Czechoslovak Mathematical Journal

Zbyněk Nádeník

Les inégalités isopérimétriques pour les courbes gauches

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 16 (1966), No. 3, 363–376

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100738

Чехословацкий математический журнал, т. 16 (91) 1966, Прага

LES INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES POUR LES COURBES GAUCHES

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Reçu le 25 mai 1965)

Dans l'espace euclidien à $2n$ dimensions ($n > 1$), dans lequel nous avons choisi l'origine O et la base des coordonnées rectangulaires $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, considérons une courbe C réelle fermée avec le paramétrage $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\beta)$ de la classe $2n$ et avec les rapports constants et positifs de ses $2n - 1$ courbures. Désignons par $\mathbf{n}(\beta)$ le vecteur unitaire de la dernière normale de la courbe C et tenons β pour l'arc de l'indicatrice sphérique Γ des vecteurs $-\mathbf{n}(\beta)$; appelons b la longueur de Γ.

Les rapports des courbures de la courbe C étant constants et positifs, la courbe sphérique Γ a toutes les courbures constantes non nulles, c'est-à-dire, elle est une hypercirconférence (pour les propriétés nécessaires des hypercirconférences, voir [5] et si $n = 2$, encore [3] et [4], part I). Si l'on choisit convenablement les axes coordonnées, on peut donc écrire les équations de Γ de cette manière

$$x_{2i-1} = r_i \sin l_i\beta, \; x_{2i} = r_i \cos l_i\beta \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où r_i et l_i sont des constantes positives certaines telles que

$$r_i > 0, \; l_i > 0, \; l_i \neq l_j \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} r_i^2 l_i^2 = 1.$$

La projection orthogonale de l'indicatrice Γ dans le plan axial α_i de Γ (c'est-à-dire dans le plan des axes des coordonnées x_{2i-1} et x_{2i}) est donc une circonférence λ_i-fois comptée, le nombre naturel λ_i étant déterminé par la relation

$$\lambda_i = \frac{b}{2\pi} l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Nous désignons par σ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) la $i^{\text{ième}}$ fonction symétrique des nombres $l_1^2, l_2^2, \ldots, l_n^2$ et par $\sigma_i^{[j]}$ ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$; $j = 1, 2, \ldots, n$) la $i^{\text{ième}}$ fonction symétrique des nombres $l_1^2, l_2^2, \ldots, l_n^2$ avec omission du nombre l_j^2 et nous posons $\sigma_0 = 1$, $\sigma_0^{[j]} = 1$. Particulièrement, $\sigma_n = l_1^2 l_2^2 \ldots l_n^2$.

Nous convenons d'appeler la fonction d'appui de la courbe C la fonction de la classe $2n$

$$h(\beta) = -\mathbf{x}(\beta) \,.\, \mathbf{n}(\beta)\,. \tag{4}$$

Naturellement, elle dépend du choix de l'origine O, mais elle est univoque, abstraction faite de l'addition d'une solution arbitraire $\chi(\beta)$ de l'équation différentielle linéaire (toujours $[.]' = \mathrm{d}[.]/\mathrm{d}\beta$ et $[.]^{(0)} = [.]$)

$$\sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} \chi^{(2v)}(\beta) = 0\,; \tag{5}$$

cette addition signifie géométriquement la translation de l'origine O (voir le $n^0 4$).

A l'aide de la fonction d'appui (4), le rayon $P(\beta)$ de la dernière courbure de la courbe C s'exprime par la formule (voir le $n^0 3$)

$$P(\beta) = \Lambda \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} h^{(2v)}(\beta)\,, \tag{6}$$

où

$$\Lambda = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i^2 \, l_i^2 \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (l_j^2 - l_i^2)^2} \right]^{1/2}. \tag{7}$$

Pour la longueur $L = \int_0^b P(\beta) \, \mathrm{d}\beta$ de la courbe C, il résulte de là

$$L = \sigma_n \Lambda \int_0^b h(\beta) \, \mathrm{d}\beta\,. \tag{8}$$

Désignons par $\mathscr{C}_i$ la courbe plane suivant laquelle se projette orthogonalement la courbe C dans le plan axial α_i et puis encore appelons s_i l'arc, $\mathscr{L}_i$ la longueur et h_i la fonction d'appui (dans le plan α_i) de la courbe plane $\mathscr{C}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Les intégrales

$$\mathscr{F}_i = \frac{1}{2} \int_0^{\mathscr{L}_i} h_i \, \mathrm{d}s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

ont la signification géométrique évidente; si, en particulier, $\lambda_i = 1$, alors, comme il est bien connu, $\mathscr{F}_i$ est l'aire du domaine convexe plan avec la frontière $\mathscr{C}_i$.

Mais aussi les intégrales

$$\Phi_v = \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{L}} h^{(2v)} \, \mathrm{d}s\,, \quad (v = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{10}$$

où s est l'arc de la courbe C, ne dépendent pas du choix de l'origine O (voir le $n^0 4$).

De plus, les fonctionnelles $\mathscr{F}_i$ et Φ_v sont liées par les équations linéaires aux coefficients constants

$$\mathscr{F}_i = [A \,.\, r_i^2 l_i \prod_{\substack{j=1\\ j \neq i}}^{n} (l_j^2 - l_i^2)^2]^{-1} \,.\, \sum_{v=0}^{n-1} \sigma_{n-v-1}^{[i]} \Phi_v \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

(voir aussi le $n^0 4$). Le déterminant de la matrice de ce système n'étant pas nul (voir le $n^0 4$), le système (11) présente aussi la signification géométrique des fonctionnelles Φ_v. L'intégrale

$$F = \Phi_0 = \frac{1}{2} \int_0^b h(\beta)\, P(\beta)\, \mathrm{d}\beta \tag{12}$$

qui sera l'objet dominant de nos considérations suivantes, s'exprime donc comme la combinaison linéaire des intégrales (9) avec les coefficients constants, dont la détermination d'après (11) est immédiate.

Considérons deux courbes distinctes C_1 et C_2 avec les mêmes propriétés comme notre courbe C et avec la même indicatrice sphérique Γ des opposés des vecteurs unitaires de la dernière normale comme la courbe C. Pour la géométrie des courbes C_1 et C_2, nous conservons les mêmes désignations comme dans celle de la courbe C discernées seulement par les indices 1 et 2. La courbe avec le paramétrage

$$\mathbf{x} = t_1\, \mathbf{x}_1(\beta) + t_2\, \mathbf{x}_2(\beta)\,, \tag{13}$$

où t_1 et t_2 sont les nombres tels que $t_1 \geqq 0$, $t_2 \geqq 0$, $t_1 + t_2 = 1$, a aussi les mêmes propriétés comme la courbe C (voir le $n^0 5$) et, par conséquent, nous pouvons tenir la courbe (13) pour notre courbe C. Certaines propriétés bien connues des séries linéaires des courbes convexes planes sont susceptibles de la généralisation sur les courbes du type considéré.

Parmi les fonctions d'appui $h(\beta)$, $h_1(\beta)$, $h_2(\beta)$ et les rayons de la dernière courbure $P(\beta)$, $P_1(\beta)$, $P_2(\beta)$ des courbes C, C_1, C_2 il y a des relations (voir le $n^0 5$)

$$h(\beta) = t_1\, h_1(\beta) + t_2\, h_2(\beta)\,, \quad P(\beta) = t_1\, P_1(\beta) + t_2\, P_2(\beta) \tag{14}$$

et on peut exprimer la fonctionnelle (12) comme le trinome quadratique (voir le $n^0 5$)

$$F = t_1^2 F_1 + 2 t_1 t_2 M + t_2^2 F_2\,, \tag{15}$$

où, naturellement,

$$2F_k = \int_0^b h_k(\beta)\, P_k(\beta)\, \mathrm{d}\beta \quad (k = 1, 2) \tag{16}$$

et (voir le $n^0 5$)

$$2M = \int_0^b h_1(\beta)\, P_2(\beta)\, \mathrm{d}\beta = \int_0^b h_2(\beta)\, P_1(\beta)\, \mathrm{d}\beta\,. \tag{17}$$

Les fonctionnelles F_1, M et F_2 et eventuellement les longueurs L_1, L_2 des courbes C_1, C_2 sont liées par les inégalités qui sont analogues à celles de Frobenius et de Minkowski pour les courbes convexes planes:

Théorème 1. *Supposons que n soit impair et qu'un de nombres naturels* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (voir (3) pour leur définition) *soit égal* à 1 *et les restants de ces nombres forment les groupes dans lesquels se trouvent toujours uniquement les nombres voisins en nombre pair. Alors*

$$\frac{F_1}{L_1^2} - \frac{2M}{L_1 L_2} + \frac{F_2}{L_2^2} \leqq 0, \tag{18}$$

l'égalité n'ayant lieu que si les courbes C_1 *et* C_2 *sont directement homothétiques* (voir le $n^0 7$).

Théorème 2. *Supposons que n soit pair et que les nombres naturels* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *forment de nouveau les groupes dans lesquels se trouvent toujours seulement les nombres voisins en nombre pair. Puis*

$$M^2 - F_1 F_2 \leqq 0\,, \tag{19}$$

l'égalité n'ayant lieu que si les courbes C_1 *et* C_2 *sont directement homothétiques* (voir le $n^0 8$).

Par un procédé élémentaire (voir [1], p. 107), on tire de la relation (18) l'inégalité $M^2 - F_1 F_2 \geqq 0$, et de la relation (19) l'inégalité $F_1/L_1^2 - 2M/L_1 L_2 + F_2/L_2^2 \geqq 0$.

Le théorème 1 est une conséquence facile du lemme suivant, qui est une généralisation du lemme bien connu de Wirtinger:

Lemme: *Désignons par* $f(\beta)$ *une fonction de la classe n définie sur l'indicatrice* Γ, *et soit*

$$\int_0^b f(\beta)\, \mathrm{d}\beta = 0\,. \tag{20}$$

Partant des suppositions du théorème 1 *ou du théorème* 2, *on a l'inégalité*

$$\sum_{v=0}^{n} (-1)^{n-v} \sigma_{n-v} \int_0^b [f^{(v)}(\beta)]^2 \, \mathrm{d}\beta \geqq 0\,, \tag{21}$$

dans laquelle le signe d'égalité est valable si et seulement si la fonction $f(\beta)$ *est de la forme*

$$f(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (a_{\lambda_i} \cos l_i \beta + b_{\lambda_i} \sin l_i \beta)\,, \tag{22}$$

où les $a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_n}, b_{\lambda_1}, \ldots, b_{\lambda_n}$ *sont les constantes arbitraires et* $l_i = 2\pi\lambda_i/b$ (voir le $n^0 6$).

Voici encore un cas particulier des théorèmes 1 et 2, dans lequel on peut voir une généralisation naturelle de l'inégalité isopérimétrique classique (voir le $n^0 9$):

Théorème 3. *Sous les suppositions du théorème* 1, *on a*

$$L_1^2 - 2b\sigma_n \Lambda F_1 \geqq 0 \tag{23}$$

et, sous les suppositions du théorème 2, *on a, au contraire,*

$$L_1^2 - 2b\sigma_n \Lambda F_1 \leqq 0\,. \tag{24}$$

Dans les inégalités (22) *et* (23), *le signe d'égalité a lieu si et seulement si la courbe* C_1 *est une hypercirconférence.*

Nous allons démontrer les assertions énoncées dans cette introduction.

1. Désignons par $x_1(\beta), x_2(\beta), \ldots, x_{2n}(\beta)$ les coordonnées du rayon vecteur $\mathbf{x}(\beta)$ de la courbe C dans le système dans lequel le radius vecteur $-\mathbf{n}(\beta)$ de l'hypercirconférence Γ a les coordonnées (1). Parce que $\mathbf{x}'(\beta)\,.\,\mathbf{n}^{(m)}(\beta) = 0$ pour $m = 0, 1, \ldots, \ldots, 2n-2$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} \{x'_{2i-1}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2j-2} \sin l_i\beta + x'_{2i}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2j-2} \cos l_i\beta\} = 0\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{1,1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{x'_{2i-1}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2j-1} \cos l_i\beta - x'_{2i}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2j-1} \sin l_i\beta\} = 0\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{1,1*}$$

En dérivant succesivement $(2n-1)$-fois l'équation (4) et en tenant compte de (1,1) et (1,1*), nous obtenons, l'équation (4) incluse, le système

$$\sum_{i=1}^{n} \{x_{2i-1}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2j-2} \sin l_i\beta + x_{2i}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2j-2} \cos l_i\beta\} = (-1)^{j-1}\, h^{(2j-2)}(\beta)\,, \tag{1,2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{x_{2i-1}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2j-1} \cos l_i\beta - x_{2i}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2j-1} \sin l_i\beta\} = (-1)^{j-1} h^{(2j-1)}(\beta)\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{1,2*}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{x'_{2i-1}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2n-1} \cos l_i\beta - x'_{2i}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2n-1} \sin l_i\beta\} - \\ - \sum_{i=1}^{n} \{x_{2i-1}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2n} \sin l_i\beta + x_{2i}(\beta)\,.\,r_i l_i^{2n} \cos l_i\beta\} = (-1)^{n-1}\, h^{(2n)}(\beta)\,. \tag{1,3}$$

Si l'on multiplie la $j^{\text{ième}}$ équation (1,2) par $(-1)^{j-1}\,\sigma_{n-j+1}$ (voir la convention consécutive à la formule (3) de l'introduction) et après, si l'on additionne toutes les équations (1,2) ainsi multipliées, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \{x_{2i-1}(\beta) \,.\, r_i l_i^{2n} \sin l_i\beta + x_{2i}(\beta) \,.\, r_i l_i^{2n} \cos l_i\beta\} = (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{n-j+1} h^{(2j-2)}(\beta) \,.$$

Par conséquent l'équation (1,3) peut se mettre sous forme

$$(1,4) \qquad \sum_{i=1}^{n} \{x'_{2i-1}(\beta)\, r_i l_i^{2n-1} \cos l_i\beta - x'_{2i}(\beta) \,.\, r_i l_i^{2n-1} \sin l_i\beta\} = $$
$$= (-1)^{n-1} \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} h^{(2v)}(\beta) \,.$$

2. Dans le système (1,1) + (1,1*) + (1,4) avec les inconnues $x'_1(\beta), x'_2(\beta), \ldots, x'_{2n}(\beta)$, nous changeons l'ordre des équations de manière suivante: Nous intercalons la $j^{\text{ième}}$ équation (1,1*) entre la $j^{\text{ième}}$ et $(j + 1)^{\text{ième}}$ équation (1,1) et nous laissons l'équation (1,4) de nouveau à la fin.

Le déterminant $D(\beta)$ de la matrice du système des équations (1,1) + (1,1*) + (1,4) ainsi ordonnées est – au facteur $r_1^2 r_2^2 \ldots r_n^2$ près – le déterminant wronskien $W(\beta)$ du système des fonctions

$$(2,1) \qquad \sin l_1\beta, \cos l_1\beta, \sin l_2\beta, \cos l_2\beta, \ldots, \sin l_n\beta, \cos l_n\beta \,,$$

qui sont linéairement indépendantes en vertu de (2). L'équation différentielle linéaire avec le système fondamental (2,1) étant précisément l'équation (5), la formule de Liouville conduit dans notre cas à la relation $W(\beta) = W(0)$. On constate facilement que

$$(2,2) \qquad W(0) =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ l_1 & 0 & l_2 & 0 & \ldots & l_n & 0 \\ 0 & -l_1^2 & 0 & -l_2^2 & \ldots & 0 & -l_n^2 \\ -l_1^3 & 0 & -l_2^3 & 0 & \ldots & -l_n^3 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & (-1)^{n-1} l_1^{2n-2} & 0 & (-1)^{n-1} l_2^{2n-2} & \ldots & 0 & (-1)^{n-1} l_n^{2n-2} \\ (-1)^{n-1} l_1^{2n-1} & 0 & (-1)^{n-1} l_2^{2n-1} & 0 & \ldots & (-1)^{n-1} l_n^{2n-1} & 0 \end{vmatrix} .$$

En somme, on a d'après le théorème de Laplace:

$$(2,3) \qquad D(\beta) = \left[\prod_{j=1}^{n} r_j^2\right] . \, W(\beta) = (-1)^n \,.\, \left[\prod_{j=1}^{n} r_j^2 l_j\right] \left[V(l_1^2, l_2^2, \ldots, l_n^2)\right]^2 ,$$

où $V(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $m \geqq 1$, signifie le déterminant de Vandermonde dont la $s^{\text{ième}}$ ligne $(s = 1, 2, \ldots, m)$ est formée par les $(s - 1)^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_m$.

Le déterminant $D_{2i-1}(\beta)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ qui se forme du déterminant $D(\beta)$ par l'omission de la dernière ligne et de la $(2i-1)^{\text{ième}}$ colonne, est — au facteur $(-1)^{n-1} r_1^2 r_2^2 \ldots r_n^2 r_i^{-1}$ près — le déterminant wronskien $W_{2i-1}(\beta)$ du système de $2n-1$ fonctions que nous obtenons, si nous omettons dans le système (2,1) la $(2i-1)^{\text{ième}}$ fonction $\sin l_i\beta$. On vérifie sans difficulté que l'équation différentielle linéaire avec le système fondamental formé par ces $2n-1$ fonctions en question est de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{n-j}^{[i]}[y^{(2j-1)}(\beta)\cos l_i\beta + l_i y^{(2j-2)}(\beta)\sin l_i\beta] = 0 .$$

Par conséquant, la formule de Liouville appliquée au déterminant wronskien $W_{2i-1}(\beta)$ donne la relation $W_{2i-1}(\beta) = W_{2i-1}(0)\cos l_i\beta$. Mais $W_{2i-1}(0)$ est le déterminant qui se forme du déterminant $W(0)$ dans (2,2) par l'omission de la dernière ligne et de la $(2i-1)^{\text{ième}}$ colonne et donc

$$D_{2i-1}(\beta) = \frac{(-1)^{n-1}}{r_i}\Big[\prod_{j=1}^{n} r_j^2\Big] W_{2i-1}(\beta) = \frac{(-1)^{n-1}\cos l_i\beta}{r_i}\Big[\prod_{j=1}^{n} r_j^2\Big] W_{2i-1}(0) ,$$

où, d'après le théorème de Laplace,

$$W_{2i-1}(0) = \frac{(-1)^{n+i}}{l_i}\Big[\prod_{j=1}^{n} l_j\Big] . V(l_1^2, l_2^2, \ldots, l_n^2) . V(l_1^2, l_2^2, \ldots, l_{i-1}^2, l_{i+1}^2, \ldots, l_n^2) .$$

Mais les propriétés bien connues du déterminant de Vandermonde conduisent à la relation suivante

$$(2,4)\quad V(l_1^2, l_2^2, \ldots, l_n^2) = (-1)^{i-1}\Big[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(l_j^2 - l_i^2)\Big] . V(l_1^2, l_2^2, \ldots, l_{i-1}^2, l_{i+1}^2, \ldots, l_n^2) .$$

En somme, nous avons

$$(2,5)\qquad D_{2i-1}(\beta) = \frac{\cos l_i\beta}{r_i l_i} . \frac{\prod_{j=1}^{n} r_j^2 l_j}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(l_j^2 - l_i^2)} . [V(l_1^2, l_2^2, \ldots, l_n^2)]^2 .$$

La dérivée $x'_{2i-1}(\beta)$ qui figure dans le système $\sum$ des équations ordonnées (1,1) + (1,1*) + (1,4) (voir le commencement du $n^0 2$) est

$$x'_{2i-1}(\beta) = -\frac{D_{2i-1}(\beta)}{D(\beta)} . (-1)^{n-1}\sum_{v=0}^{n}\sigma_{n-v}h^{(2v)}(\beta) ;$$

donc, d'après (2,3) et (2,5)

$$(2,6)\qquad x'_{2i-1}(\beta) = \frac{\cos l_i\beta}{r_i l_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(l_j^2 - l_i^2)} . \sum_{v=0}^{n}\sigma_{n-v}h^{(2v)}(\beta) ; \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

A l'aide de (2,4), nous vérifions déjà par un calcul facile que (2,6) et

$$(2,7) \qquad x'_{2i-1}(\beta) = -\frac{\sin l_i\beta}{r_i l_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (l_j^2 - l_i^2)} \cdot \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} h^{(2v)}(\beta)\,; \quad i = 1, 2, \ldots, u\,,$$

représentent la solution de notre système $\sum$.

3. Si nous dérivons $2n$-fois l'équation (4), nous obtenons, en tenant compte de $\mathbf{x}'(\beta) = P(\beta)\,\mathbf{t}(\beta)$, où $\mathbf{t}(\beta)$ est le vecteur unitaire tangent et $P(\beta)$ le rayon de la dernière courbure de la courbe C, par un calcul facile

$$(3,1) \qquad P(\beta) = \frac{k_{2n-1}^{2n-2}}{k_1 k_2 \ldots k_{2n-2}}\, h^{(2n)}(\beta) + \sum_{v=0}^{n-1} (.)\, h^{(2v)}(\beta)\,,$$

$k_1, k_2, \ldots, k_{2n-1}$ étant la première jusqu'à la dernière courbure de la courbe C.

Parce que $|\mathbf{x}'(\beta)| = P(\beta)$, on tire de (2,6) et (2,7) la formule $P(\beta) = \\ = \Lambda \left| \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} h^{(2v)}(\beta) \right|$, où Λ est la constante (7). Mais à l'aide de (3,1), où le coefficient de $h^{(2n)}(\beta)$ est positif, il est facile de constater que

$$(3,2) \qquad \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} h^{(2v)}(\beta) > 0\,.$$

La formule (6) est ainsi démontrée.

D'après (2,6), (2,7), (2) et (3,2) on obtient pour la dérivée par rapport à β de l'arc s_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) de la projection orthogonale $\mathscr{C}_i$ de la courbe C dans le plan axial α_i de l'hypercirconférence Γ la relation

$$(3,3) \qquad s'_i = \left[r_i l_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |l_j^2 - l_i^2|\right]^{-1} \cdot \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} h^{(2v)}(\beta)\,.$$

La dérivée par rapport à β de l'arc β_i de la circonférence unitaire $x_{2i-1} = \sin l_i\beta$, $x_{2i} = \cos l_i\beta$ dans le plan axial α_i étant

$$(3,4) \qquad \beta'_i = l_i\,,$$

on arrive donc, d'après (3,3) et (3,4), pour le rayon $\varrho_i(\beta) = \mathrm{d}s_i/\mathrm{d}\beta_i$ de la courbure de la courbe plane $\mathscr{C}_i$ au résultat:

$$(3,5) \qquad \varrho_i(\beta) = \left[r_i l_i^2 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |l_j^2 - l_i^2|\right]^{-1} \cdot \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v}\, h^{(2v)}(\beta)\,.$$

Le rayon de la courbure $\varrho_i(\beta)$ de la courbe $\mathscr{C}_i$ avec fonction d'appui $h_i(\beta)$ s'exprime par la formule connue

$$\varrho_i(\beta) = h_i(\beta) + \frac{1}{l_i^2}\, h_i''(\beta)\,. \tag{3,6}$$

On vérifie facilement que

$$\sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v}\, h^{(2v)}(\beta) = l_i^2 \sum_{v=0}^{n-1} \sigma_{n-v-1}^{[i]}\, h^{(2v)}(\beta) + \left[\sum_{v=0}^{n-1} \sigma_{n-v-1}^{[i]}\, h^{(2v)}(\beta)\right]''$$

et si l'on remplace ainsi la somme dans la formule (3,5) et puis, si l'on compare la formule (3,5) avec la formule (3,6), on obtient tout de suite pour la fonction d'appui $h_i(\beta)$ la relation

$$\begin{aligned} h_i(\beta) = {} & \Big[r_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |l_j^2 - l_i^2|\Big]^{-1} \sum_{v=0}^{n-1} \sigma_{n-v-1}^{[i]}\, h^{(2v)}(\beta) + \\ & + A_i \sin l_i\beta + B_i \cos l_i\beta\,, \end{aligned} \tag{3,7}$$

où A_i et B_i sont des constantes certaines qui ne nous interesseront pas.

4. La translation de l'origine O signifie que le nouveau rayon vecteur de la courbe C est $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{c}$, où $\mathbf{c}$ est un vecteur fixe. Donc, d'après (4), la nouvelle fonction d'appui est $\bar{h} = h - \mathbf{c}\,.\,\mathbf{n}$. Les simples considérations fondées sur les formules de Frenet montrent que le produit scalaire $\mathbf{c}\,.\,\mathbf{n}$ est une solution de l'équation différentielle que nous obtenons en annulant l'expression pour le rayon de courbure $P(\beta)$. Mais d'après (6), c'est précisément l'équation (5). Les mêmes considérations montrent aussi la réciproque: L'addition d'une solution arbitraire de l'équation (5) à la fonction d'appui $h(\beta)$ signifie une certaine translation de l'origine O. Pour la démonstration détaillée voir [2], n^{os}1 et 2.

Si nous remplaçons dans l'intégrale (10) la fonction d'appui $h(\beta)$ par la fonction d'appui $\bar{h}(\beta) = h(\beta) + \chi(\beta)$, où $\chi(\beta)$ est une solution de l'équation (5), nous avons, en utilisant la formule (6) et puis les intégrations par parties, pour $m = 0, 1, \ldots, \ldots, n - 1$:

$$\int_0^L \bar{h}^{(2m)}\, \mathrm{d}s = \int_0^b \bar{h}^{(2m)}(\beta)\, P(\beta)\, \mathrm{d}\beta = \int_0^b [h^{(2m)}(\beta) + \chi^{(2m)}(\beta)]\, P(\beta)\, \mathrm{d}\beta =$$

$$= \int_0^b h^{(2m)}(\beta)\, P(\beta)\, \mathrm{d}\beta + \Lambda \int_0^b [\chi^{(2m)}(\beta) \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} h^{(2v)}(\beta)]\, \mathrm{d}\beta = \int_0^b h^{(2m)}(\beta)\, P(\beta)\, \mathrm{d}\beta +$$

$$+ \Lambda \int_0^b [h^{(2m)}(\beta) \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} \chi^{(2v)}(\beta)]\, \mathrm{d}\beta = \int_0^b h^{(2m)}(\beta)\, P(\beta)\, \mathrm{d}\beta = \int_0^L h^{(2m)}\, \mathrm{d}s\,.$$

Ce résultat démontre le caractère intrinsèque des intégrales (10).

Eu égard aux formules (3), (3,4) et (3,7) et aux conditions de la fermeture $\int_0^b \varrho_i(\beta) \sin l_i\beta \, \mathrm{d}\beta = 0$, $\int_0^b \varrho_i(\beta) \cos l_i\beta \, \mathrm{d}\beta = 0$ de la courbe plane $\mathscr{C}_i$, nous pouvons écrire les intégrales (9) sous la forme suivante

$$\int_0^{\mathscr{L}_i} h_i \, \mathrm{d}s_i = \int_0^{2\pi\lambda_i} h_i \varrho_i \, \mathrm{d}\beta_i = l_i \int_0^b h_i(\beta) \, \varrho_i(\beta) \, \mathrm{d}\beta =$$

$$= l_i \Big[r_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |l_j^2 - l_i^2| \Big]^{-1} \cdot \sum_{v=0}^{n-1} \sigma_{n-v-1}^{[i]} \int_0^b h^{(2v)}(\beta) \, \varrho_i(\beta) \, \mathrm{d}\beta$$

et celle-ci nous conduit, en remplaçant encore $\varrho_i(\beta)$ par $P(\beta)$ d'après (3,5) et (6), aux relations (11) parmi les intégrales (9) et (10).

Le déterminant de la matrice du système (11) des équations linéaires en $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \ldots, \Phi_{n-1}$ est (jusqu'à un facteur inessentiel différent de zéro)

$$\delta_n = \begin{vmatrix} \sigma_{n-1}^{[1]} & \sigma_{n-2}^{[1]} & \ldots & \sigma_1^{[1]} & 1 \\ \sigma_{n-1}^{[2]} & \sigma_{n-2}^{[2]} & \ldots & \sigma_1^{[2]} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n-1}^{[n]} & \sigma_{n-2}^{[n]} & \ldots & \sigma_1^{[n]} & 1 \end{vmatrix} .$$

Si nous soustrayons, pour $j = 1, 2, \ldots, n-1$, de chaque $j^{\text{ième}}$ ligne la dernière ligne, multipliée par $l_n^2 : l_j^2$, nous obtenons, après certaines simplifications, la formule de récurrence $\delta_n = \delta_{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (l_n^2 - l_j^2)$. En vertu de (2), elle permet facilement de constater que $\delta_n \neq 0$ et, par conséquent, l'intégrale (12) est une combinaison linéaire des intégrales (9) avec les coefficients constants.

5. Parce que nous supposons que l'hypercirconférence Γ est aussi l'indicatrice sphérique des opposés des vecteurs unitaires de la dernière normale des courbes C_1 et C_2 avec les paramétrages $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1(\beta)$ et $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2(\beta)$, on voit sans difficulté que le vecteur $\mathbf{n}(\beta)$ est aussi le vecteur unitaire de la dernière normale de la courbe avec le paramétrage (13). La fonction d'appui (4) pour cette courbe C est donc

$$h(\beta) = -\left[t_1 \, \mathbf{x}_1(\beta) + t_2 \, \mathbf{x}_2(\beta)\right] . \, \mathbf{n}(\beta) = t_1 \, h_1(\beta) + t_2 \, h_2(\beta) ,$$

où $h_1(\beta)$ et $h_2(\beta)$ sont les fonctions d'appui des courbes C_1 et C_2. La première relation (14) étant ainsi démontrée, la deuxième relation (14) parmi les rayons de courbure des courbes C, C_1, C_2 découle déjà immédiatement de la formule (6).

En tenant compte des relations (14), nous pouvons mettre la fonctionnelle (12) sous la forme suivante

$$F = \tfrac{1}{2} t_1^2 \int_0^b h_1(\beta) \, P_1(\beta) \, \mathrm{d}\beta + \tfrac{1}{2} t_1 t_2 \left[\int_0^b h_1(\beta) \, P_2(\beta) \, \mathrm{d}\beta + \int_0^b h_2(\beta) \, P_1(\beta) \, \mathrm{d}\beta \right] +$$

$$+ \tfrac{1}{2} t_2^2 \int_0^b h_2(\beta) \, P_2(\beta) \, \mathrm{d}\beta .$$

Mais à l'aide de la formule (6) appliquée sur les courbes C_1, C_2 et des intégrations par parties nous constatons que

$$\int_0^b h_1(\beta)\, P_2(\beta)\, d\beta = \Lambda \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} \int_0^b h_1(\beta)\, h_2^{(2v)}(\beta)\, d\beta =$$

$$= \Lambda \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} \int_0^b h_2(\beta)\, h_1^{(2v)}(\beta)\, d\beta = \int_0^b h_2(\beta)\, P_1(\beta)\, d\beta\,.$$

Ces résultats conduisent immédiatement aux relations (15)–(17).

6. Maintenant, nous allons démontrer le lemme énoncé dans l'introduction. Soit

$$(6,1) \qquad f(\beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{2\pi m\beta}{b} + b_m \sin \frac{2\pi m\beta}{b} \right)$$

la série de Fourier de la fonction $f(\beta)$; le terme absolu s'annule en vertu de (20). On a donc

$$(6,2) \qquad f^{(v)}(\beta) \sim (-1)^{v/2} \left(\frac{2\pi}{b}\right)^v \sum_{m=1}^{\infty} m^v \left(a_m \cos \frac{2\pi m\beta}{b} + b_m \sin \frac{2\pi m\beta}{b} \right)$$

pour v pair et

$$(6,3) \qquad f^{(v)}(\beta) \sim (-1)^{(v-1)/2} \left(\frac{2\pi}{b}\right)^v \sum_{m=1}^{\infty} m^v \left(b_m \cos \frac{2\pi m\beta}{b} - a_m \sin \frac{2\pi m\beta}{b} \right)$$

pour v impair; $v = 1, 2, \ldots, n$. En appliquant la relation de Parseval aux séries (6,1)–(6,3), et, sur la fin, en utilisant la relation (3), nous obtenons

$$(6,4) \qquad \sum_{v=0}^{n} (-1)^{n-v} \sigma_{n-v} \int_0^b [f^{(v)}(\beta)]^2\, d\beta =$$

$$= \frac{b}{2} \sum_{v=0}^{n} (-1)^{n-v} \sigma_{n-v} \left(\frac{2\pi}{b}\right)^{2v} \sum_{m=1}^{n} m^{2v}(a_m^2 + b_m^2) =$$

$$= \frac{b}{2} \left(\frac{2\pi}{b}\right)^{2n} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \sum_{v=0}^{n} (-1)^{n-v} \sigma_{n-v} \left(\frac{b}{2\pi}\right)^{2n-2v} m^{2v} =$$

$$= \frac{b}{2} \left(\frac{2\pi}{b}\right)^{2n} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \prod_{v=1}^{n} (m^2 - \lambda_v^2)\,.$$

Mais sous les suppositions du théorème 1 ou 2, cette identité donne tout de suite l'inégalité (21). Simultanément, il découle de (6,4) que le signe d'égalité dans (21) est valable si, et seulement si, tous les coefficients de Fourier de la fonction (6,1) sont nuls à l'exception de $a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_n}, b_{\lambda_1}, \ldots, b_{\lambda_n}$, c'est-à-dire, si et seulement si la fonction $f(\beta)$ est de la forme

$$f(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{\lambda_i} \cos \frac{2\pi\lambda_i\beta}{b} + b_{\lambda_i} \sin \frac{2\pi\lambda_i\beta}{b} \right)$$

qui est, en vertu de (3), identique à (22). Le lemme est donc complètement démontré.

7. Si nous nous servons de la formule (6), appliquée aux courbes C_1 et C_2, nous pouvons mettre les fonctionnelles (16) et (17) à l'aide des intégrations par parties sous la forme suivante:

$$F_k = \tfrac{1}{2}A \int_0^b \sum_{v=0}^{n} (-1)^v \, \sigma_{n-v} [h_k^{(v)}(\beta)]^2 \, \mathrm{d}\beta \quad (k = 1, 2)\,, \tag{7,1}$$

$$M = \tfrac{1}{2}A \int_0^b \sum_{v=0}^{n} (-1)^v \, \sigma_{n-v} \, h_1^{(v)}(\beta) \, h_2^{(v)}(\beta) \, \mathrm{d}\beta\,. \tag{7,2}$$

Le théorème 1 découle de notre lemme par le même procédé par lequel W. BLASCHKE (voir [1], p. 107) a déduit du lemme de Wirtinger l'inégalité de Minkowski pour l'aire mixte de deux figures convexes planes. En exprimant les longueurs L_1 et L_2 des courbes C_1 et C_2 à l'aide de la formule (8), on obtient que la fonction

$$f(\beta) = \frac{h_1(\beta)}{L_1} - \frac{h_2(\beta)}{L_2} \tag{7,3}$$

jouit de la propriété (20) et, tenant compte des suppositions du théorème 1, notre lemme appliqué à la fonction (7,3) conduit d'après (7,1) et (7,2) immédiatement à l'inégalité (18), dans laquelle, par (22) et (3), le signe d'égalité est valable si et seulement si

$$\frac{h_1(\beta)}{L_1} = \frac{h_2(\beta)}{L_2} + \sum_{i=1}^{n} (a_{\lambda_i} \cos l_i\beta + b_{\lambda_i} \sin l_i\beta)\,. \tag{7,4}$$

Mais $\sum_{i=1}^{n} (a_{\lambda_i} \cos l_i\beta + b_{\lambda_i} \sin l_i\beta)$ étant une solution de l'équation (5), nous pouvons supposer que l'origine O est choisie de manière qu'au lieu de (7,4) est simplement $h_2(\beta)/L_2 = h_1(\beta)/L_1$. Parce que $h_k(\beta) = -\mathbf{x}_k(\beta) \,.\, \mathbf{n}(\beta)$ $(k = 1, 2)$, on obtient, à l'aide des formules de Frenet, que $L_1 \, h_2(\beta) = L_2 \, h_1(\beta) \Leftrightarrow L_1 \, \mathbf{x}_2(\beta) = L_2 \, \mathbf{x}_1(\beta)$. Mais cela signifie la homothétie directe des courbes C_1 et C_2.

8. Soient maintenant (toujours $k = 1, 2$)

$$h_k(\beta) = \tfrac{1}{2}{}^k a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left({}^k a_m \cos \frac{2\pi m\beta}{b} + {}^k b_m \sin \frac{2\pi m\beta}{b} \right) \tag{8,1}$$

les séries de Fourier pour les fonctions d'appui $h_k(\beta)$. On a donc

$$(8,2) \qquad h_k^{(v)}(\beta) \sim (-1)^{v/2}\left(\frac{2\pi}{b}\right)^v \sum_{m=1}^{\infty} m^v \left({}^k a_m \cos\frac{2\pi m\beta}{b} + {}^k b_m \sin\frac{2\pi m\beta}{b}\right)$$

pour v pair et

$$(8,3) \qquad h_k^{(v)}(\beta) \sim (-1)^{(v-1)/2}\left(\frac{2\pi}{b}\right)^v \sum_{m=1}^{\infty} m^v \left({}^k b_m \cos\frac{2\pi m\beta}{b} - {}^k a_m \sin\frac{2\pi m\beta}{b}\right)$$

pour v impair. En se servant de nouveau du théorème de Parseval, nous obtenons d'après (8,1)–(8,3) (cf. aussi le calcul dans (6,4)):

$$\sum_{v=0}^{n}(-1)^v \sigma_{n-v}\int_0^b [h_k^{(v)}(\beta)]^2\,\mathrm{d}\beta =$$

$$= \frac{b}{2}\left\{\tfrac{1}{2}\sigma_n\, {}^k a_0^2 + \sum_{v=0}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^v\sigma_{n-v}\left(\frac{2\pi}{b}\right)^{2v} m^{2v}({}^k a_m^2 + {}^k b_m^2)\right\} =$$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{2\pi}{b}\right)^{2n}\left\{\tfrac{1}{2}{}^k a_0^2 \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + \sum_{m=1}^{\infty}({}^k a_m^2 + {}^k b_m^2)\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i^2 - m^2)\right\},$$

$$\sum_{v=0}^{n}(-1)^v \sigma_{n-v}\int_0^b h_1^{(v)}(\beta)\, h_2^{(v)}(\beta)\,\mathrm{d}\beta =$$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{2\pi}{b}\right)^{2n}\left\{\tfrac{1}{2}{}^1 a_0\, {}^2 a_0 \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + \sum_{m=1}^{\infty}({}^1 a_m\, {}^2 a_m + {}^1 b_m\, {}^2 b_m)\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i^2 - m^2)\right\}.$$

D'où, par les formules (7,1) et (7,2):

$$\frac{4}{A^2}\cdot\frac{4}{b^2}\cdot\left(\frac{b}{2\pi}\right)^{4n}(F_1F_2 - M^2) = [\tfrac{1}{2}{}^1 a_0^2 \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + \sum_{m=1}^{\infty}({}^1 a_m^2 + {}^1 b_m^2)\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i^2 - m^2)]\,.$$

$$.\,[\tfrac{1}{2}{}^2 a_0^2 \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + \sum_{m=1}^{\infty}({}^2 a_m^2 + {}^2 b_m^2)\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i^2 - m^2)] -$$

$$- [\tfrac{1}{2}{}^1 a_0\, {}^2 a_0 \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + \sum_{m=1}^{\infty}({}^1 a_m\, {}^2 a_m + {}^1 b_m\, {}^2 b_m)\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i^2 - m^2)]^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)\sum_{m=1}^{\infty}[({}^1 a_0\, {}^2 a_m - {}^2 a_0\, {}^1 a_m)^2 + ({}^1 a_0\, {}^2 b_m - {}^2 a_0\, {}^1 b_m)^2]\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i^2 - m^2) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{m,s=1}^{\infty}[({}^1 a_m\, {}^2 a_s - {}^1 a_s\, {}^2 a_m)^2 + ({}^1 a_m\, {}^2 b_s - {}^1 b_s\, {}^2 a_m)^2 +$$

$$+ ({}^1 b_m\, {}^2 a_s - {}^1 a_s\, {}^2 b_m)^2 + ({}^1 b_m\, {}^2 b_s - {}^1 b_s\, {}^2 b_m)^2]\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i^2 - m^2)\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i^2 - s^2)\,.$$

Donc, partant des suppositions du théorème 2, il vient $F_1F_2 - M^2 \geqq 0$; le signe d'égalité n'ayant lieu que si ${}^1a_0 : {}^2a_0 = {}^1a_m : {}^2a_m = {}^1b_m : {}^2b_m = c$ pour tous les m naturels à l'exception $m = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, c'est-à-dire, d'après (8,1) et (3), si

$$h_1(\beta) = ch_2(\beta) + \sum_{i=1}^{n} \left[\left({}^1a_{\lambda_i} - c\,{}^2a_{\lambda_i}\right) \cos l_i\beta + \left({}^1b_{\lambda_i} - c\,{}^2b_{\lambda_i}\right) \sin l_i\beta \right]. \tag{8,4}$$

Mais les considérations analogues comme dans le $n^0 7$ montrent que la relation (8,4) caractérise les courbes directement homothétiques.

9. Si la courbe C_2 est une hypercirconférence avec fonction d'appui $h_2(\beta) = 1$, il résulte de (7,1) et (7,2) et de la formule (8) appliquée aux courbes C_1 et C_2 que $L_2 = b\sigma_n\Lambda$, $F_2 = \frac{1}{2}b\sigma_n\Lambda$, $M = \frac{1}{2}L_1$ et donc le théorème 3 est une conséquence facile du théorème 1 et 2.

Bibliographie

[1] *W. Blaschke:* Kreis und Kugel. Leipzig 1916, Berlin 1956.

[2] *L. Boček* und *Z. Nádeník:* Beitrag zur globalen Differentialgeometrie der Kurven im euklidischen Raum. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 209—213.

[3] *O. Borůvka:* Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques de l'espace euclidien à quatre dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris *193* (1931), 633—634.

[4] *O. Borůvka:* Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques de l'espace euclidien à quatre dimensions. Spisy přír. fak. Masarykovy univ., čís. 146, Brno 1931.

[5] *M. Sypták:* Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens à p dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris *195* (1932), 298—299.

Adresse de l'auteur: Praha 2, Trojanova 13, ČSSR (České vysoké učení technické).

Резюме

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

ЗБЫНЕК НАДЕНИК, (Zbyněk Nádeník), Прага

В n-мерном евклидовом пространстве пусть $\mathbf{x}$ — радиусвектор замкнутой кривой C, для которой сферическое отображение последних нормалей $\mathbf{n}$ — гиперокружность. Изучаются свойства кривой C посредством „опорной функции" — $\mathbf{x} . \mathbf{n}$. Так строится функционал F, который имеет внутреннее значение (аналог площади плоской области). Длина L кривой C и F связаны неравенствами аналогичными классическому изопериметрическому неравенству (соотв. его обобщению Фробениуса). Экстремальные кривые являются гиперокружностями.