Miroslav Sova

Непрерывность полугрупп операторов в общих операторных топологиях

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 16 (1966), No. 3, 315–338

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100736

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Математический институт Чехословацкой Академии наук

Т. *16* (*91*) ПРАГА 3. IX. 1966 г., No 3

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ В ОБЩИХ ОПЕРАТОРНЫХ ТОПОЛОГИЯХ

МИРОСЛАВ СОВА (Miroslav Sova), Прага

(Поступило в редакцию 10/II 1961г., переработаное 11/I 1966 г.)

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы занимаемся непрерывностью полугрупп операторов в общем случае. До сих пор изучались полугруппы, непрерывные в т. наз. ,,сильной" топологии операторов (см. [2]) и непрерывные в равномерной топологии. Здесь изучаются полугруппы, непрерывные в некоторой общей операторной топологии (см. [7] и отд. 1,1,4 и 1,1,6 наст. работы).

В отделе 2 дополнена теорема Хилле-Иосиды для упомянутых операторных топологий. Главными результатами являются теоремы 2,2,3 и 2,2,4. В отделе 3 изучаются множества значений полугрупп. Главные результаты содержатся в теоремах 3,2,1 и 3,2,2. В отделе 4 мы пытаемся наглядно изложить непрерывность полугрупп операторов для определенных нестандартных операторных топологий в пространстве непрерывных функций при помощи вероятностей (точнее мер) перехода. В отделе 5 приведен пример, на котором иллюстрируется применение изложенной здесь общей теории на определенной специальной модели, которая имеет также определенное наглядное значение.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

1,1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ В НИХ

1,1,1. Определение. Основное пространство Банаха, в котором будем производить исследования, обозначим символом E. Через R будем обозначать поле действительных чисел, через R^+ множество всех положительных действительных чисел.

1,1,2. Определение. Если H – произвольное множество, то символом $\mathfrak{A}(H, E)$ обозначим множество всех функций на H в E и символом $\mathfrak{B}(H, E)$ множество всех ограниченных функций на H в E. Если для $g \in \mathfrak{B}(H, E)$ определим: $\|g\| = \sup \{\|g(x)\| : x \in H\}$, то $\mathfrak{B}(H, E)$ будет, очевидно, пространством Банаха.

1,1,3. Определение. Символом $\mathfrak{C}^+(E)$ обозначим множество всех линейных операторов (линейных в алг. смысле), определенных на каком-то линейном (в алг. смысле) подпространстве $E_0 \subseteq E$ и имеющих значения в E. Если $A \in \mathfrak{C}^+(E)$, то через $\mathfrak{D}(A)$ обозначим область определения A. По нашему предположению $\mathfrak{D}(A)$ представляет линейное подпространство в E.

Если $A, B \in \mathfrak{C}^+(E)$, то мы скажем, что $A \subseteq B$, если $\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(B)$ и для $x \in \mathfrak{D}(A)$ справедливо равенство $A(x) = B(x)$. Далее, $A = B$, если $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(B)$ и если для $x \in \mathfrak{D}(A)$ выполнено $A(x) = B(x)$. Оператор $A \circ B$ определен следующим способом: $x \in \mathfrak{D}(A \circ B)$, если $x \in \mathfrak{D}(B)$ в $B(x) \in \mathfrak{D}(A)$ и тогда $A \circ B(x) = A(B(x))$.

Оператор $A \in \mathfrak{C}^+(E)$ назовем простым, если для него выполнено условие: $A(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Далее мы через $\mathfrak{C}(E)$ обозначим множество всех операторов обладающих следующими свойствами: $\mathfrak{D}(L) = E$ и Lограничен. Очевидно, что $\mathfrak{C}(E)$ образует алгебру, если сложение и умножение оператора на число введено обыкновенным образом и умножение определено как операция $_\circ$. Тождественный оператор будем обозначать символом j.

1,1,4. Определение. Покрывающей системой мы назовем каждую систему ограниченных множеств, содержащую все конечные множества, причем с любыми двумя множествами содержит и некоторое множество, которое содержит оба эти множества. Систему всех конечных множеств обозначим символом $\sigma(E)$, всех компактных множеств $\varkappa(E)$, всех ограниченных множеств $\lambda(E)$, короче только σ, $\varkappa$, λ.

1,1,5. Определение. Если γ – какая-нибудь покрывающая система в E, то символом $\mathfrak{C}_\gamma(E)$ будем обозначать линейное пространство $\mathfrak{C}(E)$, на котором задана следующим образом определенная система окрестностей нуля: V является окрестностью нуля тогда и только тогда, если существует $H \in \gamma$ и $\varepsilon > 0$ так, что $L \in \mathfrak{C}(E)$, $\|L(H)\| \leqq \varepsilon \Rightarrow L \in V$. Легко видно, что $\mathfrak{C}_\gamma(E)$ образует линейное топологическое локально выпуклое пространство. Далее, очевидно утверждение, что какая-нибудь обобщенная последовательность L_α сходится к L в $\mathfrak{C}_\gamma(E)$ тогда и только тогда, если $L_\alpha(x) \to L(x)$ равномерно на каждом множестве $H \in \gamma$.

1,2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

1,2,1. Определение. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}(R^+, E)$ непрерывна на R^+ и пусть существуют постоянные $M \geqq 0$, $\omega \geqq 0$ такие, что $\|\varphi(t)\| \leqq Me^{\omega t}$. Тогда к любому $\lambda > \omega$ существует $f(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(t) \,\mathrm{d}t$. Эту функцию f мы называем преобразованием Лапласа функции φ.

1,2,2. Лемма. *Преобразование Лапласа $f(\lambda)$ имеет для $\lambda > \omega$ производные всех порядков, причем $f^{(n)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n \varphi(t)\, \mathrm{d}t$.*

Доказательство проводится совершенно одинаково, как в [1], стр. 57.

1,2,3. Лемма. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}(R^+, E)$ непрерывны на R^+ и пусть существуют постоянные $M \geqq 0$, $\omega \geqq 0$ такие, что $\|\varphi_i(t)\| \leqq Me^{\omega t}$ для $t \in R^+$, $i = 1, 2$. Если для каждого $\lambda > \omega$ справедливо равенство $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi_1(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi_2(t)\, \mathrm{d}t$, то для каждого $t \in R^+$ будет $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$.*

Доказательство проводится на основании [1], стр. 63, при помощи линейных функционалов и свойств непрерывности.

1,3. ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

1,3,1. Определение. Функцию $\mathscr{T} \in \mathfrak{A}(R^+, \mathfrak{C}(E))$ мы назовем полугруппой если для любых $t, s \in R^+$ будет выполнено $\mathscr{T}(t + s) = \mathscr{T}(t) \circ \mathscr{T}(s)$.

1,3,2. Определение. Пусть γ – покрывающая система в E. Полугруппу $\mathscr{T}$ мы назовем γ-регулярной, если для каждого $t_n \in R^+$, $t_n \to 0$ будет $\mathscr{T}(t_n) \to j$ в $\mathfrak{C}_\gamma(E)$.

1,3,3. Теорема. *Если γ_1, γ_2 – покрывающие системы в E такие, что $\gamma_1 \subseteq \gamma_2$, то каждая γ_2-регулярная полугруппа является γ_1-регулярной. Каждая γ-регулярная полугруппа является σ-регулярной. Далее очевидно, что σ-регулярность совпадает с κ-регулярностью.*

1,3,4. Теорема. *Если $\mathscr{T}$ – σ-регулярная полугруппа, то существуют постоянные $M \geqq 0$, $\omega \geqq 0$ такие, что для каждого $t \in R^+$ выполнено неравенство $\|\mathscr{T}(t)\| \leqq Me^{\omega t}$.*

Доказательство см. [3], [5].

1,3,5. Теорема. *Пусть γ – покрывающая система в E. Если $\mathscr{T}$ γ-регулярная полугруппа, то $\mathscr{T}(t)$ непрерывна по $t \in R^+$ при топологии $\mathfrak{C}_\gamma(E)$. В частности, $\mathscr{T}(t)(x)$ непрерывна по $t \in R^+$ для каждого $x \in E$.*

Доказательство. а) Пусть $t \in R^+$, $t_n \to t$, $t_n > t$ и $x \in E$. Тогда $\|\mathscr{T}(t_n)(x) - \mathscr{T}(t)(x)\| = \|\mathscr{T}(t_n - t) \circ \mathscr{T}(t)(x) - \mathscr{T}(t)(x)\| = \|\mathscr{T}(t) \circ (\mathscr{T}(t_n - t) - j)(x)\| \leqq Me^{\omega t}\|\mathscr{T}(t_n - t)(x) - x\|$. Если теперь будет $H \in \gamma$, то из γ-регулярности $\mathscr{T}$ вытекает, что послезнее выражение сходится к нулю равномерно на H. Этим доказана требуемая непрерывность справа.

в) Пусть $t \in R^+$, $t_n \to t$, $t_n < t$ и $x \in E$. Тогда $\|\mathscr{T}(t_n)(x) - \mathscr{T}(t)(x)\| = \|\mathscr{T}(t_n) \circ (j - \mathscr{T}(t - t_n))(x)\| \leqq Me^{\omega t}\|\mathscr{T}(t - t_n)(x) - x\|$ и заключение аналогично, как в случае а).

1,3,6. Определение. Если $\mathscr{T}$ — произвольная полугруппа, то мы поставим ей в соответствие оператор $\mathscr{T}^{\cdot}$, называемый генератором, по следующему определению: $x \in \mathfrak{D}(\mathscr{T}^{\cdot})$ тогда и только тогда, когда существует предел $(\mathscr{T}(t)(x) - x)/t$ для $t \to 0_+$. $\mathscr{T}^{\cdot}(x)$ потом равно этому пределу.

1,3,7. Теорема. *Если $\mathscr{T}$ — σ-регулярная полугруппа и ω — неотрицательное число, что для некоторого $M \geqq 0$ будет при всех $t \in R^+$: $\|\mathscr{T}(t)\| \leqq Me^{\omega t}$ то для каждого $\lambda > \omega$ справедливо следующее:*

1) $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathscr{T}(t)((\lambda_j - \mathscr{T}^{\cdot})(x))\,\mathrm{d}t = x$ *для* $x \in \mathfrak{D}(\mathscr{T}^{\cdot})$

2) $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathscr{T}(t)(x)\,\mathrm{d}t \in \mathfrak{D}(\mathscr{T}^{\cdot})$ *для каждого* $x \in E$ *и* $(\lambda_j - \mathscr{T}^{\cdot})(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathscr{T}(t)(x) \,.$
$.\,\mathrm{d}t) = x$.

Доказательство по [2] (стр. 229).

1,3,8. Теорема. *Если $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ — σ-регулярные полугруппы, для которых $\mathscr{T}_1^{\cdot} = \mathscr{T}_2^{\cdot}$, то $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.*

Доказательство вытекает из теорем 1,3,3; 1,3,5, 1,3,7 и 1,2,3.

1,4. СТАНДАРТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1,4,1. Определение. Оператор $A \in \mathfrak{C}^+(E)$ назовем стандартным, когда будет существовать число $\kappa \geqq 0$ такое, что для каждого $\lambda > \kappa$ оператор $\lambda j - A$ будет простым и $(\lambda j - A)^{-1} \in \mathfrak{C}(E)$. Наименьшее число $\kappa \geqq 0$, обладающее этим свойством, обозначим символом $\kappa(A)$. Оператор $(\lambda j - A)^{-1}$ обозначим символом $\mathscr{R}(A)(\lambda)$ для каждого $\lambda > \kappa$ и назовем резольвентой оператора A в точке λ.

1,4,2. Лемма. *Если A — стандартный оператор, то*

1) $\mathscr{R}(A)(\lambda) - \mathscr{R}(A)(\mu) = (\mu - \lambda)\mathscr{R}(A)(\lambda) \circ \mathscr{R}(A)(\mu)$ *для каждого* $\lambda, \mu > \kappa(A)$

2) $\mathscr{R}(A)$ *является бесконечно дифференцируемой функцией для* $\lambda > \kappa(A)$ *по отношению к топологии* $\mathfrak{C}_\lambda(E)$,

3) $\mathscr{R}(A)(\lambda)^n = (-1)^{n-1}/(n-1)!\,(d^{n-1}/d\lambda^{n-1})\mathscr{R}(A)(\lambda)$

для каждого $\lambda > \kappa(A)$ *и* $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство легко, см. [3].

1,4,3. Лемма. *Если A — стандартный оператор, то для каждого $\lambda_0 > \kappa(A)$, $\lambda > \kappa(A)$ и $|\lambda - \lambda_0| < \|\mathscr{R}(A)(\lambda_0)\|^{-1}$ выполнено*

$$\mathscr{R}(A)(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k \mathscr{R}(A)(\lambda_0)^{k+1}$$

(в топологии $\mathfrak{C}_\lambda(E)$).

Доказательство легко, см. [3].

1,4,4. Лемма. *Если A — стандартный оператор, то для каждого $\lambda_0 > \kappa(A)$, $\lambda > \kappa(A)$, $|\lambda - \lambda_0| < \|\mathscr{R}(A)(\lambda_0)\|^{-1}$ выполнено*

$$\mathscr{R}(A)(\lambda)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n+1)!}{(n-1)!\,k!} (\lambda_0 - \lambda)^k \mathscr{R}(A)(\lambda_0)^{k+n}$$

(*в топологии* $\mathfrak{C}_\lambda(E)$).

Доказательство. Из 1,4,3 легко видно, что приведенный там ряд можно дифференцировать почленно в указанной области сходимости. Дальше дело заключается лишь в элементарных вычислениях.

1,4,5. Определение. Пусть γ — покрывающая система в E. Стандартный оператор A мы назовем γ-асимптотическим, если $\lambda\mathscr{R}(A)(\lambda) \to j$ для $\lambda \to \infty$, $\lambda > \kappa(A)$ в топологии $\mathfrak{C}_\gamma(E)$.

1,4,6. Лемма. *Пусть A — стандартный оператор. Тогда A является σ-асимптотическим в том и только в том случае, когда*

1) $\mathfrak{D}(A)$ *плотно в* E,

2) *существуют постоянные N, ν так, что $\|\mathscr{R}(A)(\lambda)\| \leqq N/\lambda$ для $\lambda > \nu$, $\lambda > \kappa(A)$.*

Доказательство. 1) Пусть A — σ-асимптотический стандартный оператор и пусть $\overline{\mathfrak{D}(A)} \neq E$. Значит, существует $x \in E$, $x \notin \overline{\mathfrak{D}(A)}$. Согласно 1,4,5 для этого $x \in E$ выполнено: $\lambda\mathscr{R}(A)(\lambda)(x) \to x$. Но $\lambda\mathscr{R}(A)(\lambda)(x) \in \mathfrak{D}(A)$ и тем более $\lambda\mathscr{R}(A)(\lambda)(x) \in \overline{\mathfrak{D}(A)}$. Но в таком случае $\lambda\mathscr{R}(A)(\lambda)(x)$ не может сходится к $x \notin \overline{\mathfrak{D}(A)}$, в чем и заключается противоречие.

2) Пусть выполнены условия 1), 2) нашей леммы. Достаточно, очевидно, доказать, что для каждого $x \in E$ будет $\lambda\mathscr{R}(A)(\lambda)(x) \to x$ для $\lambda \to \infty$. Легко можно доказать, что для $x \in \mathfrak{D}(A)$ $\lambda\mathscr{R}(A)(\lambda)(x) - x = \mathscr{R}(A)(\lambda)(A(x))$ и, следовательно, $\|\lambda\mathscr{R}(A)(\lambda)(x) - x\| \leqq (M/\lambda)\|A(x)\|$. Итак, мы доказали требуемое для $x \in \mathfrak{D}(A)$ и теперь уже можем воспользоваться теоремой Банаха-Штейнхауса, так как предполагаем, что $\mathfrak{D}(A)$ плотно в E.

1,4,7. Определение. Оператор $A \in \mathfrak{C}^+(E)$ мы назовем оператором Хилле-Иосиды, когда

1) A является стандартным

2) существуют постоянные M, ω такие, что для $\lambda > \omega$, $\lambda > \kappa(A)$ и $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство:

$$\|\mathscr{R}(A)(\lambda)^n\| \leqq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

1,4,8. Теорема. *Если $\mathcal{T}$ — σ-регулярная полугруппа, то $\mathcal{T}^{\cdot}$ является σ-асимптотическим оператором Хилле-Иосиды.*

Доказательство см. [3] с использованием 1,4,6.

1,4,9. Теорема. *Если $\mathcal{T}$ — σ-регулярная полугруппа и ω — неотрицательное число такое, что существует $M \geqq 0$, для которого $\|\mathcal{T}(t)\| \leqq Me^{\omega t}$ при $t \in R^+$, то $\omega \geqq \kappa(\mathcal{T}^{\cdot})$, и для $x \in E$, $\lambda > \omega$, $n = 1, 2, \ldots$ справедливо равенство*

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}^{\cdot})(\lambda) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} \mathcal{T}(t)(x)\, \mathrm{d}t\,.$$

Доказательство вытекает из 1,3,7, 1,4,8 и 1,4,2.

1,4,10. Теорема (Хилле-Иосида). *Если A — σ-асимптотический оператор Хилле-Иосиды, то существует одна и только одна σ-регулярная полугруппа $\mathcal{T}$ такая, что $\mathcal{T}^{\cdot} = A$.*

Доказательство см. в [3], стр. 360 с использованием теоремы 1,4,6.

2. ДОПОЛНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХИЛЛЕ-ИОСИДЫ

2,1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

2,1,1. Лемма (обобщение теоремы Абеля). *Пусть $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}(R^+, \mathfrak{A}(H, E))$ и пусть*

α) для каждого $x \in H$ функция $\mathcal{F}(.)(x)$ непрерывна на R^+,

β) существует $M \geqq 0$ и $\omega \geqq 0$ так, что для каждого $t \in R^+$ и для каждого $x \in H$: $\|\mathcal{F}(t)(x)\| \leqq Me^{\omega t}$,

γ) для каждого $\eta > 0$ существует $s > 0$ так, что для каждого $0 < t \leqq s$ и для каждого $x \in H$ будет $\|\mathcal{F}(t)(x)\| \leqq \eta$.

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_0 > \omega$ так, что

$$\left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathcal{F}(t)(x)\, \mathrm{d}t\right\| \leqq \varepsilon$$

для каждого $\lambda > \lambda_0$ и для каждого $x \in H$.

Доказательство. Сначала будем предполагать, что $\omega = 0$. Для каждого $s > 0$ и $x \in H$ выполнено следующее:

$$\left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathcal{F}(t)(x)\, \mathrm{d}t\right\| \leqq \left\|\lambda \int_0^s e^{-\lambda t}\, \mathcal{F}(t)(x)\, \mathrm{d}t\right\| + \left\|\lambda \int_s^\infty e^{-\lambda t}\, \mathcal{F}(t)(x)\right\| \mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t \sup \left\{\|\mathcal{F}(t)(x)\| : 0 < t \leqq s,\, x \in H\right\} + M\lambda \int_s^\infty e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \sup \left\{\|\mathcal{F}(t)(x)\| : 0 < t \leqq s,\, x \in H\right\} + Me^{-\lambda s}\,.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Тогда по предположению теоремы существует $s > 0$ так, что $\sup \{\|\mathscr{F}(t)(x)\| : 0 < t \leqq s, x \in H\} \leqq \varepsilon/2$. Далее, можно найти $\lambda_0 > 0$ так, что для $\lambda > \lambda_0 : e^{-\lambda s} \leqq \varepsilon/(2M + 1)$. Следовательно, тогда для $x \in H$ и $\lambda > \lambda_0$ имеет место неравенство $\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathscr{F}(t)(x)\, \mathrm{d}t\| \leqq \varepsilon$, что требовалось доказать.

Пусть теперь $\omega \geqq 0$. Обозначим $\mathscr{F}_0(t) = e^{-\omega t} \mathscr{F}(t)$. Тогда, очевидно, $\|\mathscr{F}_0(t)(x)\| \leqq M$ для $t \in R^+$, $x \in H$ и, значит, вследствие только что доказанного, существует $\lambda_0 > 0$ так, что для $\lambda > \lambda_0$ и $x \in H : \|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathscr{F}_0(t)(x)\, \mathrm{d}t\| \leqq \varepsilon/2$. Но для $\lambda > \omega$ имеем

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathscr{F}(t)(x)\, \mathrm{d}t = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda-\omega)t} e^{-\omega t} \mathscr{F}(t)(x)\, \mathrm{d}t =$$

$$\lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda-\omega)t} \mathscr{F}_0(t)(x)\, \mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda - \omega} (\lambda - \omega) \int_0^\infty e^{-(\lambda-\omega)t} \mathscr{F}_0(t)(x)\, \mathrm{d}t\,.$$

Итак, ясно, что можем найти $\lambda_1 \geqq \omega$ так, что для $\lambda > \lambda_1$ будет $\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathscr{F}(t)(x)\, \mathrm{d}t\| \leqq \varepsilon$, что требовалось доказать.

2,1,2. Лемма. *Пусть $g \in L_1(0, 1)$; тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует полином p так, что $\int_0^1 |p(u) - g(u)|\, \mathrm{d}u < \varepsilon$.*

Доказательство известно.

2,1,3. Лемма. *Пусть $g \in L_1(0, 1)$. Тогда дло каждого $\varepsilon > 0$ сушествуем полином p так, что справедливо утверждение: если $\psi \in \mathfrak{A}((0, 1), E)$, ψ непрерывна, и для каждого $0 < t < 1$ выполкено $|\psi(t)| \leqq 1$, то $\|\int_0^1 (g(u) - p(u))\, \psi(u)\, \mathrm{d}u\| \leqq \varepsilon$.*

Доказательство. Согласно лемме 2,1,2 существует полином p так, что $\int_0^1 |g(u) - p(u)|\, \mathrm{d}u \leqq \varepsilon$. Далее очевидно, что $g \,.\, \psi$ и $p \,.\, \psi$ интегрируемы и, следовательно,

$$\left\|\int_0^1 (p(u) - g(u))\, \psi(u)\, \mathrm{d}u\right\| \leqq \int_0^1 \|(p(u) - g(u))\, \psi(u)\|\, \mathrm{d}u \leqq \int_0^1 |p(u) - g(u)|\, \mathrm{d}u \leqq \varepsilon$$

что требовалось доказать.

2,1,4. Лемма. *Пусть $g \in L_1(0, 1)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует полином p, так, что справедливо утверждение: если $\varphi \in \mathfrak{A}(R^+, E)$, φ непрерывна, и для каждого $v \in R^+$ выполнено $\|\varphi(v)\| \leqq 1$, то для каждого $\lambda > 0$ будет $\lambda \|\int_0^\infty e^{-\lambda v}(p(e^{-\lambda v}) - g(e^{-\lambda v}))\, \varphi(v)\, \mathrm{d}v\| \leqq \varepsilon$.*

Доказательство. Для $\lambda > 0$, $0 < u < 1$ обозначим: $\psi_\lambda(u) = \varphi(-(1/\lambda) \log u)$; тогда для каждого $\lambda > 0$ и $0 < u < 1$ будет $\|\psi_\lambda(u)\| \leqq 1$ и ψ_λ непрерывной на $(0, 1)$. В таком случае по лемме 2,1,3 существует полином p так, что для каждого $\lambda > 0$

$$\left\|\int_0^1 (p(u) - g(u))\, \psi_\lambda(u)\, \mathrm{d}u\right\| \leqq \varepsilon\,.$$

Положим $u = e^{-\lambda v}$ для $0 < \lambda < \infty$. Тогда $\mathrm{d}u/\mathrm{d}v = -\lambda e^{-\lambda v}$ и выполнено:

$$\int_0^1 p(u)\, g(u)\, \psi_\lambda(u)\, \mathrm{d}u = -\int_0^1 (p(e^{-\lambda v}) - g(e^{-\lambda v}))\, \psi_\lambda(e^{-\lambda v})\, (-\lambda)\, e^{-\lambda v}\, \mathrm{d}v\,,$$

но $\psi_\lambda(e^{-\lambda v}) = \varphi(-(1/\lambda) \log e^{-\lambda v}) = \varphi(v)$ и, наконец, имеем

$$\int_0^1 (p(u) - g(u))\, \psi_\lambda(u)\, \mathrm{d}u = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}(p(e^{-\lambda v}) - g(e^{-\lambda v}))\, \varphi(v)\, \mathrm{d}v\,;$$

из этого уже сразу вытекает заключение теоремы.

2,1,5. Лемма (обобщение теоремы Караматы). *Пусть* $\mathscr{F}$ *— финкция из* $\mathfrak{A}(R^+, \mathfrak{A}(H, E))$, *обладающая следующими свойствами*:

1) *для каждого* $x \in H : \mathscr{F}(.)\,(x)$ *непрерывна на* R^+,

2) *существуют* $M \geqq 0$ *и* $\omega \geqq 0$ *так, что для каждого* $t \in R^+$ *и* $x \in H$ *выполнено неравенство* $\|\mathscr{F}(t)\,(x)\| \leqq Me^{\omega t}$,

3) *для каждого* $\eta > 0$ *существует* $\lambda_0 > 0$ *так, что для всех* $\lambda \geqq \lambda_0$ *и для всех* $x \in H$ *имеет место соотношение*:

$$\left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, \mathscr{F}(v)\,(x)\, \mathrm{d}v\right\| \leqq \eta$$

Тогда к любому $\varepsilon > 0$ *существует* $t_0 > 0$ *так, что для* $0 < t \leqq t_0$ *и для каждого* $x \in H$

$$\left\|\frac{1}{t} \int_0^t \mathscr{F}(v)\,(x)\, \mathrm{d}v\right\| \leqq \varepsilon$$

Доказательство. Сначала будем предполагать, что $\omega = 0$, следовательно, $\|\mathscr{F}(t)\,(x)\| \leqq M$. Выберем $g(u) = e^{-\log u}$ для $1/e \leqq u < 1$ и $g(u) = 0$ для $0 < u < 1/e$. Вследствие нашего выбора функции g получим:

$$0 < v \leqq \frac{1}{\lambda} \Rightarrow g(e^{-\lambda v}) = e^{\lambda v}\,; \quad v > \frac{1}{\lambda} \Rightarrow g(e^{-\lambda v}) = 0\,.$$

Отсюда вытекает следующее:

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, g(e^{-\lambda v})\, \mathscr{F}(v)\,(x)\, \mathrm{d}v = \lambda \int_0^{1/\lambda} \mathscr{F}(v)\,(x)\, \mathrm{d}v$$

для каждого $\lambda > 0$ и $x \in H$.

Затем выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно 2,1,4, существует полином p, что для каждого $\lambda > 0$

$$\left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}(p(e^{-\lambda v}) - g(e^{-\lambda v}))\, \frac{1}{M}\, \mathscr{F}(v)\,(x)\, \mathrm{d}v\right\| \leqq \frac{\varepsilon}{2M}\,.$$

Из этого дальше следует:

$$\left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}(p(e^{-\lambda v}) - g(e^{-\lambda v}))\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\| =$$

$$= \left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, p(e^{-\lambda v})\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, g(e^{-\lambda v})\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\|$$

$$\left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, p(e^{-\lambda v})\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v - \lambda \int_0^{1/\lambda} \mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Теперь можем для $\lambda > 0$ написать:

$$\left\|\lambda \int_0^{1/\lambda} \mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\| = \left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, p(e^{-\lambda v})\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v - \lambda \int_0^{1/\lambda} \mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v -\right.$$

$$\left.- \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, p(e^{-\lambda v})\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\| \leqq \left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, p(e^{-\lambda v})\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v -\right.$$

$$\left.- \lambda \int_0^{1/\lambda} \mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\| + \left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, p(e^{-\lambda v})\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\| \leqq \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ \left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, p(e^{-\lambda v})\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\|$$

что имеет место для каждого $\lambda > 0$ и $x \in H$.

Теперь рассмотрим член $\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, p(e^{-\lambda v})\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v$. Пусть полином p имеет вид

$$p(u) = \sum_{r=0}^{n} a_r u^r$$

Тогда

$$\left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, p(e^{-\lambda v})\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{r=0}^{n} a_r \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v} e^{-r\lambda v}\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\| \leqq \sum_{r=0}^{n} |a_r| \left\|\lambda \int_0^\infty e^{-(r+1)\lambda v}\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\|.$$

По предположению существует λ_0 так, что для $\lambda \geqq \lambda_0$ и $x \in H$ будет

$$\left\|\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v}\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\| \leqq \frac{\varepsilon}{2\sum_{r=0}^{n} |a_r|}\,.$$

Следовательно, для каждого $n \geqq 1$ и $\lambda \geqq \lambda_0$ будет

$$\left\|n\lambda \int_0^\infty e^{-n\lambda v}\,\mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v\right\| \leqq \frac{\varepsilon}{2\sum_{r=0}^{n} |a_r|}\,,$$

значит,

$$\left\| \lambda \int_0^\infty e^{-n\lambda v} \mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v \right\| \leqq \frac{\varepsilon}{2n \sum_{r=0}^{n} |a_r|} \leqq \frac{\varepsilon}{2 \sum_{r=0}^{n} |a_r|}\,.$$

В заключение легко получаем

$$\sum_{r=0}^{n} |a_r| \left\| \lambda \int_0^\infty e^{-(r+1)\lambda v} \mathscr{F}(v)(x)\,\mathrm{d}v \right\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Этим закончено доказательство для $\omega = 0$. Если $\omega \geqq 0$, обозначим $\mathscr{F}_0(t) = e^{-\omega t} \mathscr{F}(t)$. К $\mathscr{F}_0$ можем затем применить только что доказанный результат и отсюда, аналогично как в 2,1,1, получим требуемое утверждение для $\mathscr{F}$.

2,2. ПОЛУГРУППЫ В ОБЩИХ ОПЕРАТОРНЫХ ТОПОЛОГИЯХ

2,2,1. Теорема. *Пусть γ — покрывающая система в E и $\mathscr{T}$ — полугруппа. $\mathscr{T}$ является γ-регулярной тогда и только тогда, если (1) $\mathscr{T}$ — σ-регуларная и (2) к любому $\varepsilon > 0$ и $H \in \gamma$ существует $\delta > 0$ так, что для каждого $0 < t \leqq \delta$ и для каждого $x \in H$ выполнено*:

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s - x \right\| \leqq \varepsilon\,.$$

Доказательство. 1) Если $\mathscr{T}$ — γ-регулярное, то утверждение очевидно по 1,3,5.

2) Пусть выполнено условие теоремы; нам надо доказать, что $\mathscr{T}(t) \to j$ в $\mathfrak{C}_\gamma(E)$. По теореме 1,3,4 существуют неотрицательные постоянные $M \geqq 0$ $\omega \geqq 0$ такие, что для $t \in R^+$ справедливо $\|\mathscr{T}(t)\| \leqq Me^{\omega t}$. Далее, функции $\mathscr{T}(.)(x)$ непрерывны для каждово $x \in E$ вследствие 1,3,5 и (1). Очевидно, что для каждого $t \in R^+$, $\beta \in R^+$ и $x \in E$ можем писать:

$$\|\mathscr{T}(t)(x) - x\| = \Bigg\| (\mathscr{T}(t) - j)\left(\frac{1}{\beta}\int_0^\beta \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s\right) -$$
$$- (\mathscr{T}(t) - j)\left(\frac{1}{\beta}\int_0^\beta \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s - x\right)\Bigg\| \leqq \left\|(\mathscr{T}(t) - j)\left(\frac{1}{\beta}\int_0^\beta \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s\right)\right\| +$$
$$+ \left\|(\mathscr{T}(t) - j)\left(\frac{1}{\beta}\int_0^\beta \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s - x\right)\right\|.$$

Теперь выберем произвольное фиксированное $H \in \gamma$ и обозначим $\varrho = \sup_{x\in H} (\|x\|)$. Пусть еще $\eta > 0$ произвольно.

Если положить $\varepsilon = \eta/2(Me^{\omega} + 1)$, то по предположению существует $\delta > 0$ так, что для $x \in H$ и $0 < \beta \leqq \delta$ выполнено: $\|(1/\beta) \int_0^\beta \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s - x\| \leqq \varepsilon$. Тогда для каждого $0 < t \leqq 1$ получим следующее:

$$\left\|(\mathscr{T}(t) - j)\left(\frac{1}{\beta}\int_0^\beta \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s - x\right)\right\| \leqq (Me^{\omega} + 1)\left\|\frac{1}{\beta}\int_0^\beta \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s - x\right\| \leqq \frac{\eta}{2}.$$

Далее, для каждого $t > 0$, $\beta > 0$, $x \in E$ очевидно:

$$(\mathscr{T}(t) - j)\left(\frac{1}{\beta}\int_0^\beta \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s\right) = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta (\mathscr{T}(t) - j) \circ \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{\beta}\int_0^\beta \mathscr{T}(t + s)(x)\,\mathrm{d}s - \int_0^\beta \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\beta}\left(\int_\beta^{\beta+t} \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \frac{t}{\beta}\left(\frac{1}{t}\int_\beta^{\beta+t} \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{t}\int_0^t \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s\right).$$

Теперь выберем фиксированное $0 < \beta_0 \leqq \delta$ и положим $\vartheta = \beta_0\eta/(2M(e^{\omega(\beta_0+1)} + e^{\omega})\varrho + \beta_0\eta + 1)$. Очевидно $0 < \vartheta \leqq 1$. Тогда на основании предыдущего разложения получим для $0 < t \leqq \vartheta$ и $x \in H$

$$\left\|(\mathscr{T}(t) - j)\left(\frac{1}{\beta_0}\int_0^{\beta_0} \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s\right)\right\| \leqq \frac{t}{\beta_0}(Me^{\omega(\beta_0+1)} + Me^{\omega})\varrho \leqq \frac{\eta}{2}.$$

Итак, в заключение получаем для $0 < t \leqq \vartheta$, $x \in H$: $\|\mathscr{T}(t)(x) - x\| \leqq \eta$, что требовалось доказать.

2,2,2. Теорема. *Пусть γ — покрывающая система в E и $\mathscr{T}$ — полугруппа. $\mathscr{T}$ является γ-регулярной тогда и только тогда, если (1) $\mathscr{T}$ — σ-регулярная и (2) для каждого $H \in \gamma$ выполнено: $\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathscr{T}(t)(x)\,\mathrm{d}t \to x$ равномерно для $x \in H$, если $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathscr{T}$ γ-регулярна. Выберем фиксированное $H \in \gamma$ и положим для $t \in R^+$ и $x \in H$: $\mathscr{F}(t)(x) = \mathscr{T}(t)(x) - x$. Тогда $\mathscr{F}$ выполняет, очевидно, условия теоремы Абеля 2,1,1, и отсюда уже легко получим наше утверждение.

2) Пусть выполнено утверждение теоремы. Выберем опять фиксированное $H \in \gamma$ и положим $\mathscr{F}(t)(x) = \mathscr{T}(t)(x) - x$ для $t \in R^+$, $x \in H$. Тогда для $\mathscr{F}$ выполнены условия теоремы Караматы 2,1,5. Из нее вытекает: $(1/t)\int_0^t \mathscr{T}(s)(x)\,\mathrm{d}s \to x$ равномерно на H для $t \to 0_+$. Итак, мы можем применить теорему 2,2,1 и получим, что $\mathscr{T}$ γ-регулярно.

2,2,3. Теорема. *Если $\mathcal{T}$ — γ-регулярная полугруппа для некоторой покрывающей системы γ на E, то $\mathcal{T}^{\cdot}$ является γ-асимптотическим оператором Хилле-Иосиды.*

Доказательство вытекает из 1,3,7 и 2,2,2.

2,2,4. Теорема (дополненная теорема Хилле-Иосиды). *Если A — γ-асимптотический оператор Хилле-Иосиды для некоторой покрывающей системы γ на E, то существует одна и только одна σ-регулярная полугруппа $\mathcal{T}$ такая, что $\mathcal{T}^{\cdot} = A$. Эта полугруппа $\mathcal{T}$ является γ-регулярной.*

Доказательство вытекает из 1,4,10; 1,3,7; 2,2,2.

3. ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛУГРУПП

3,1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

3,1,1. Лемма. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}(R^+, E)$ и пусть*

1) *φ непрерывна на R^+ и имеет предел для $t \to 0_+$*
2) *существуют постоянные $N \geqq 0$, $\nu \geqq 0$ такие, что $\|\varphi(t)\| \leqq Ne^{\nu t}$.*

Тогда для каждого $\lambda > \nu$ выполнено ($k \to \infty$)

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k^2} e^{-\lambda i/k}\varphi(i/k) \to \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\lambda > \nu$. Выберем $\alpha_1 \in R^+$ так, что для $\alpha > \alpha_1$ будет $\left\|\int_\alpha^\infty e^{-\lambda t}\,\varphi(t)\right\| \leqq \varepsilon/3$. Это, очевидно, всегда можно, потому что по нашему предположению $e^{-\lambda t}\,\varphi(t)$ интегрируема на R^+. Тогда, следовательно, также $\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\alpha e^{-\lambda t}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqq \varepsilon/3$.

Далее выберем $\alpha_2 \in R^+$ так, что для $\alpha > \alpha_2$ будет $\int_\alpha^\infty e^{-(\lambda-\nu)t}\,\mathrm{d}t \leqq \varepsilon/3N$. Это, очевидно, тоже можно, так как $\lambda > \nu$.

Теперь выберем натуральное α_0 так, чтобы $\alpha_0 \geqq \alpha_1, \alpha_0 \geqq \alpha_2$. Потому что на интервале $(0, \alpha_0\rangle$ фунция $e^{-\alpha t}\,\varphi(t)$ непрерывна и имеет в точке 0 предел, можем выбрать $\eta > 0$ так, что для $0 < t_1, t_2 \leqq \alpha_0$, $|t_1 - t_2| \leqq \eta$ выполнено: $\left\|e^{-\lambda t_1}\,\varphi(t_1) - e^{-\lambda t_2}\,\varphi(t_2)\right\| \leqq \varepsilon/3\alpha_0$. Далее, можем найти натуральное k_0 такое, что $k_0 \geqq \alpha_0$ и $1/k_0 \leqq \eta$. Тогда для каждого $k \geqq k_0$ будет

$$\left\|\int_0^{\alpha_0} e^{-\lambda t}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\alpha_0 k} e^{-\lambda i/k}\,\varphi(i/k)\right\| \leqq \alpha_0 k\,\frac{1}{k}\,\frac{\varepsilon}{3\alpha_0} = \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Следовательно, для $k \geqq k_0$:

$$\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{\alpha_0 k} e^{-\lambda i/k}\,\varphi\left(\frac{i}{k}\right)\right\| \leqq \tfrac{2}{3}\varepsilon\,.$$

Далее произведем оценку (для $k \geqq \alpha_0$)

$$\left\|\frac{1}{k} \sum_{i=\alpha_0 k+1}^{k^2} e^{-\lambda i/k} \varphi\left(\frac{i}{k}\right)\right\| \leqq N \frac{1}{k} \sum_{i=\alpha_0 k+1}^{k^2} e^{-(\lambda-\nu)i/k} \leqq N \int_{\alpha_0 h}^{\infty} e^{-(\lambda-\nu)t} \,\mathrm{d}t \leqq N \frac{\varepsilon}{3N} = \frac{\varepsilon}{3}$$

Итак, в заключение получаем для $k \geqq k_0$:

$$\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(t) \,\mathrm{d}t - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k^2} e^{-\lambda i/k} \varphi\left(\frac{i}{k}\right)\right\| \leqq \varepsilon ,$$

что требовалось доказать.

3,1,2. Лемма. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}(R^+, E)$ такая, что*

1) *φ непрерывна на R^+*

2) *существуют постоянные $N \geqq 0$ и $\nu \geqq 0$ так, что для $t \in R^+$ $\|\varphi(t)\| \leqq Ne^{\nu t}$.*

Если для $\lambda > \nu$ выполнено $f(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(t) \,\mathrm{d}t$, то для каждого $t \in R^+$

$$\varphi(t) = \lim_{k \to 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right),$$

где $f^{(k)}$ означает производную f k-ого порядка по λ ($\lambda > \nu$).

Доказательство для векторных функций производится дословно так же, как для действительных функций ([1], стр. 288).

3,2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

3,2,1. Теорема. *Пусть*

(1) *γ — покрывающая система в E*

(2) *$\mathfrak{K}$ — выпуклое множество операторов из $\mathfrak{C}(E)$ такое, что справедливо следующее: если $T_n \in \mathfrak{K}$, $T \in \mathfrak{C}(E)$ и $T_n \to T$ в $\mathfrak{C}_\gamma(E)$ то $T \in \mathfrak{K}$.*

Если $\mathscr{T}$ — γ-регулярная полугруппа и N, χ — две неотрицательные постоянные такие, что для каждого $t \in R^+$: $\mathscr{T}(t) \in Ne^{\chi t}\mathfrak{K}$, то для каждого $\lambda > \chi$, $\lambda > \kappa(\mathscr{T}^\cdot)$ и $n = 1, 2, \ldots$ выполнено: $\mathscr{R}(\mathscr{T}^\cdot)(\lambda)^n \in (N/(\lambda - \chi)^n)\,\mathfrak{K}$.

Доказательство. Согласно 1,3,4 существуют неотрицательные постоянные M, ω такие, что $\|\mathscr{T}(t)\| \leqq Me^{\omega t}$ для каждого $t \in R^+$. По 1,4,9 будет $\mathscr{R}(\mathscr{T}^\cdot)(\lambda)^n(x) = (1/(n-1)!) \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} \mathscr{T}(t)(x) \,\mathrm{d}t$ для $x \in E$, $\lambda > \omega$ и $n = 1, 2, \ldots$ Кроме этого, $\kappa(A) \leqq \omega$.

По теореме 1,3,5 функция $\mathscr{T}$ непрерывна при топологии $\mathfrak{C}_\gamma(E)$. Выберем фиксированное $H \in \gamma$ и определим функцию $\mathscr{F}(t) \in \mathfrak{B}(H, E)$ следующим образом: для $x \in H$ будет $\mathscr{F}(t)(x) = \mathscr{T}(t)(x)$.

Очевидно, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ функция $t^{n-1}\mathscr{F}(t)$ выполняет условия леммы 3,1,1 (при фиксированном n достаточно взять $v = \omega + 1$ и $N = (n-1) M \sup\limits_{\mathfrak{K} H} (\|x\|)$). Итак, по этой лемме мы для каждого $\lambda > \omega + 1$ и $n = 1, 2, \ldots$ получаем

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k^2} e^{-\lambda i/k} \left(\frac{v}{k}\right)^{n-1} \mathscr{T}\left(\frac{i}{k}\right) \to (n-1)!\, \mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\lambda)^n$$

в $\mathfrak{C}_\gamma(E)$ для $k \to \infty$.

Но по предположению $\mathscr{T}(i/k) \in N e^{\chi i/k} \mathfrak{K}$. Значит, для $\lambda > \omega + 1$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k^2} e^{-\lambda i/k} \left(\frac{i}{k}\right)^{n-1} \mathscr{T}\left(\frac{i}{k}\right) \in$$

$$N \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k^2} e^{-\lambda i/k} e^{\chi i/k} \left(\frac{i}{k}\right)^{n-1} \mathfrak{K} = N \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k^2} e^{-(\lambda-\chi) i/k} \left(\frac{i}{k}\right)^{n-1} \mathfrak{K}\,.$$

Теперь путем предельного перехода легко получим, что

$$(n-1)!\, \mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\lambda)^n \in N \int_0^\infty e^{-(\lambda-\chi)t} t^{n-1}\, \mathrm{d}t\, \mathfrak{K} = \frac{N(n-1)!}{(\lambda-\chi)^n} \mathfrak{K}$$

для $\lambda > \chi$, $\lambda > \omega + 1$ и $n = 1, 2, \ldots$ Итак, имеем $\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\lambda)^n \in (N(\lambda - \chi)^n)\, \mathscr{R}$ для приведенных выше λ и n.

Пусть теперь ϱ — нижняя грань множества всех чисел $\bar{\varrho}$, обладающих следующими свойствами: 1) $\bar{\varrho} > \chi$, $\bar{\varrho} > \kappa(\mathscr{T}^{\bullet})$; 2) для каждого $\lambda > \bar{\varrho}$ и $n = 1, 2, \ldots$: $\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\lambda)^n \in (N/(\lambda-\chi)^n)\, \mathfrak{K}$. Потому что в силу предыдущих рассуждений это множество не пусто (принадлежат ему числа большие $\max(\chi, \omega + 1)$) имеет определение ϱ смысл.

Если $\varrho = \max(\chi, \kappa(\mathscr{T}^{\bullet}))$, то утверждение нашей теоремы правильно. Значит, задача заключается в доказательстве, что действительно $\varrho = \max(\chi, \kappa(\mathscr{T}^{\bullet}))$. Итак, будем в дальнейшем предполагать, что $\varrho > \chi$, $\varrho > \kappa(\mathscr{T}^{\bullet})$, и придем к противоречию.

Сначала выберем $\varrho_0 > \varrho$ так, что $\varrho_0 - \varrho \leqq \frac{1}{2}\|\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\varrho_0)\|^{-1}$. Покажем, что это всегда возможно. По 1, 4, 1 $\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\lambda)$, очевидно, непрерывна в $\lambda(\lambda > \kappa(\mathscr{T}^{\bullet}))$ при равномерной операторной топологии. Значит, мы можем найти $\delta > 0$ так, что для $\varrho_0 > \varrho$, $\varrho_0 - \varrho \leqq \delta$ выполнено: $\|\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\varrho_0)\| \leqq 2\|\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\varrho)\|$, то есть, $\|\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\varrho_0)\|^{-1} \geqq \frac{1}{2}\|\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\varrho)\|^{-1}$. Итак, достаточно выбрать ϱ_0 так, чтобы $\varrho_0 > \varrho$, $\varrho_0 - \varrho \leqq \delta$ и $\varrho_0 - \varrho \leqq \frac{1}{4}\|\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\varrho)\|^{-1}$.

Обозначим теперь $q = \min\left[\|\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\varrho_0)\|^{-1}, \varrho_0 - \chi, \varrho_0 - \kappa(\mathscr{T}^{\bullet})\right]$.

Легко видно, что $q \leqq \|\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\varrho_0)\|^{-1}$. По теореме 1,4,4 для всех λ таких, что $|\lambda - \varrho_0| < q$, $\lambda > \kappa(\mathscr{T}^{\bullet})$, будет:

$$\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\lambda)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!} (\varrho_0 - \lambda)^k\, \mathscr{R}(\mathscr{T}^{\bullet})(\varrho_0)^{k+n}\,.$$

Потому что $\varrho_0 > \varrho$, будет $\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\cdot})(\varrho_0)^p \in (N/(\varrho - \chi)^p)\,\mathfrak{K}$ для $p = 1, 2, \ldots$ Из этого вытекает, для каждого λ такого, что $|\lambda - \varrho_0| < q$, $\lambda > \kappa(\mathscr{T}^{\cdot})$, будет:

$$\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\cdot})(\lambda)^n \in N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!} \frac{(\varrho_0 - \lambda)^k}{(\varrho_0 - \chi)^{k+n}}\,\mathfrak{K}\,.$$

Потому что, как известно,

$$\frac{1}{(\varrho_0 - \chi)^{k+n}} = \frac{1}{(k+n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-(\varrho_0 - \chi)t} t^{k+n-1}\,\mathrm{d}t$$

получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!} \frac{(\varrho_0 - \lambda)^k}{(\varrho_0 - \chi)^{k+n}} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varrho_0 - \lambda)^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{-(\varrho_0 - \chi)t} t^{k+n-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-(\varrho_0 - \chi)t} t^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varrho_0 - \lambda)^k t^k}{k!} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-(\varrho_0 - \chi)t} e^{(\varrho_0 - \lambda)t} t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \chi)t} t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(\lambda - \chi)^n}\,.$$

Значит, отсюда для $|\lambda - \varrho_0| < q$, $\lambda > \kappa(\mathscr{T}^{\cdot})$ и $n = 1, 2, \ldots$ вытекает $\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\cdot})(\lambda)^n \in (N/(\lambda - \chi)^n)\,\mathfrak{K}$.

Но это приводит нас к противоречию, так как очевидно существует число $\bar{\varrho} < \varrho$ со свойстван (1), (2) из определения ϱ (смотри выше).

3,2,2. Теорема. *Пусть*

1) γ — *покрывающая система в* E

2) $\mathfrak{K}$ — *подмножество* $\mathfrak{C}(E)$ *такое, что выполнено: если* $T_n \in \mathfrak{K}$, $T \in \mathfrak{C}(E)$ *и* $T_n \to T$ *в* $\mathfrak{C}_\gamma(E)$, *то* $T \in \mathfrak{K}$.

Если A — стандартный оператор, N, χ, ϑ — три неотрицательные постоянные и Z — бесконечное множество натуральных чисел такие, что для $\lambda > \chi$, $\lambda > \vartheta$ и $\lambda > \kappa(A)$ и $n \in Z$: $\mathscr{R}(A)(\lambda)^n \in (N((\lambda - \chi)^n)\,\mathfrak{K}$, то каждая γ-регулярная полугруппа $\mathscr{T}$, для которой $\mathscr{T}^{\cdot} = A$, обладает следующим свойством: для $t \in R^+$ имеем $\mathscr{T}(t) \in Ne^{\chi t}\,\mathfrak{K}$.

Доказательство. Согласно теореме 1,4,8 $\mathscr{T}^{\cdot}$ однозначно определена. Далее, по 1,4,4 существуют постоянные $M \geqq 0$, $\omega \geqq 0$ так, что для $t \in R^+$: $\|\mathscr{T}(t)\| \leqq Me^{\omega t}$. Вследствие 1,4,7 $\omega \geqq \kappa(\mathscr{T}^{\cdot})$ и для $\lambda > \omega$, $x \in E$ выполнено: $\mathscr{R}(\mathscr{T}^{\cdot})(\lambda)(x) = \mathscr{R}(A)(\lambda)(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,\mathscr{T}(t)(x)\,\mathrm{d}t$.

Выберем теперь фиксированное $H \in \gamma$ и обозначим $\beta = \sup_{x \in H}(\|x\|)$. Далее положим $\mathscr{F}(t)(x) = \mathscr{T}(t)(x)$ для $t \in R^+$ и $x \in H$. Тогда $\mathscr{F}$ является функцией со значениями в $\mathfrak{B}(H, E)$, непрерывной при топологии $\mathfrak{B}(H, E)$ и $\|\mathscr{F}(t)\| \leqq M\beta e^{\omega t}$. Если обозначим $\mathscr{K}(\lambda)(x) = \mathscr{R}(A)(\lambda)(x)$ для $x \in H$, то легко докажем, что $\mathscr{K}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathscr{F}(t)\,\mathrm{d}t$ (в пространстве $\mathfrak{B}(H, E)$). Итак, мы можем применить теорему 3,2,1, и

$$\mathscr{F}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \mathscr{K}^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right)$$

в $\mathfrak{B}(H, E)$. Обозначим $\mathscr{L}(\lambda) = \mathscr{R}(A)(\lambda)$ и через $\mathscr{L}^{(n)}(\lambda)$ производную $\mathscr{L}$ n-ого порядка. Согласно выше доказанному, получаем:

$$\mathscr{T}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \mathscr{L}^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) \quad \text{в} \quad \mathfrak{C}_\gamma(E)\,.$$

Но $\mathscr{L}^{(n)}(\lambda) = (-1)^n\, n!\,\mathscr{R}(A)(\lambda)^{n+1}$, так что

$$\mathscr{T}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t}\,\mathscr{R}(A)\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n \quad \text{в} \quad \mathfrak{C}_\gamma(E)\,.$$

По предположению $\mathscr{R}(A)(\lambda)^n \in (N/(\lambda - \chi)^n)\,\mathfrak{K}$ для $\lambda > \vartheta$, $\lambda > \kappa(A)$ и $n \in Z$. В частности, для $n > t\vartheta$, $n > t\,\kappa(A)$, $n \in Z$

$$\left(\left(\frac{n}{t}\right)\mathscr{R}(A)\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n \in N\left(\frac{n/t}{n/t - \chi}\right)^n \mathfrak{K}\,,$$

то есть

$$\frac{1}{N}\left(\frac{n/t}{n/t - \chi}\right)^{-n}\left(\frac{n}{t}\mathscr{R}(A)\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n \in \mathfrak{K}\,.$$

Простым вычислением получаем

$$\left(\frac{n/t}{n/t - \chi}\right)^{-n} \to e^{-\chi t}$$

для $n \to \infty$, так что левая часть стремится к $(e^{-\chi t}/N)\,\mathscr{T}(t)$ в $\mathfrak{C}_\gamma(E)$ для $n \to \infty$, $n \in Z$. По предположению о $\mathfrak{K}$ получаем, следовательно, $(e^{-\chi t}/N)\,\mathscr{T}(t) \in \mathfrak{K}$, то есть $\mathscr{T}(t) \in Ne^{\chi t}\mathfrak{K}$. Этим теорема доказана.

Замечание. Обращаем внимание на разницу в теоремах 3,2,1 и 3,2,2, что касается свойств системы $\mathfrak{K}$. В теореме 3,2,1 предполагаем, в отличие от 3,2,2, помимо прочего, еще выпуклость $\mathfrak{K}$. Следовательно, $\mathfrak{K}$ может быть в теореме 3,2,2, например, множеством всех изометрических преобразований из $\mathfrak{C}(E)$, но не так в теореме 3,2,1.

4,1,1. Определение. В дальнейшем будем символом Ω обозначать какое-либо локально компактное топологическое пространство, т.е. такое пространство, в котором существует последовательность открытых относительно компактных множеств $\Omega_k \supseteq \Omega$, для которой $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$. Через $B(\Omega)$ обозначим систему всех борелевских подмножеств Ω. Далее скажем, что какая-нибудь обобщенная последовательность $\xi_\alpha \in \Omega$ стремится к бесконечности ($\xi_\alpha \to \infty$), если к любому компактному множеству $K \subseteq \Omega$ существует α_0 так, что для $\alpha \geqq \alpha_0$ будет $\xi_\alpha \notin K$.

4,1,2. Определение. Символом $C(\Omega)$ обозначим систему всех непрерывных функций φ на Ω, для которых имеет место утверждение: если $\xi_\alpha \in \Omega$, $\xi_\alpha \to \infty$, то $\varphi(\xi_\alpha) \to 0$. Очевидно, что множество будет линейным пространством, если сложение и умножение на число производится обычным способом. Если на $C(\Omega)$ определим $\|\varphi\| = \sup_{\xi \in \Omega} |\varphi(\xi)|$, то получим, очевидно, пространство Банаха. В дальнейшем символ $C(\Omega)$ будет, следовательно, обозначать пространство Банаха непрерывных функций с такой нормой. Функцию $\varphi \in C(\Omega)$ назовем неотрицательной, если для каждого $\xi \in \Omega$ будет $\varphi(\xi) \geqq 0$.

4,1,3. Определение. Через $\mathscr{M}(\Omega)$ обозначим систему всех регулярных мер на $B(\Omega)$ (регулярная мера см. [4]). Если $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ то символ $\operatorname{var} \mu$ означает изменение меры μ. Меру $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ мы назовем неотрицательной, если $\mu(A) \geqq 0$ для каждого $A \in B(\Omega)$.

4,1,4. Теорема (обобщенная теорема Рисса). *Если l — линейный функционал на $C(\Omega)$, то существует одна и только одна мера $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ такая, что для каждого $\varphi \in C(\Omega)$: $l(\varphi) = \int_\Omega \varphi(\xi)\, \mu(\mathrm{d}\xi)$. Эту меру обозначим через $l^\times$. Справедливо равенство $\|l\| = \operatorname{var} \mu(\Omega)$.*

Доказательство производится легко на основании обобщения Какутани теоремы Рисса для компактных пространств (см. [4]) путем разложения пространства Ω в последовательность Ω_k (см. 4,1,1).

4,1,5. Определение. Линейный функционал l на $C(\Omega)$ назовем неотрицательным, если для каждого $\varphi \geqq 0$, $\varphi \in C(\Omega)$ будет $l(\varphi) \geqq 0$. Очевидно, что для неотрицательного l будет $l^\times$ тоже неотрицательной мерой.

4,1,6. Определение. Равномерной структурой π на Ω мы разумеем, в смысле Бурбаки [6], определенный фильтр множеств на $\Omega \times \Omega$. Если $W \in \pi$, то для $\xi \in \Omega$ определяем: $W(\xi) = \{\eta : (\xi, \eta) \in W\}$. Равномерную структуру π на Ω мы назовем компактной, если для каждого $W \in \pi$ будет существовать $W_0 \in \pi$ так, что $W_0 \subseteq W$ и что для каждого $\xi \in \Omega$ будет $W_0(\xi)$ относительно компактным в Ω.

4,1,7. Определение. Каждой равномерной структуре π на Ω поставим в соответствие систему π^0 подмножеств $C(\Omega)$ следующим образом: $\Phi \in \pi^0$ тогда и только тогда, если 1) существует число $c \geqq 0$ так, что для каждого $\varphi \in \Phi$: $\|\varphi\| \leqq c$ и 2) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $W \in \pi$ так, что для $(\xi, \eta) \in W$, $\varphi \in \Phi$ выполнено $|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)| \leqq \eta$. Первое условие означает ограниченность в $C(\Omega)$, второе равностепенную непрерывность по π.

4,1,8. Лемма. *Для каждой равномерной структуры π система π^0 является покрывающей соистемой в $C(\Omega)$.*

Доказательство. Ограниченность каждого множества из π^0 очевидна. Достаточно проверить, что для $\varphi \in C(\Omega)$ будет $\{\varphi\} \in \pi^0$, что нетрудно.

4,1,9. Лемма. *Если π_1, π_2 — две равномерные структуры на Ω такие, что $\pi_1 \subseteq \pi_2$, то $\pi_1^0 \subseteq \pi_2^0$.*

Доказательство нетрудно.

4,2. ОПЕРАТОРЫ В $C(\Omega)$

4,2,1. Определение. Каждому оператору $T \in \mathfrak{C}(C(\Omega))$ поставим в соответствие функцию $T^\times$ на $\Omega \times B(\Omega)$ так, чтобы для каждого $\xi \in \Omega$ было $T^\times(\xi, .) \in \mathscr{M}(\Omega)$ и для каждого $\varphi \in C(\Omega)$: $T(\varphi)(\xi) = \int_\Omega \varphi(\eta)\, T^\times(\xi, \mathrm{d}\eta)$. Это, очевидно, возможно сделать и притом однозначно (см. теорема 4,1,4). Далее, очевидно, $\|T\| = \sup\limits_{\xi \in \Omega} (\operatorname{var}(T^\times(\xi, .))(\Omega))$.

4,2,2. Определение. Оператор $T \in \mathfrak{C}(C(\Omega))$ называем неотрицательным, если для каждого $\varphi \in C(\Omega)$, $\varphi \geqq 0$ выполнено: $T(\varphi) \geqq 0$.

4,2,3. Лемма. *Если T — неотрицательный оператор, то для каждого $\xi \in \Omega$, $T^\times(\xi, .)$ является неотрицательной мерой и $\|T\| = \sup\limits_{\xi \in \Omega} T^\times(\xi, \Omega)$.*

Доказательство можно легко провести при помощи 4,1,4.

4,2,4. Теорема. *Пусть π — компактная равномерная структура на Ω и T_k — последовательность неотрицательных операторов из $\mathfrak{C}(C(\Omega))$ таких, что $\|T_k\| \leqq 1$. В таком случае $T_k \to j$ в $\mathfrak{C}_{\pi^0}(C(\Omega))$ тогда и только тогда, если для каждого $W \in \pi$ выполнено: $T_k^\times(\xi, W(\xi)) \to 1$ равномерно для $\xi \in \Omega$ $(k \to \infty)$.*

Доказательство. А) Пусть $T_n \to j$ в $\mathfrak{C}_{\pi^0}(C(\Omega))$. Выберем произвольное $W \in \pi$. Потому что π является по предположению компактной равномерной структурой, существует $W_0 \in \pi$ так, что $W_0 \subseteq W$ и для каждого $\xi \in \Omega$: $W_0(\xi)$ относительно компактно. К этому W_0 существует (см. Катетов — дополнение к [8], теорема 3,7) псевдометрика ϱ на Ω такая, что для каждого $\xi \in \Omega$: $\{\eta : \varrho(\xi, \eta) \leqq 1\} \subseteq W_0(\xi)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $W_1 \in \pi$ так, что для каждого $\xi \in \Omega$: $\{\eta : \varrho(\xi, \eta) \leqq \varepsilon\} \subseteq W_1(\xi)$.

Теперь определим функцию p для действительных t следующим образом: $p(t) = 1 - |t|$ для действительных $|t| \leqq 1$, $p(t) = 0$ для действительных $|t| > 1$. Очевидно, что p – липшицевская функция, т. е. существует действительное число p_0, для $|p(t_1) - p(t_2)| \leqq p_0|t_1 - t_2|$. Теперь положим $P_\xi(\eta) = p(\varrho(\xi, \eta))$. Эта система функций обладает следующими свойствами:

1) множество $\{P_\xi(.) : \xi \in \Omega\}$ равностепенно непрерывно на Ω. Для каждого $\xi \in \Omega$, $\eta_1, \eta_2 \in \Omega$, то есть, $|P_\xi(\eta_1) - P_\xi(\eta_2)| = |p(\varrho(\xi, \eta_1)) - p(\varrho(\xi, \eta_2))| \leqq \leqq p_0|\varrho(\xi, \eta_1) - \varrho(\xi, \eta_2)| \leqq p_0\varrho(\eta_1, \eta_2)$. Следовательно, ввиду предполагаемых свойств ϱ существует $W_k \in \pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ так, что для $(\eta_1, \eta_2) \in W_k$ справедливо неравенство $|P_\xi(\eta_1) - P_\xi(\eta_2)| \leqq 1/k$, что представляет равностепенную непрерывность.

2) $P_\xi(\xi) = 1$

3) $P_\xi(\eta) = 0$ для $\eta \notin W_0(\xi)$

4) $0 \leqq P_\xi(\eta) \leqq 1$ для каждого $\xi, \eta \in \Omega$.

Если через $\chi_{W(\xi)}$ обозначим характеристическую функцию $W(\xi)$, то очевидно будет $0 \leqq P_\xi(\eta) \leqq \chi_{W(\xi)}$ и, следовательно, $\int_\Omega P_\xi(\eta)\, T_k^\times(\xi, \mathrm{d}\eta) = T_k^\times(\xi, W(\xi))$. Так как $\{P_\xi(.) : \xi \in \Omega\}$ образует равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное множество в $C(\Omega)$, принадлежит это множество π^0 и, следовательно, $T_k(P_\xi) \to P_\xi$ равномерно для $\xi \in \Omega$, то есть и $\int_\Omega P_\xi(\eta)\, T_k^\times(\xi, \mathrm{d}\eta) \to 1$ равномерно для $\xi \in \Omega$. Отсюда, значит, вытекает, что также $T_k^\times(\xi, W(\xi)) \to 1$ равномерно в $\xi \in \Omega$, что требовалось доказать.

B) Пусть теперь для каждого $W \in \pi : T_k^\times(\xi, W(\xi)) \to 1$ равномерно для $\xi \in \Omega$.

Выберем какое-нибудь фискированное $H \in \pi^0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно 4,1,7 существует число $c \geqq 0$ так, что для $\varphi \in H$ и $\xi \in \Omega$ имеет место неравество $|\varphi(\xi)| \leqq c$.

Если применим наше предположение, можем подобрать k_0 так, что для $k \geqq k_0$ будет $|T_k^\times(\xi, W(\xi)) - 1| \leqq \varepsilon/(6c + 1)$. Далее для $k \geqq k_0$ имеем $|T_k^\times(\xi, \Omega) - - 1| \leqq \varepsilon/(6c + 1)$, так как $|T_k^\times(\xi, \Omega) - 1| = 1 - T_k^\times(\xi, W(\xi)) = |T_k^\times(\xi, W(\xi)) - 1| \leqq \leqq \varepsilon/(6c + 1)$.

Теперь для $k \geqq k_0$ и $\varphi \in H$ получим:

$$\|T_k(\varphi) - \varphi\| = \sup_{\xi \in \Omega} \left| \int_\Omega \varphi(\eta) T_k^\times(\xi, \mathrm{d}\eta) - \varphi(\xi) \right| =$$

$$= \sup_{\xi \in \Omega} \left| \int_\Omega (\varphi(\eta) - \varphi(\xi))\, T_k^\times(\xi, \mathrm{d}\eta) + \varphi(\xi)\,(T_k^\times(\xi, \Omega) - 1) \right| \leqq$$

$$\leqq \sup_{\xi \in \Omega} \int_\Omega |\varphi(\eta) - \varphi(\xi)|\, T_k^\times(\xi, \mathrm{d}\eta) + \sup_{\xi \in \Omega} (|\varphi(\xi)|\, |T_k^\times(\xi, \Omega) - 1|) \leqq$$

$$\leqq \sup_{\xi\in\Omega}\left(\int_{W(\xi)}|\varphi(\eta)-\varphi(\xi)|\,T_k^\times(\xi,\mathrm{d}\eta)+\int_\Omega|\varphi(\eta)-\varphi(\xi)|\,T_k^\times(\xi,\mathrm{d}\eta)\right)+\frac{c\varepsilon}{6c+1}\leqq$$

$$\leqq\frac{\varepsilon}{2}+2c\sup_{\xi\in\Omega}T_k^\times(\xi,\Omega-W(\xi))+\frac{c\varepsilon}{6c+1}\leqq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2\,c\varepsilon}{6c+1}+\frac{c\varepsilon}{6c+1}\leqq\varepsilon\,.$$

Этим доказательство закончено.

4,2,5. Теорема. *Пусть $\mathcal{T}$ – полугруппа неотрицательных операторов в $C(\Omega)$ такая, что $\|\mathcal{T}(t)\|\leqq 1$ $(t\in R^+)$ и π – компактная равномерная структура на Ω. В таком случае $\mathcal{T}$ является π^0-регулярной тогда и только тогда, если для каждого $W\in\pi$ при $t\to 0_+$ выполнено: $\mathcal{T}(t)^\times(\xi,\,W(\xi))\to 1$ равномерно для всех $\xi\in\Omega$.*

Доказательство вытекает непосредственно из 4, 2, 4.

5. ПРИМЕР ОПЕРАТОРА ХИЛЛЕ-ИОСИДЫ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

5,1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ, ИМЕЮЩИЕ МЕСТО ВО ВСЕМ ОТДЕЛЕ 5

5,1,1. Определение. $\Omega=\langle 0,\infty)$. π есть равномерная структура на Ω, определенная посредством обыкновенной метрики. π^0 образно в таком случае множеством функций из $C(\Omega)$, которые равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в обычном смысле.

5,1,2. Определение. Пусть на $R^+=(0,\infty)$ задана функция a, обадающая следующими свойствами: 1) a непрерывна на R^+, 2) существуют постоянные $0<a_0\leqq a_1$ такие, что $a_0\leqq a(\xi)\leqq a_1$ для каждого $\xi\in R^+$.

5,1,3. Определение. В $C(\Omega)$ определим оператор A следующим образом: $\varphi\in\mathfrak{D}(A)$ тогда и толко тогда, если $\varphi\in C(\Omega)$, φ дифференцируема для каждово $\xi>0$ и если существует $\psi\in C(\Omega)$ так, что $a(\xi)\,\varphi'(\xi)=\psi(\xi)$ для $\xi>0$. Затем положим $A(\varphi)=\psi$.

5,1,4. Лемма. *Для каждого $\lambda>0$ и $\xi\in\Omega$*

$$\lambda\int_0^\infty\frac{1}{a(\xi+v)}\exp\left(-\int_\xi^{\xi+v}\frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}v=1$$

Доказательство. В результате простой подстановки получаем

$$\int_0^\infty\frac{1}{a(\xi+v)}\exp\left(-\int_\xi^{\xi+v}\frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}v=$$

$$=\exp\left(\int_0^\xi\frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\int_\xi^\infty\frac{1}{a(v)}\exp\left(-\int_0^v\frac{\lambda}{\mathrm{d}(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}v\,.$$

Теперь для $v \geqq 0$ положим $\psi(v) = \int_0^v a^{-1}(\eta)\,\mathrm{d}\eta$.Функция ψ является, очевидно, строго возрастающей, $\psi(0) = 0$. Следовательно, к ней существует обратная функция, которую обозначим через χ. Тогда $\chi'(w) = 1/\psi'(\chi(w)) = a(\chi(w))$. Затем можем писать

$$\lambda \exp\left(\int_0^\xi \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\int_\xi^\infty \frac{1}{a(v)} \exp\left(-\int_0^v \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}v =$$

$$= \lambda \exp\left(\lambda\,\psi(\xi)\right)\int_\xi^\infty \frac{1}{a(v)} \exp\left(-\lambda\,\psi(v)\right)\mathrm{d}v =$$

$$= \lambda \exp\left(\lambda\,\psi(\xi)\right)\int_{\psi(\xi)}^\infty \frac{\exp\left(-\lambda w\right)}{a(\chi(w))}\,a(\chi w))\,\mathrm{d}w =$$

$$= \lambda \exp\left(\lambda\,\psi(\xi)\right)\int_{\psi(\xi)}^\infty \exp\left(-\lambda w\right)\mathrm{d}w = 1\,.$$

5,1,5. Лемма. *Для каждого* $\delta > 0$:

$$\lambda \int_\delta^\infty \exp\left(-\int_\xi^{\xi+v} \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right) \to 0$$

равномерно в $\xi \in \Omega$ при $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Так как $1/a(\eta) \geqq 1/a_1$ и, следовательно,

$$\int_\xi^{\xi+v} \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta \geqq \frac{1}{a_1}\,v\,,$$

получаем

$$0 \leqq \lambda \int_\delta^\infty \exp\left(-\int_\xi^{\xi+v} \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}v \leqq \lambda \int_\delta^\infty \exp\left(-\frac{\lambda}{a_1}\,v\right)\mathrm{d}v =$$

$$= \lambda\,\frac{a_1}{\lambda} \exp\left(-\frac{\lambda}{a_1}\,\delta\right) = a_1 \exp\left(-\frac{\lambda}{a_1}\,\delta\right),$$

что очевидно стремится к нулю для $\lambda \to \infty$ независимо от $\xi \in \Omega$.

5,2. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА A

5,2,1. Теорема. *A является стандартным оператором в $C(\Omega)$, $\kappa(A) = 0$, $\|\mathscr{R}(A)(\lambda)\| \leqq 1/\lambda$ для $\lambda > 0$ и*

$$\mathscr{R}(A)(\lambda)(\varphi)(\xi) = \exp\left(\int_0^\xi \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\int_\xi^\infty \frac{1}{a(v)} \exp\left(-\int_0^v \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\varphi(v)\,\mathrm{d}v\,.$$

для $\lambda > 0$, $\varphi \in C(\Omega)$ и $\xi \in \Omega$.

Доказателство. Сначала определим для $\lambda > 0$, $\varphi \in C(\Omega)$, $\xi \in \Omega$:

$$R(\lambda, \varphi, \xi) = \exp\left(\int_0^\xi \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\int_\xi^\infty \frac{1}{a(v)} \exp\left(-\int_0^v \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\varphi(v)\,\mathrm{d}v\,.$$

Интеграл в правой части имеет, очевидно, смысл, потому что $0 \leqq 1/a_1 \leqq \leqq 1/a(\eta) \leqq 1/a_0$. Следовательно,

$$\int_0^v \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta \geqq \frac{v\lambda}{a_1}$$

и, значит,

$$\exp\left(-\int_0^v \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right) \leqq \exp\left(-\frac{\lambda v}{a_1}\right).$$

Далее, согласно 5,1,4 выполнено, в ресултате простой подстановки:

$$\left|R(\lambda, \varphi, \xi)\right| \leqq \sup_{v \geqq \xi}\left(\left|\varphi(v)\right|\right)\exp\left(\int_0^\xi \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\int_\xi^\infty \frac{1}{a(v)}\exp\left(-\int_0^v \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right) =$$

$$= \sup_{v \geqq \xi}\left(\left|\varphi(v)\right|\right)\int_0^\infty \frac{1}{a(\xi + v)}\exp\left(-\int_\xi^{\xi+v} \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}v \leqq \frac{1}{\lambda}\sup_{v \geqq \xi}\left(\left|\varphi(v)\right|\right).$$

Так как непрерывность $R(\lambda, \varphi, \xi)$ в ξ очевидна, вытекает отсюда непосредственно, что, во-первых, $R(\lambda, \varphi, .) \in C(\Omega)$ и что, во-вторых, $\left|R(\lambda, \varphi, \xi)\right| \leqq \|\varphi\|/\lambda$.

Теперь уже достаточно доказать, что $R(\lambda, \varphi, \xi)$ определяет обратный оператор к $\lambda j - A$.

Сначала докажем, что для каждого $\varphi \in C(\Omega)$: $R(\lambda, \varphi, .) \in \mathfrak{D}(A)$ и $(\lambda j - A)(R(\lambda, \varphi, .)) = \varphi$. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $R(\lambda, \varphi, \xi)$ была дифференцируемой для $\xi > 0$ и чтобы $a(\xi) R(\lambda, \varphi, \xi) = \lambda R(\lambda, \varphi, \xi) - \varphi(\xi)$. Дифференцируемость $R(\lambda, \varphi, \xi)$ для $\xi > 0$ очевидна. Обсуждаем далее:

$$a(\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}R(\lambda, \varphi, \xi) =$$

$$= a(\xi)\left[\frac{\lambda}{a(\xi)}\exp\left(\int_0^\xi \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\int_\xi^\infty \frac{1}{a(v)}\exp\left(-\int_0^v \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\varphi(v)\,\mathrm{d}v -\right.$$

$$\left.- \exp\left(\int_0^\xi \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\frac{1}{a(\xi)}\exp\left(-\int_0^\xi \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\varphi(\xi)\right] = \lambda R(\lambda, \varphi, \xi) - \varphi(\xi)\,.$$

В заключение достаточно показать только то, что $\lambda j - A$ является простым оператором, что легко вытекает из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Этим доказательство закончено.

5,2,2. Теорема. *А является π°-асимптотическим оператором Хилле-Иосиды в $C(\Omega)$.*

Доказательство. Потому что в 5,2,1 было доказано, что $\|\mathscr{R}(A)(\lambda)\| \leqq 1/\lambda$, то теперь уже достаточно доказать, что $\lambda\mathscr{R}(A)(\lambda)(\varphi) \to \varphi$ равномерно для $\varphi \in H$, где $H \in \pi^0$.

Выберем какое-нибудь фиксированное $H \in \pi^0$. Тогда можем выбрать постоянную c так, чтобы для $\varphi \in H$ и $\xi \in \Omega$ было $|\varphi(\xi)| \leqq c$. Пусть, далее, $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ так, что для $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$, $|\xi_1 - \xi_2| \leqq \delta$ и $\varphi \in H$ выполнено $|\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)| \leqq \varepsilon/2$.

Итак, пусть $\lambda > 0$, $\varphi \in H$, $\xi \in \Omega$. Тогда можем произвести оценку, следующего выражения:

$$|\lambda\mathscr{R}(A)(\lambda)(\varphi)(\xi) - \varphi(\xi)| =$$

$$= \left|\lambda \exp\left(\int_0^\xi \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\int_\xi^\infty \frac{1}{a(v)} \exp\left(-\int_0^v \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)(\varphi(v) - \varphi(\xi))\,\mathrm{d}v\right| =$$

$$= \left|\lambda\int_\xi^\infty \frac{1}{a(v)} \exp\left(-\int_\xi^v \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)(\varphi(v) - \varphi(\xi))\,\mathrm{d}v\right| =$$

$$= \left|\lambda\int_0^\infty \frac{1}{a(\xi + v)} \exp\left(-\int_\xi^{\xi+v} \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)(\varphi(\xi + v) - \varphi(\xi))\,\mathrm{d}v\right| \leqq$$

$$\leqq \lambda\int_0^\delta \frac{1}{a(\xi + v)} \exp\left(-\int_\xi^{\xi+v} \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}v \sup_{0 \leqq v \leqq \delta} |\varphi(\xi + v) - \varphi(\xi)| +$$

$$+ \lambda\int_\delta^\infty \frac{1}{a(\xi + v)} \exp\left(-\int_\xi^{\xi+v} \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right) \sup_{v \geqq \delta} |\varphi(\xi + v) - \varphi(\xi)| \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2c}{a_0}\lambda\int_\delta^\infty \exp\left(-\int_\xi^{\xi+v} \frac{\lambda}{a(\eta)}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}v\,.$$

Если согласно 5,1,5 выберем λ достаточно большим, то последний член будет также $\leqq \varepsilon/2$, чем доказательство завершено.

Литература

[1] *D. V. Widder:* The Laplace Transform, Princeton 1946.
[2] *E. Hille:* Functional Analysis and Semi-groups, New York 1948.
[3] *E. Hille, R. S. Phillips:* Functional Analysis and Semi-groups, Providence 1957.
[4] *P. R. Halmos:* Measure Theory, New York 1950.
[5] *N. Dunford, J. T. Schwartz:* Linear Operators, Part I: General Theory, New York 1958.
[6] *N. Bourbaki:* Topologie général, Chapitre I—II, Paris 1940.
[7] *N. Bourbaki:* Espaces vectoriels topologiques, Chapitre III—IV, Paris 1955.
[8] *E. Čech:* Topologické prostory, Praha 1959.

Адресс автора: Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).

Résumé

CONTINUITÉ DES SEMI-GROUPES DANS LES TOPOLOGIES D'OPÉRATEURS GÉNÉRALES

MIROSLAV SOVA, Praha

Dans cet article, on étudie les semi-groupes d'opérateurs qui sont continus dans une topologie sur un espace d'opérateurs linéaires, définie par la convergence uniforme sur un système de sous-ensembles donné. On complète le théorème de Hille-Yoshida dans ce sens qu'on trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur donné soit le générateur d'un semi-groupe continu dans une topologie d'opérateurs. Ensuite, on étudie les contre-domaines de tels semi-groupes ainis que quelques semi-groupes spéciaux dans l'espace de fonctions continues sur un espace localement compact.