphi_f)$. Es sei nämlich (w, w') ein Element von $D(\varphi_f)$. Bei $w' = \beta_f(w)$ sei $\tilde{w}$ ein Element von $\tilde{F}$ mit $\Phi(\tilde{w}) = w$. Dann ist wegen $w' = \beta_f(\Phi(\tilde{w})) = \Phi(\tilde{\beta}_f(\tilde{w}))$ gewiss $\Phi^{(2)}((\tilde{w}, \tilde{\beta}_f(\tilde{w}))) = (w, w')$, also $(w, w') \in P(\Phi^{(2)})(D(\tilde{\varphi}_f))$. Das gilt entsprechend auch, wenn $w = \alpha_f(w')$ ist. Sind $w = (e, x_1, x_2, \ldots, x_m, e')$ und $w' = (e', x_1', x_2', \ldots, x_n', e'')$ Elemente von $F_0 - \alpha_f(F_0)$, so sind $\tilde{w} = ((ww', \alpha_{ww'}(x_1)), (ww', x_1), (ww', x_2), \ldots, (ww', x_m), (ww', \beta_{ww'}(x_m)))$ und $\tilde{w}' = (ww', \alpha_{ww'}(x_1')), (ww', x_1'), (ww', x_2'), \ldots, (ww', x_n'), (ww', \beta_{ww'}(x_n')))$ Elemente von $\tilde{F}_0 - \tilde{\alpha}_f(\tilde{F}_0)$ mit $(\tilde{w}, \tilde{w}') \in D(\tilde{\varphi}_f)$ und $\Phi^{(2)}((\tilde{w}, \tilde{w}')) = (w, w')$. Folglich ist auch in diesem Fall $(w, w') \in P(\Phi^{(2)})(D(\tilde{\varphi}_f))$. Demnach ist $\tilde{F}/Q \simeq F$, wenn Q die zu dem Funktor Φ von $\tilde{F}$ auf F gehörige Kongruenzrelation von $\tilde{F}$ ist. Bezeichnet $[\tilde{w}]$ für jedes $\tilde{w} \in \tilde{F}_0$ die $\tilde{w}$ als Element enthaltende Äquivalenzklasse mod Q, so ist die Abbildung Ψ von $\tilde{F}/Q$ auf F mit $\Psi([\tilde{w}]) = \Phi(\tilde{w})$ für jedes $\tilde{w} \in \tilde{F}_0$ eine isomorphe Abbildung von $\tilde{F}/Q$ auf F.

Es sei nun R eine nach Satz 1 existierende Kongruenzrelation von F mit $F/R \simeq C$, und es sei $\tilde{R}$ die Relation in $\tilde{F}$ mit

$$\forall \tilde{w} \forall \tilde{w}' (\tilde{w} \tilde{R} \tilde{w}' \Leftrightarrow \tilde{w}, \tilde{w}' \in \tilde{F}_0 \wedge \Psi([\tilde{w}])\, R\, \Psi([\tilde{w}'])).$$

Dann ist $\tilde{R}$ eine Kongruenzrelation von $\tilde{F}$ mit $\tilde{F}/\tilde{R} \simeq F/R$, also $\tilde{F}/\tilde{R} \simeq C$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Satz 3. *Ist* $F = [F_0, \alpha_f, \beta_f, \varphi_f]$ *die freie Kategorie über einem Grundgraphen* $G = [G_0, \alpha, \beta]$ *und ist* C' *eine beliebige Kategorie, so gibt es zu jeder mit den Definitionsbereichen von* F *und* C' *verträglichen Abbildung* Φ^* *von dem Erzeugendensystem* $X = \{(\alpha(x), x, \beta(x)): x \in G_0 - \alpha(G_0)\}$ *von* F *in* C'_0 *genau einen Funktor* Φ *von* F *in* C' *mit* $\Phi^* = \Phi \mid X$.

Beweis. Da ein Grundgraph keine isolierten Eckpunkte hat, so ist X ein Erzeugendensystem von F. Es sei nun $C' = [C'_0, \alpha', \beta', \varphi']$ eine beliebige Kategorie und Φ^* eine mit den Definitionsbereichen von F und C' verträgliche Abbildung von X in C'_0. Wir betrachten dann die Abbildung Φ von F in C' mit

$$(2)\quad \Phi(w) = \begin{cases} \Phi^*((e, x_1, \beta(x_1)))\, \Phi^*((\alpha(x_2), x_2, \beta(x_2))) \ldots \Phi^*((\alpha(x_n), x_n, e')), \text{ falls} \\ \quad w = (e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e') \in F_0 - \alpha_f(F_0), \\ \alpha'(\Phi^*((\alpha(x), x, \beta(x)))), \text{ falls} \\ \quad w = (\alpha(x), \alpha(x)) \text{ mit } x \in G_0 - \alpha(G_0), \\ \beta'(\Phi^*((\alpha(y), y, \beta(y)))), \text{ falls} \\ \quad w = (\beta(y), \beta(y)) \text{ mit } y \in G_0 - \alpha(G_0). \end{cases}$$

Hierbei ist zu beachten, dass wegen der Verträglichkeit von Φ^* mit den Definitionsbereichen von F und C' das Produkt $\Phi^*((e, x_1, \beta(x_1)))\, \Phi^*((\alpha(x_2), x_2, \beta(x_2))) \ldots$ $\ldots \Phi^*((\alpha(x_n), x_n, e'))$ bei beliebigem $(e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e') \in F_0 - \alpha_f(F_0)$ in C' existiert. Da G ein Grundgraph ist, so sind weiter x und y in (2) eindeutig bestimmt. Schliesslich gibt es zu jedem $(e, e) \in P(\alpha_f)(X) \cap P(\beta_f)(X)$ Elemente x und y von $G_0 - \alpha(G_0)$ mit $\alpha(x) = \beta(y) = e$, und es sind dann $(e, x, \beta(x))$ und $(\alpha(y), y, e)$ Elemente von X mit $((\alpha(y), y, e), (e, x, \beta(x))) \in D(\varphi_f)$. Folglich ist $(\Phi^*((\alpha(y), y, e)), \Phi^*((e, x, \beta(x)))) \in D(\varphi')$ und damit $\beta'(\Phi^*((\alpha(y), y, e))) = \alpha'(\Phi^*((e, x, \beta(x))))$.

Wie man leicht erkennt, ist Φ ein Funktor von F in C' mit $\Phi \mid X = \Phi^*$. Sind Φ und Ψ Funktoren von F in C' mit $\Phi \mid X = \Psi \mid X = \Phi^*$, so ist $\{w: w \in F_0 \wedge \Psi(w) = \Phi(w)\}$ der Träger einer Teilkategorie F' von F. Wegen $X \subseteq F'_0$ ist $F' = F$, also $\Psi = \Phi$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Bemerkung. Es sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse paarweise typengleicher vollständiger Algebren. Eine Algebra $A \in \mathfrak{K}$ wird (z. B. nach [9], S. 25) eine $\mathfrak{K}$-*freie Algebra* genannt, wenn sie die folgende Bedingung erfüllt: A_0 besitzt eine Teilmenge X mit

$$\forall A'(A' \in \mathfrak{K} \wedge A' \in \mathfrak{T}(A) \wedge X \subseteq A'_0 \Rightarrow A' = A)$$

und

$$\forall B \forall \Phi^*(B \in \mathfrak{K} \wedge \Phi^* \in B_0^X \Rightarrow \exists \Phi(\Phi \in \mathfrak{H}(A, B) \wedge \Phi|X = \Phi^*)),$$

wobei $\mathfrak{T}(A)$ die Menge der Teilalgebren von A und $\mathfrak{H}(A, B)$ die Menge der homomorphen Abbildungen von A in B ist. Ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse von paarweise typengleichen, jedoch nicht notwendig nur vollständigen Algebren, so könnte man diese Definition noch aufrecht erhalten, wenn man von der Abbildung Φ^* fordert, dass sie eine mit den Definitionsbereichen von A und B verträgliche Abbildung von X in B sein soll, was bei Vorliegen einer Klasse $\mathfrak{K}$ von paarweise typengleichen vollständigen Algebren keine Einschränkung bedeutet. Ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse von Kategorien, so ist in diesem Sinn nach Satz 3 jede Kategorie $C \in \mathfrak{K}$, die zu der freien Kategorie über einem Grundgraphen isomorph ist, eine $\mathfrak{K}$-freie Algebra.

Der folgende Satz ist ein Kriterium dafür, dass eine Kategorie zu der freien Kategorie über einem Graphen isomorph ist.

Satz 4. *Eine Kategorie C ist genau dann zu der freien Kategorie über einem Graphen isomorph, wenn sich jedes von einer Einheit verschiedene Element von C eindeutig als Produkt von irreduziblen Elementen von C darstellen lässt, jedoch keine Einheit von C als Produkt von irreduziblen Elementen von C darstellbar ist.*

Beweis. Da sich jedes von einer Einheit verschiedene Element der freien Kategorie F über einem Graphen $G = [G_0, \alpha, \beta]$ eindeutig als Produkt von Elementen von $W_1 = \{(\alpha(x), x, \beta(x)) : x \in G_0 - \alpha(G_0)\}$ in F darstellen lässt und W_1 offensichtlich gerade die Menge der irreduziblen Elemente von F ist, so lässt sich jedes von einer Einheit verschiedene Element einer zu F isomorphen Kategorie C eindeutig als Produkt von irreduziblen Elementen von C in C darstellen. Eine Einheit von F ist nicht als Produkt von Elementen von W_1 in F darstellbar, so dass in C keine Einheit als Produkt von irreduziblen Elementen von C darstellbar ist.

Es sei nun umgekehrt $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ eine Kategorie mit der Eigenschaft, dass sich jedes Element von $C_0 - \alpha(C_0)$ eindeutig als Produkt von irreduziblen Elementen von C in C darstellen lässt, eine Einheit von C jedoch nicht. Ist K die Menge der irreduziblen Elemente von C und I die Menge der isolierten Einheiten von C, so ist $G_0 = K \cup P(\alpha)(K) \cup P(\beta)(K) \cup I$ der Träger eines Untergraphen von $\vec{C} = [C_0, \alpha, \beta]$. Die Abbildung Φ von C in die freie Kategorie $F = [F_0, \alpha_f, \beta_f, \varphi_f]$ über G mit

$$\Phi(x) = \begin{cases} (\alpha(x), p_1, p_2, \ldots, p_n, \beta(x)), \text{ falls } & x = p_1 p_2 \ldots p_n \in C_0 - \alpha(C_0) \text{ mit} \\ \quad p_1, p_2, \ldots, p_n \in K, & \\ (e, e), \text{ falls } x = e \in \alpha(C_0) & \end{cases}$$

ist offenbar ein Funktor von C in F. Weiterhin ist $P(\Phi)(C_0 - \alpha(C_0)) = F_0 - \alpha_f(F_0)$, $P(\Phi)(\alpha(C_0)) = \alpha_f(F_0)$, und es gilt $\forall x \forall y (x, y \in C_0 \wedge \Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow x = y)$. Demnach ist Φ eine isomorphe Abbildung von C auf F, und folglich ist C eine zu der freien Kategorie über einem Graphen isomorphe Kategorie.

Der nachstehende Satz enthält eine hinreichende Bedingung dafür, dass eine Teilkategorie einer zu der freien Kategorie über einem Graphen isomorphen Kategorie ebenfalls eine zu der freien Kategorie über einem Graphen isomorphe Kategorie ist.[12])

Satz 5. *Es sei* $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ *eine zu der freien Kategorie über einem Graphen isomorphe Kategorie, und* $C' = [C'_0, \alpha', \beta', \varphi']$ *sei eine Teilkategorie von* C. *Stimmt die von der Menge* K' *der bez.* C' *irreduziblen Elemente von* C *erzeugte Teilkategorie von* C *mit* C' *überein, so ist auch* C' *zu der freien Kategorie über einem Graphen isomorph.*

Beweis. Die von der Menge K' der bez. C' irreduziblen Elemente von C erzeugte Teilkategorie von C stimme mit C' überein. Offenbar ist dann K' gerade die Menge der irreduziblen Elemente der Kategorie C'. Weiterhin lässt sich jedes von einer Einheit verschiedene Element x von C' als Produkt von Elementen von K' in C' darstellen. Sind $x = p'_1 p'_2 \dots p'_m$ und $x = q'_1 q'_2 \dots q'_n$ Darstellungen von $x \in C'_0 - \alpha'(C'_0)$ als Produkt von Elementen von K' und ist K die Menge der irreduziblen Elemente von C, so gibt es nach Satz 4 für jedes der Elemente p'_j mit $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ bzw. q'_k mit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ von C Elemente $p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jr_j}$ $(r_j \in N)$ bzw. $q_{k1}, q_{k2}, \dots, q_{ks_k}$ $(s_k \in N)$ von K mit $p'_j = p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jr_j}$ bzw. $q'_k = q_{k1} q_{k2} \dots q_{ks_k}$. Dann ist

(3) $$x = p_{11} p_{12} \cdots p_{1r_1} p_{21} p_{22} \cdots p_{2r_2} \cdots p_{m1} p_{m2} \cdots p_{mr_m}$$

und

(4) $$x = q_{11} q_{12} \cdots q_{1s_1} q_{21} q_{22} \cdots q_{2s_2} \cdots q_{n1} q_{n2} \cdots q_{ns_n} \,.$$

Da die Darstellung von x als Produkt von Elementen von K nach Satz 4 eindeutig ist, so ist notwendig

(5) $$r_1 + r_2 + \dots + r_m = s_1 + s_2 + \dots + s_n \,,$$

und die auf der rechten Seite von (3) und (4) an entsprechender Stelle stehenden Elemente stimmen überein. Bei $r_1 < s_1$ wäre $q'_1 = p'_1 u$ mit $p'_1 = p_{11} p_{12} \cdots p_{1r_1} \neq \alpha(q'_1)$, $u = q_{1,r_1+1} q_{1,r_1+2} \cdots q_{1s_1} \neq \beta(q'_1)$ und $p'_1 \in C'_0$. Dieses steht im Widerspruch dazu, dass q'_1 ein bez. C' irreduzibles Element von C ist. Entsprechend führt auch $s_1 < r_1$ zu einem Widerspruch, so dass also $r_1 = s_1$ ist. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $m \leqq n$ ist. Wir erhalten so nacheinander $r_1 = s_1, r_2 = s_2, \dots, r_m = s_m$ und folglich $p'_1 = q'_1, p'_2 = q'_2, \dots, p'_m = q'_m$. Wegen (5) ist dann aber notwendig noch $m = n$. Demnach ist jedes Element x von $C'_0 - \alpha'(C'_0)$ eindeutig als Produkt von Elementen von K' darstellbar. Da sich weiter offenbar keine Einheit von C' als Produkt von Elementen von K' darstellen lässt, so ist C' nach Satz 4 zu der freien Kategorie über einem Graphen isomorph.

Satz 6. *Ist* $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ *eine zu der freien Kategorie über einem Graphen isomorphe Kategorie, so ist auch jede volle Teilkategorie von* C *eine zu der freien Kategorie über einem Graphen isomorphe Kategorie.*

---

[12]) Diese Bemerkung verdanken wir H. Reichel.

Beweis. Zunächst sei $C' = [C'_0, \alpha', \beta', \varphi']$ eine volle Teilkategorie von C ohne isolierte Einheiten. Weiterhin sei K die Menge der irreduziblen Elemente von C und K' die Menge der bez. C' irreduziblen Elemente von C. Ist x ein Element von $C'_0 - \alpha'(C'_0)$, so lässt dieses sich nach Satz 4 eindeutig als Produkt von Elementen von K darstellen. Diese Darstellung sei $x = p_1 p_2 \dots p_n$. Nun sei k_1 die kleinste Zahl aus $\{1, 2, \dots, n\}$ mit $\beta(p_{k_1}) \in C'_0$. Dann ist y_1 mit $y_1 = p_1 p_2 \dots p_{k_1}$ wegen $\alpha(y_1) = \alpha(x) \in C'_0$, $\beta(y_1) = \beta(p_{k_1}) \in C'_0$ ein Element der vollen Teilkategorie C' von C. Ist $y_1 = u_1 v_1$ mit $u_1, v_1 \in C_0$, $u_1 \neq \alpha(y_1)$, $v_1 \neq \beta(y_1)$ in C, so ist notwendig $k_1 > 1$ und $u_1 = p_1 p_2 \dots p_l$, $v_1 = p_{l+1} \cdot p_{l+2} \dots p_{k_1}$ mit einem $l \in \{1, 2, \dots, k_1 - 1\}$. Auf Grund der Wahl von k_1 ist also weder u_1 noch v_1 ein Element von C'. Folglich ist $y_1 \in C'_0 - \alpha'(C'_0)$ ein Element von K'. Bei $k_1 < n$ sei weiter k_2 die kleinste Zahl aus $\{k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, n\}$ mit $\beta(p_{k_2}) \in C'_0$. Dann ist y_2 mit $y_2 = p_{k_1+1} p_{k_1+2} \dots p_{k_2}$ wegen $\alpha(y_2) = \alpha(p_{k_1+1}) = \beta(p_{k_1}) \in C'_0$ und $\beta(y_2) = \beta(p_{k_2}) \in C'_0$ ebenfalls ein Element von C'. Entsprechend wie vorhin erkennt man, dass auch y_2 ein Element von K' ist. Auf diese Weise erhält man eine Darstellung von x als Produkt von Elementen von K'. Demnach stimmt die von K' erzeugte Teilkategorie von C mit C' überein, so dass C' nach Satz 5 eine zu der freien Kategorie über einem Graphen isomorphe Kategorie ist.

Es sei nun $C' = [C'_0, \alpha', \beta', \varphi']$ eine beliebige volle Teilkategorie von C, und I sei die Menge der isolierten Einheiten von C'. Dann ist $C'_0 - I$ der Träger einer vollen Teilkategorie C'' von C ohne isolierte Einheiten. Nach dem Vorangehenden gibt es zu C'' einen Graphen $G = [G_0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$, so dass C'' zu der freien Kategorie über G isomorph ist. Dabei können wir annehmen, dass $G_0 \cap I = \emptyset$ ist. Sind $\tilde{\alpha}'$ und $\tilde{\beta}'$ die Operationen in $G'_0 = G_0 \cup I$ mit $D(\tilde{\alpha}') = D(\tilde{\beta}') = G'_0$ und mit

$$\tilde{\alpha}'(x) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(x), & \text{falls } x \in G_0, \\ x, & \text{falls } x \in I, \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}'(x) = \begin{cases} \tilde{\beta}(x), & \text{falls } x \in G_0, \\ x, & \text{falls } x \in I, \end{cases}$$

so ist C' zu der freien Kategorie über dem Graphen $G' = [G'_0, \tilde{\alpha}', \tilde{\beta}']$ isomorph.

III. FREIE GRUPPOIDE

Es sei $G = [G_0, \alpha, \beta, \gamma]$ ein d-Graph und $F = [F_0, \alpha_f, \beta_f, \varphi_f]$ die freie Kategorie über $\vec{G} = [G_0, \alpha, \beta]$. Ist Q die Menge der Elemente (w, w') von $F_0 \times F_0$, für die $\Lambda(w) = \Lambda(w') + 2$ ist und für die w' aus w durch Weglassen von zwei nicht notwendig verschiedenen, in w nebeneinanderstehenden Elementen x, y von G_0 mit $y = \gamma(x)$ erhalten werden kann, so sei T die durch die Relation Q in F_0 induzierte Äquivalenzrelation in F_0. Für jedes $w \in F_0$ bezeichnen wir die w enthaltende Äquivalenzklasse mod T mit $[w]$. Offenbar gilt

$$\forall w \forall w' (w T w' \Rightarrow \alpha_f(w) = \alpha_f(w') \wedge \beta_f(w) = \beta_f(w'))$$

und

$$\forall w_1 \forall w_2 \forall w_1' \forall w_2' ((w_1, w_2), (w_1', w_2') \in D(\varphi_f) \wedge w_1 T w_1' \wedge w_2 T w_2' \Rightarrow (w_1 w_2)\, T(w_1' w_2'))\,,$$

so dass T eine ausgezeichnete Kongruenzrelation von F ist. Für jedes $w = (e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e') \in F_0 - \alpha_f(F_0)$ ist auch $w' = (e', \gamma(x_n), \gamma(x_{n-1}), \ldots, \gamma(x_2), \gamma(x_1), e)$ ein Element von $F_0 - \alpha_f(F_0)$, und es gilt $\beta_f(w) = \alpha_f(w')$, $\beta_f(w') = \alpha_f(w)$ sowie $ww' T \alpha_f(w)$ und $w'w T \beta_f(w)$. Folglich ist jedes Element der Faktorkategorie $\bar{F} = F/T$ invertierbar, d. h. $\bar{F}$ speziell ein Gruppoid. Dieses heisst das *freie Gruppoid über dem d-Graphen G.*

Es sei $G = [G_0, \alpha, \beta, \gamma]$ ein d-Graph, und für jedes $e \in \alpha(G_0)$ sei G_e die e als Element enthaltende zusammenhängende Komponente von G. Weiterhin sei F die freie Kategorie über $\vec{G} = [G_0, \alpha, \beta]$, und für jedes $w \in F_0$ sei $[w]$ das w als Element enthaltende Element des freien Gruppoids $\bar{F}$ über G. Dann stimmt für jedes $e \in \alpha(G_0)$ das freie Gruppoid $\bar{F}_e$ über G_e mit dem $[(e, e)]$ als Element enthaltenden maximalen Brandtschen Teilgruppoid von $\bar{F}$ überein. Das freie Gruppoid über einem d-Graphen G ist genau dann ein Brandtsches Gruppoid, wenn G ein zusammenhängender d-Graph ist.

Es sei $(G_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie zusammenhängender d-Graphen, und es sei $\bar{F}_\iota$ für jedes $\iota \in I$ das freie Gruppoid über G_ι. Ist dann G ein d-Graph mit $G \simeq \sum_{\iota \in I} G_\iota$ und ist $\bar{F}$ die freie Kategorie über G, so ist $\bar{F} \simeq \sum_{\iota \in I} \bar{F}_\iota$.

Satz 7. *Jedes Gruppoid $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ ist isomorph zu einem Faktorgruppoid des freien Gruppoids über dem d-Graphen $\overleftrightarrow{C} = [C_0, \alpha, \beta, \gamma]$, wobei γ die Operation in C_0 mit $D(\gamma) = C_0$ und $\gamma(x) = x^{-1}$ für jedes $x \in C_0$ ist.*

Beweis. Es sei $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ ein Gruppoid, $F = [F_0, \alpha_f, \beta_f, \varphi_f]$ die freie Kategorie über $\vec{C} = [C_0, \alpha, \beta]$ und $\bar{F} = [F_0/T, \bar{\alpha}_f, \bar{\beta}_f, \bar{\varphi}_f]$ das freie Gruppoid über $\overleftrightarrow{C} = [C_0, \alpha, \beta, \gamma]$. Wir bezeichnen wieder für jedes $w \in F_0$ die w als Element enthaltende Äquivalenzklasse mod T mit $[w]$. Die Abbildung $\bar{\Phi}$ von $\bar{F}$ auf C mit

$$\bar{\Phi}([w]) = \begin{cases} x_1 x_2 \ldots x_n, & \text{falls } w = (e, x_1, x_2, \ldots, x_n, e') \in F_0 - \alpha_f(F_0), \\ e, & \text{falls } w = (e, e) \in \alpha_f(F_0) \end{cases}$$

ist offenbar ein Funktor von $\bar{F}$ auf C mit $P(\bar{\Phi}^{(2)})\,(D(\bar{\varphi}_f)) = D(\varphi)$. Folglich ist $\bar{F}/\bar{R} \simeq C$, wenn $\bar{R}$ die zu dem Funktor $\bar{\Phi}$ von $\bar{F}$ auf C gehörige Kongruenzrelation von $\bar{F}$ ist.

Satz 8. *Das freie Gruppoid über einem Baum ist ein schlichtes Gruppoid, und jedes schlichte Gruppoid ist isomorph zu dem freien Gruppoid über einem Baum.*

Beweis. Es sei $G = [G_0, \alpha, \beta, \gamma]$ ein Baum, $F = [F_0, \alpha_f, \beta_f, \varphi_f]$ die freie Kategorie über $\vec{G} = [G_0, \alpha, \beta]$ und $\bar{F} = [F_0/T, \bar{\alpha}_f, \bar{\beta}_f, \bar{\varphi}_f]$ das freie Gruppoid über G, und wir bezeichnen wieder für jedes $w \in F_0$ die w als Element enthaltende Äquivalenzklasse mod T mit $[w]$. Da G ein Baum ist, so gilt

$$\forall w(w \in F_0 \wedge \bar{\alpha}_f([w]) = \bar{\beta}_f([w]) \Rightarrow [w] = \bar{\alpha}_f([w])) .$$

Jede maximale Teilgruppe des Gruppoids $\bar{F}$ enthält also nur ein Element, und folglich ist $\bar{F}$ ein schlichtes Gruppoid.

Es sei nun $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ ein schlichtes Brandtsches Gruppoid. Bei $C_0 = \emptyset$ ist C das freie Gruppoid über dem leeren d-Graphen, der mit zu den Bäumen zu rechnen ist. Es sei daher $C_0 \neq \emptyset$, und e sei eine beliebige festgewählte Einheit von C. Dann ist $G_0 = \{x: x \in C_0 \wedge \alpha(x) = e \vee \beta(x) = e\} \cup \alpha(C_0)$ die Trägermenge eines Untergraphen $\vec{G} = [G_0, \alpha', \beta']$ von $\vec{C} = [C_0, \alpha, \beta]$. Ist γ' die Operation in G_0 mit $D(\gamma') = G_0$ und $\gamma'(x) = x^{-1}$ für jedes $x \in G_0$, wobei x^{-1} das zu x in C inverse Element ist, so ist $G = [G_0, \alpha', \beta', \gamma']$ ein zusammenhängender Baum. Das freie Gruppoid $\bar{F} = [F_0/T, \bar{\alpha}_f, \bar{\beta}_f, \bar{\varphi}_f]$ über G ist nach dem Vorangehenden ein schlichtes Brandtsches Gruppoid. Da die Abbildung Θ von $\alpha(C_0)$ auf $\bar{\alpha}_f(F_0/T)$ mit $\Theta(e') = [(e', e')]$ für jedes $e' \in \alpha(C_0)$ eine eineindeutige Abbildung ist, so sind die beiden schlichten Brandtschen Gruppoide C und $\bar{F}$ isomorph.

Ist $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ ein beliebiges schlichtes Gruppoid, V ein Repräsentantensystem der für $\vec{C}$ zu R^0 (S. 427) gehörigen Klasseneinteilung von $\alpha(C_0)$ und C_e für jedes $e \in V$ das e als Element enthaltende maximale Brandtsche Teilgruppoid von C, so ist $C \simeq \sum_{e \in V} C_e$. Zu jedem $e \in V$ gibt es nach dem Vorangehenden einen zusammenhängenden Baum G_e, so dass das freie Gruppoid $\bar{F}_e$ über G_e zu dem schlichten Brandtschen Gruppoid C_e isomorph ist. Ist $\bar{F}$ das freie Gruppoid über dem Baum $G = \sum_{e \in V} G_e$, so ist folglich $\bar{F} \simeq \sum_{e \in V} \bar{F}_e \simeq \sum_{e \in V} C_e \simeq C$. Damit ist Satz 8 bewiesen.

Satz 9. *Ein nicht leeres Gruppoid $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ ist genau dann zu dem freien Gruppoid über einem d-Graphen isomorph, wenn für jedes $e \in \alpha(C_0)$ die zu der zu e gehörigen maximalen Teilgruppe von C gehörige Gruppe entweder eine Einheitsgruppe oder eine freie Gruppe ist.*

Beweis: Es seien $G = [G_0, \alpha, \beta, \gamma]$ ein nicht leerer d-Graph, $F = [F_0, \alpha_f, \beta_f, \varphi_f]$ die freie Kategorie über $\vec{G} = [G_0, \alpha, \beta]$ und $\bar{F} = [F_0, \bar{\alpha}_f, \bar{\beta}_f, \bar{\varphi}_f]$ das freie Gruppoid über G. Für jedes $w \in F_0$ bezeichnen wir das w als Element enthaltende Element von $\bar{F}$ mit $[w]$. Ist $G_0 = \alpha(G_0)$, so ist für jedes $e \in \alpha(G_0)$ die zu der zu $[(e, e)]$ gehörigen maximalen Teilgruppe von $\bar{F}$ gehörige Gruppe eine Einheitsgruppe. Wir können daher für das folgende annehmen, dass $G_0 \supset \alpha(G_0)$ ist. Es sei e ein Eckpunkt von G, und $\bar{H}_e = [\bar{H}_{e,0}, \bar{\alpha}_f, \bar{\alpha}_f, \bar{\varphi}_f]$ sei die zu $[(e, e)]$ gehörige maximale Teilgruppe von $\bar{F}$. Sind α' und γ' die Operationen in $G_0^{(e)} = (G_0 - \alpha(G_0)) \cup \{e\}$ mit $D(\alpha') = D(\gamma') = G_0^{(e)}$ und $\alpha'(x) = e, \gamma'(x) = \gamma(x)$ für jedes $x \in G_0^{(e)}$, so ist die Algebra $G^{(e)} = [G_0^{(e)}, \alpha', \alpha', \gamma']$ ein d-Graph.

Es seien nun $F^{(e)} = [F_0^{(e)}, \alpha'_f, \alpha'_f, \varphi'_f]$ die freie Kategorie über $\overrightarrow{G^{(e)}} [G_0^{(e)}, \alpha', \alpha']$ und $\overline{F^{(e)}} = [\overline{F_0^{(e)}}, \bar{\alpha}'_f, \bar{\alpha}'_f, \bar{\varphi}'_f]$ das freie Gruppoid über $G^{(e)}$. Für jedes $w \in F_0^{(e)}$ bezeichnen wir das w als Element enthaltende Element von $\overline{F^{(e)}}$ mit $\langle w\rangle$. Die Abbildung Φ von $\overline{H}_e$ in $\overline{F^{(e)}}$ mit $\Phi([w]) = \langle w\rangle$ für jedes $w \in F_0$ mit $\alpha_f(w) = \beta_f(w) = (e, e)$ ist offenbar ein eineindeutiger Funktor von $\overline{H}_e$ in $\overline{F^{(e)}}$. Folglich ist die Gruppe $[\overline{H}_{e,0}, \bar{\varphi}_f]$ zu einer Untergruppe der Gruppe $[\overline{F_0^{(e)}}, \bar{\varphi}'_f]$ isomorph.

Es sei nun R die Äquivalenzrelation in der nicht leeren Menge $\{\langle(e, x, e)\rangle : x \in G_0^{(e)} - \{e\}\}$ mit

$$\forall x \forall y(\langle(e, x, e)\rangle \, R \, \langle(e, y, e)\rangle \Leftrightarrow x, y \in G_0^{(e)} - \{e\} \wedge (x = y \vee x = \gamma'(y)))\,.$$

Ist X ein Repräsentantensystem der zu R gehörigen Klasseneinteilung dieser Menge, so ist die Gruppe $[\overline{F_0^{(e)}}, \bar{\varphi}'_f]$ offenbar zu der freien Gruppe mit X als System von freien Erzeugenden isomorph. Hat die Gruppe $[\overline{H}_{e,0}, \bar{\varphi}_f]$ mehr als ein Element, so ist diese nach dem Satz von NIELSEN und SCHREIER (man vgl. etwa [8], S. 133) als eine von einer Einheitsgruppe verschiedene, zu einer Untergruppe einer freien Gruppe isomorphe Gruppe eine freie Gruppe.

Es sei nun $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ ein nicht leeres Brandtsches Gruppoid, wobei die zu den maximalen Teilgruppen von C gehörigen Gruppen entweder (sämtlich) Einheitsgruppen oder (sämtlich) freie Gruppen sind. Im ersten Fall ist C ein schlichtes Gruppoid und damit nach Satz 8 zu dem freien Gruppoid über einem d-Graphen isomorph. Wir können daher annehmen, daß die zu den maximalen Teilgruppen von C gehörigen Gruppen freie Gruppen sind. Dann sei e eine beliebige Einheit von C, $H_e = [H_{e,0}, \alpha_e, \alpha_e, \varphi_e]$ die zu e gehörige maximale Teilgruppe von C und X ein System von freien Erzeugenden der freien Gruppe $[H_{e,0}, \varphi_e]$. Weiterhin sei $(u_{e'})_{e' \in \alpha(C_0)}$ eine Familie von Elementen von C mit $\alpha(u_{e'}) = e'$ und $\beta(u_{e'}) = e$ für jedes $e' \in \alpha(C_0)$ und $u_e = e$, und es sei $U = \{u_{e'} : e' \in \alpha(C_0)\}$. Ist $G_0 = X \cup X^{-1} \cup U \cup U^{-1} \cup \alpha(C_0)$ mit $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$, $U^{-1} = \{u_{e'}^{-1} : e' \in \alpha(C_0)\}$ sowie $\alpha' = \alpha \mid G_0$, $\beta' = \beta \mid G_0$ und γ' die Operation in G_0 mit $D(\gamma') = G_0$ und $\gamma'(g) = g^{-1}$ für jedes $g \in G_0$, so ist die Algebra $G = [G_0, \alpha', \beta', \gamma']$ ein zusammenhängender d-Graph. Dabei sind bzw. x^{-1}, $u_{e'}^{-1}$ und g^{-1} bzw. die zu x, $u_{e'}$ und g in C inversen Elemente. Ist $\overline{F} = [\overline{F}_0, \bar{\alpha}'_f, \bar{\beta}'_f, \bar{\varphi}'_f]$ das freie Gruppoid über G, so sind $\bar{\alpha}'_f(\overline{F}_0)$ und $\alpha(C_0)$ gleichmächtig. Jedes Element x von $H_{e,0} - \{e\}$ läßt sich als Produkt von Elementen von $X \cup X^{-1}$ in H_e darstellen:

$$x = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}\,.$$

Dabei sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq 1)$ nicht notwendig paarweise verschiedene Elemente von X, und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sind Elemente von $\{+1, -1\}$. Dann ist die Abbildung Φ von H_e auf die zu $[(e, e)]$ gehörige maximale Teilgruppe von $\overline{F}$ mit

$$\Phi(x) = \begin{cases} [(e, y_1, y_2, \ldots, y_n, e)] \text{ mit } y_j = \begin{cases} x_j & \text{bei } \varepsilon_j = +1, \\ \gamma'(x_j) & \text{bei } \varepsilon_j = -1, \end{cases} \\ \quad \text{falls } x = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \in H_{e,0} - \{e\} \\ \quad \text{mit } x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \text{ und } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{+1, -1\}, \\ [(e, e)], \text{ falls } x = e \end{cases}$$

offenbar eine isomorphe Abbildung von H_e auf diese maximale Teilgruppe von $\bar{F}$. Folglich sind die Brandtschen Gruppoide C und $\bar{F}$ isomorph.

Entsprechend wie am Schluß des Beweises von Satz 8 erkennt man nun, daß ein beliebiges nicht leeres Gruppoid $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ zu dem freien Gruppoid über einem d-Graphen isomorph ist, wenn für jedes $e \in \alpha(C_0)$ die zu der zu e gehörigen maximalen Teilgruppe von C gehörige Gruppe entweder eine Einheitsgruppe oder eine freie Gruppe ist. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Satz 10. *Ist $C = [C_0, \alpha, \beta, \varphi]$ ein zu dem freien Gruppoid über einem d-Graphen isomorphes Gruppoid, so ist auch jedes Teilgruppoid von C zu dem freien Gruppoid über einem d-Graphen isomorph.*

Beweis. Es sei $C' = [C'_0, \alpha', \beta', \varphi']$ ein Teilgruppoid von C. Bei $C'_0 = \emptyset$ ist C' das freie Gruppoid über dem leeren d-Graphen. Wir können daher $C'_0 \neq \emptyset$ annehmen. Es sei dann e eine Einheit von C', und es seien $H_e = [H_{e,0}, \alpha_e, \alpha_e, \varphi_e]$ und $H'_e = [H'_{e,0}, \alpha'_e, \alpha'_e, \varphi'_e]$ bzw. die zu e gehörigen maximalen Teilgruppen von C und C'. Nach Satz 9 ist $[H_{e,0}, \varphi_e]$ eine Einheitsgruppe oder eine freie Gruppe, und folglich ist auch $[H'_{e,0}, \varphi'_e]$ als Untergruppe von $[H_{e,0}, \varphi_e]$ unter Beachtung des Satzes von Nielsen und Schreier eine Einheitsgruppe oder eine freie Gruppe. Da dieses für jedes $e \in \alpha'(C'_0)$ gilt, so ist C' nach Satz 9 zu dem freien Gruppoid über einem d-Graphen isomorph.

Satz 11. *Ist $C = [C_0; \alpha, \beta, \varphi]$ ein zu dem freien Gruppoid über einem d-Graphen isomorphes Gruppoid, ohne isolierte Einheiten so gibt es ein Erzeugendensystem X des Gruppoids C*[13]*) mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem Gruppoid $C' = [C'_0; \alpha', \beta', \varphi']$ und jeder mit den Definitionsbereichen von C und C' verträglichen Abbildung Φ^* von X in C'_0 gibt es genau einen Funktor Φ von C in C' mit $\Phi \mid X = \Phi^*$.*

Beweis. Es sei V ein Repräsentantensystem der für $\vec{C}$ zu R^0 (S. 427) gehörigen Klasseneinteilung von $\alpha(C_0)$. Für jedes $e \in V$ sei weiterhin $H_e = [H_{e,0}; \alpha_e, \alpha_e, \varphi_e]$ die zu e gehörige maximale Teilgruppe von C und C_e das e als Element enthaltende maximale Brandtsche Teilgruppoid von C. Schließlich sei $(Y_e)_{e \in V}$ eine Familie von Mengen, wobei Y_e die leere Menge ist, wenn $\overline{\overline{H}}_{e,0} = 1$ gilt und ein beliebiges festgewähltes System von freien Erzeugenden der freien Gruppe $[H_{e,0}; \varphi_e]$ ist, wenn $\overline{\overline{H}}_{e,0} > 1$ gilt. Ferner sei zu jedem $e \in V$ genau eine Familie $(u_{(e,e')})_{e' \in P(\alpha)(C_{e,0}) - \{e\}}$ von Elementen von C_e mit $\alpha(u_{(e,e')}) = e$, und $\beta(u_{(e,e')}) = e'$ gewählt, und es sei

$$U_e = \{u_{(e,e')}: e' \in P(\alpha)(C_{e,0}) - \{e\}\} \quad \text{für jedes} \quad e \in V.$$

Dann ist $X = \bigcup_{e \in V} (Y_e \cup Z_e)$ ein Erzeugendensystem des Gruppoids C.

[13]) Damit ist hier gemeint, dass X eine Teilmenge von C_0 ist, für die kein von C verschiedenes Teilgruppoid C' von C mit $X \subseteq C'_0$ existiert.

Dabei ist $Z_e = U_e$, wenn $\overline{\overline{H}}_{e,0} > 1$ oder $\overline{\overline{H}}_{e,0} = 1$ und $\overline{\overline{P(\alpha)(C_{e,0})}} = 2$ ist, und $Z_e = = (U_e - \{u_{(e,e^*)}\}) \cup \{u^{-1}_{(e,e^*)}\}$, wenn $\overline{\overline{H}}_{e,0} = 1$ und $\overline{\overline{P(\alpha)(C_{e,0})}} > 2$ ist, mit einem zu jedem solchen $e \in V$ beliebigen festgewählten $e^* \in P(\alpha)(C_{e,0}) - \{e\}$. Zu jedem Element a von C gibt es genau ein $e \in V$ mit $a \in C_{e,0}$, und folglich existieren bei $a \neq e$ nicht notwendig paarweise verschiedene Elemente $u_{(e,e')}$, $u_{(e,e'')}$ von U_e und $y_1, y_2, \ldots, \ldots, y_n$ $(n \geqq 0)$ von Y_e mit

$$(6) \qquad a = u^{-1}_{(e,e')} y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \ldots y_n^{\varepsilon_n} u_{(e,e'')} ,$$

wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ bestimmte Elemente von $\{+1, -1\}$ sind, und die Darstellung von a als Produkt von Elementen von $X \cup X^{-1}$ der Gestalt (6) ist eindeutig. Dabei ist $u^{-1}_{(e,e')}$ bei $\alpha(a) = e$ und $u_{(e,e'')}$ bei $\beta(a) = e$ wegzulassen.

Ist $C' = [C'_0, \alpha', \beta', \varphi']$ ein Gruppoid und ist Φ^* eine mit den Definitionsbereichen von C und C' verträgliche Abbildung von X in C'_0, so ist die Abbildung Φ von C in C' mit für jedes $a \in C_0 - V$:

$$(7) \qquad \Phi(a) = (\Phi^*(u_{(e,e')}))^{-1} (\Phi^*(y_1))^{\varepsilon_1} (\Phi^*(y_2))^{\varepsilon_2} \ldots (\Phi^*(y_n))^{\varepsilon_n} \Phi^*(u_{(e,e'')}) ,$$

falls (6) gilt und mit für jedes $e \in V$:

$$\Phi(e) = \alpha'(\Phi^*(y)) \text{ mit einem } y \in Y_e$$

oder $\quad \Phi(e) = \alpha'(\Phi^*(e_{e,e'}))$ mit $u_{(e,e')} \in U_e$ bei $\overline{\overline{P(\alpha)(C_{e,0})}} = 2$

bzw. $u_{(e,e')} \in U_e - \{u_{(e,e^*)}\}$ bei $\overline{\overline{P(\alpha)(C_{e,0})}} > 2$.

In (7) ist $(\Phi^*(u_{(e,e')}))^{-1}$ bei $e' = e^*$ durch $\Phi^*(u^{-1}_{(e,e^*)})$ und $\Phi^*(u_{(e,e'')})$ bei $e'' = e^*$ durch $(\Phi^*(u^{-1}_{(e,e^*)}))^{-1}$ zu ersetzen, ein Funktor von C in C', und es ist $\Phi \mid X = \Phi^*$. Sind Φ und Ψ Funktoren von C in C' mit $\Phi \mid X = \Psi \mid X = \Phi^*$, so ist $T_0 = = \{x : x \in C_0 \wedge \Psi(x) = \Phi(x)\}$ der Träger eines Teilgruppoids T von C. Wegen $X \subseteq T_0$ ist notwendig $T = C$, also $\Psi = \Phi$. Damit ist Satz 11 bewiesen.

Bemerkung: Ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse von Gruppoiden, so ist nach Satz 11 im Sinne der Bemerkung zu Satz 3 jedes Gruppoid $C \in \mathfrak{K}$, das zu dem freien Gruppoid über einem d-Graphen isomorph ist und keine isolierten Einheiten hat, eine $\mathfrak{K}$-freie Algebra.

Literatur

[1] *Birkhoff, Garrett:* On the Structure of Abstract Algebras. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society *31*, 1935, S. 433–454.

[2] *Brandt, Heinrich:* Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes. Mathem. Annalen *96*, 1926, S. 360–366.

[3] *Ehresmann, Charles:* Structures quotient. Faculté des Sciences de Paris, Séminaire Topologie et Géometrie Différentielle, 1963.

[4] *Hasse, Maria:* Einige Bemerkungen über Graphen, Kategorien und Gruppoide. Mathem. Nachrichten 22, 1960, S. 255—270.

[5] *Hasse, Maria* und *Reichel, Horst:* Zur algebraischen Begründung der Graphentheorie III. Mathem. Nachrichten (im Druck).

[6] *Higgins, Philip J.:* Algebras with a Scheme of Operators. Mathem. Nachrichten 27, 1963, S. 115—132.

[7] *Klaua, Dieter:* Allgemeine Mengenlehre. Akademie-Verlag, Berlin, 1964.

[8] *Kuroš, A. G.:* Vorlesungen über allgemeine Algebra. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1964.

[9] *Rasiowa, Helena* und *Sikorski, Roman:* The Mathematics of Metamathematics. Monografie Matematyczne, Warschau, 1963.

[10] *Rédei, Ladislaus:* Algebra I. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959.

[11] *Stoll, Robert R.:* Set Theory and Logic. W. H. Freeman and Company, San Francisco and London, 1963.

Anschrift der Verfasser: Professur für Algebra Technische Universität, 8027 Dresden, Zellescher Weg 12/14, DDR.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ СВОБОДНЫХ КАТЕГОРИЯХ И СВОБОДНЫХ ГРУППОИДАХ

МАРИЯ ХАССЕ, ЛОТАР МИХЛЕР (Maria Hasse, Lothar Michler), Дрезден

В I. приводятся некоторые, в далнейшем нужные, определения и теоремы об частичных алгебрах, графах (ориентированных графах), d-графах (двойно-ориентированные графы), мультипликативных графах, категориях и группоидах.

В II. рассмотренна свободная категория $F = [F_0; \alpha, \beta, \varphi]$ которая введена в [4]. Она свободна в отношении к ее подлежащему графу $[F_0; \alpha, \beta]$ в следующем смысле: F иммет систему образующих X для которой исполнено следующее условие: любое отображение Φ^* из X в любую категорию C для которой $\Phi^*(\alpha(x)) = \alpha(\Phi^*(x))$ и $\Phi^*(\beta(x)) = \beta(\Phi^*(x))$ для любого $x \in X$ возможно продолжить в только один функтор F в C. Потом вводится понятие основного графа и показывается, что для любой категории имеется изоморфизм на какую-то факторкатегорию свободной категории над некоторым графом. Свободная категория F над некоторым основным графом свободна относительно области определения φ, которая обозначается $D\varphi$, т.е. F имеет систему образующих X исполняющую следующее свойство: Пусть Φ^* отображение в некоторую категорию C для которого существует в C произведение $\Phi^*(x)\,\Phi^*(y)$ существует-ли произведение xy в F, элементов $x, y \in X$. Потом существует только одно расширение отображения Φ^* в фунтор Φ из F в C. В далнейшем приводится достаточное условие для того, чтобы для частичной категории свободной категории над

некоторым графом существовал изоморфизм на свободную категорию над некоторым графом.

В III. исследуется свободное произведение над некоторым d-графом. При помощи понятия свободной группы и теоремы Шрейэра и Нильсена приводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы существовал изоморфизм любого группоида на свободный группоид над некоторым d-графом. Свободный группоид $\bar{F}$ над d-графом обладает системой образующих X с следующим свойством: любое отображение Φ^* из X в группоид C, для которого существует прозведение $\Phi^*(x)\, \Phi^*(y)$ в C существует-ли произведение xy элементов $x, y \in X$ в $\bar{F}$ возможно продолжить в только один фунтор Φ из $\bar{F}$ в C.