Czechoslovak Mathematical Journal

Zdeněk Hustý

Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. II. Äquivalenz regulärer Gleichungen mit Dimension

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 16 (1966), No. 1, 1–13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100704`

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Математический институт Чехословацкой Академии наук

Т. *16* (*91*) ПРАГА 19. III. 1966 г., No 1

ÜBER DIE TRANSFORMATION UND ÄQUIVALENZ HOMOGENER LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VON HÖHERER ALS DER ZWEITEN ORDNUNG

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 24. Januar 1962, in umgearbeiteter Form am 3. Juli 1964.)

(*1. Fortsetzung*)

II. TEIL. ÄQUIVALENZ REGULÄRER GLEICHUNGEN MIT DIMENSION

VORBEMERKUNGEN

Es sei

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k(x)\, y^{(n-k)}(x) = 0\,, \quad x \in I_1 \tag{a}$$

resp.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i(t)\, z^{[n-i]}(t) = 0\,, \quad t \in I_2 \tag{b}$$

eine reguläre Gleichung mit Dimension im Intervall I_1 resp. I_2. Wenn $\emptyset \neq I_{1x} \subset I_1$, $\emptyset \neq I_{2t} \subset I_2$ ist, so bezeichnen wir mit den Symbolen $O_a(I_{1x})$, $P_a(I_{1x})$, $K_a(I_{1x})$ resp. $O_b(I_{2t})$, $P_b(I_{2t})$, $K_b(I_{2t})$ die Mengen der Bilder von (a) resp. (b), deren Koordinaten Elemente der Menge $M(I_{1x})$ resp. $M(I_{2t})$ sind und mit den Symbolen $o_a(I_{1x})$, $p_a(I_{1x})$ resp. $o_b(I_{2t})$, $p_b(I_{2t})$ die Mengen der Bilder von (a) resp. (b), deren Koordinaten Elemente der Menge $m(I_{1x})$ resp. $m(I_{2t})$ sind, s. Def. 3,1.1 und 3,2.7 aus Teil I – kurz [I; 3,1.1], [I; 3,2.7]. Wenn

$$\frac{a_1}{a_0} \in C_{n-1}(I_1) \tag{0.1}$$

resp.

$$\frac{b_1}{b_0} \in C_{n-1}(I_2) \tag{0.2}$$

gilt, so ist

$$(\mathrm{A})\ \left\{x,\ c\ .\ \exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1}{a_0}\,\mathrm{d}s\right)\right\}\in p_a(I_1)$$

resp.

$$(\mathrm{B})\ \left\{t,\ c\ .\ \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{b_1}{b_0}\,\mathrm{d}s\right)\right\}\in p_b(I_2)\,,\quad 0 \neq c\in E_1$$

das halbkanonische Hauptbild von (a) resp. (b); $\mathfrak{A}_i = A_i/A_0$ resp. $\mathfrak{B}_i = B_i/B_0$, $i = 2, 3, \ldots, n$ sind die Hauptkoeffizienten von (a) resp. (b), wobei A_i resp. B_i, $i = 0, 2, 3, \ldots, n$ die Koeffizienten von (A) resp. (B) darstellen und mittels der Formeln (3,2.8) aus Teil I – kurz [I; (3,2.8)] – definiert werden. Es sei ferner

(0.3) $$\frac{a_i}{a_0}\in C_{n-i}(I_1)\,,\quad i = 1, 2$$

resp.

(0.4) $$\frac{b_i}{b_0}\in C_{n-i}(I_2)\,,\quad i = 1, 2\,.$$

Dann bezeichnen wir mit dem Symbol $k_a(I_{1x})$ resp. $k_b(I_{2t})$ die Menge der kanonischen Bilder von (a) resp. (b), wobei ihre ersten Koordinaten die Gleichung

(0.5) $$\{T, x\} = \frac{3}{n+1}\,\mathfrak{A}_2(x)\,,\quad x\in I_{1x}$$

resp.

(0.6) $$\{X, t\} = \frac{3}{n+1}\,\mathfrak{B}_2(t)\,,\quad t\in I_{2t}$$

befriedigen.

Es seien ν_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, j$ natürliche Zahlen, die die Ungleichungen $2 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_j \leqq i \leqq n$ erfüllen. Es sei

(0.7) $$I_i[\mathfrak{A}_{\nu_1}(x), \mathfrak{A}_{\nu_2}(x), \ldots, \mathfrak{A}_{\nu_j}(x)]\quad\text{kurz}\quad I_i[\mathfrak{A}_\nu(x)]$$

ein Polynom der Elemente $\mathfrak{A}_{\nu_\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots, j$ mit Dimension i und es sei ferner $(\mathrm{a})\in M\subset o_a(I_{1x})$.

Definition 0.1. Gilt für die Hauptkoeffizienten $\bar{\mathfrak{A}}_{\nu_\mu}(x)$, $\mu = 1, 2, \ldots, j$ eines beliebigen Bildes $(\bar{\mathrm{a}})$ $\{T(x), u(x)\}\in M$ die Gleichung

$$I_i[\mathfrak{A}_\nu(x)] = I_i\{\bar{\mathfrak{A}}_\nu[T(x)]\}\,[T'(x)]^i\,,\quad x\in I_{1x}\,,$$

so nennen wir die Funktion (0.7) eine *Invariante* von (a) im Intervall I_{1x} auf der Menge M der Dimension und des Gewichtes i. Den Grad [die Ordnung] des Polynoms (0.7) bezeichnen wir a s Grad [Ordnung] der Invariante.

Definition 0.2. Die Invariante auf der Menge $o_a(I_{1x})$ nennen wir die *Hauptinvariante* der Gleichung (a) im Intervall I_{1x}. Die Hauptinvariante der Gleichung (a) im Intervall I_1 nennen wir kurz Hauptinvariante von (a).

Es sei (α) eine kanonische Gleichung von der Gestalt

$$(\alpha) \qquad \alpha_0 y^{(n)}(x) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \alpha_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0\,, \quad x \in I_1\,.$$

Definition 0.3. Die Invariante auf der Menge $k_\alpha(I_{1x})$ nennen wir die *kanonische Invariante* der Gleichung (α) im Intervall I_{1x}. Die kanonische Invariante der Gleichung (α) im Intervall I_1 nennen wir kurz kanonische Invariante von (α).

1. EIGENSCHAFTEN QUASIIDENTISCHER BILDMENGEN

Definition 1.1. Die Menge $O_b(I_{2t})$ ist *quasiidentisch* mit der Menge $O_a(I_{1x})$, wenn jedes Element von $O_b(I_{2t})$ in seinem ganzen Definitionsbereich mit einem Element von $O_a(I_{1x})$ quasiidentisch ist. Bezeichnung

$$(1.1) \qquad O_b(I_{2t}) \dot{\Rightarrow} O_a(I_{1x})\,.$$

Bündigkeitshalber führen wir nicht in den Bemerkungen 1.2 und 1.4 zweite Koordinaten der Bilder an.

Bemerkungen 1.2. a) Es gelte (1.1). Wenn das Bild $(\bar{b})$ $\{X(t)\} \in O_b(I_{2t})$ in seinem ganzen Definitionsbereich $X(I_{2t})$ mit dem Bild $(\bar{a})$ $\{T(x)\} \in O_a(I_{1x})$ quasiidentisch ist, so ist $X(I_{2t}) \subset T(I_{1x})$.

b) Wenn (1.1) gilt, so ist $P_b(I_{2t}) \dot{\Rightarrow} P_a(I_{1x})$, $K_b(I_{2t}) \dot{\Rightarrow} K_a(I_{1x})$.

Definition 1.3. Die Mengen $O_a(I_{1x})$, $O_b(I_{2t})$ sind quasiidentisch, wenn (1.1) und

$$(1.2) \qquad O_a(I_{1x}) \dot{\Rightarrow} O_b(I_{2t})$$

gilt. Bezeichnung

$$(1.3) \qquad O_a(I_{1x}) \doteq O_b(I_{2t})\,.$$

Bemerkungen 1.4. a) Es gelte (1.3). Wenn die Bilder $(\bar{a})$ $\{T(x)\} \in O_a(I_{1x})$, $(\bar{b})$ $\{X(t)\} \in$ $\in O_b(I_{2t})$ quasiidentisch sind, so ist $X(I_{2t}) = T(I_{1x})$.

b) Wenn (1.3) gilt, so ist $P_a(I_{1x}) \doteq P_b(I_{2t})$, $K_a(I_{1x}) \doteq K_b(I_{2t})$.

c) Die Beziehung (1.3) ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Satz 1.5. *Die Beziehung* (1.3) *gilt dann und nur dann, wenn ein Bild* $(\bar{b})$ $\{X(t), u_1(t)\} \in O_b(I_{2t})$ *in seinem ganzen Definitionsbereich* $X(I_{2t}) = I_{2\xi}$ *mit einem Bild*

$(\bar{a})\ \{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$ *in seinem ganzen Definitionsbereich* $T(I_{1x}) = I_{2\xi}$ *quasiidentisch ist.*

Beweis. Es seien die Bilder $(\bar{b})\ \{X(t), u_1(t)\} \in O_b(I_{2t})$, $(\bar{a})\ \{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$ in $I_{2\xi} = X(I_{2t}) = T(I_{1x})$ quasiidentisch. Wählen wir ein beliebiges Bild $(\bar{b}_1)\ \{Y(t), v(t)\} \in O_b(I_{2t})$ und es habe das Bild $(\bar{\bar{b}}) \in O_{\bar{b}}(I_{2\xi})$ die Koordinaten

$$\left\{Y[X_{-1}(\xi)], \frac{v[X_{-1}(\xi)]}{u_1[X_{-1}(\xi)]}\right\} \in M(I_{2\xi})\,. \tag{1.4}$$

Die Gleichungen $(\bar{\bar{b}})$, $(\bar{b}_1)$ sind nach den Hilfssätzen [I; 3,1.16] und [I; 3,1.17] im Intervall $I_{2\tau} = Y(I_{2t})$ quasiidentisch. Die Gleichung $(\bar{\bar{b}})$ ist gemäß [I; 3,1.17] quasiidentisch in $I_{2\tau}$ mit dem Bild $(\bar{a}_1) \in O_{\bar{a}}(I_{2\xi})$ mit den Koordinaten (1.4), so daß auch die Gleichungen $(\bar{a}_1)$, $(\bar{b}_1)$ in $I_{2\tau}$ quasiidentisch sind. Nach [I; 3,1.18] ist $(\bar{a}_1) \in O_a(I_{1x})$ mit den Koordinaten

$$\left\{Y(X_{-1}[T(x)]), \frac{u(x)\,.\,v(X_{-1}[T(x)])}{u_1(X_{-1}[T(x)])}\right\} \in M(I_{1x})\,, \tag{1.5}$$

so daß (1.1) gilt. Auf gleiche Art beweisen wir (1.2). Der Beweis der hinreichenden Bedingung ist einfach und darum laßen wir ihn fort.

Folgerung 1. $O_a(I_{1x}) \doteq O_b(I_{2t}) \Leftrightarrow P_a(I_{1x}) \doteq P_b(I_{2t}) \Leftrightarrow K_a(I_{1x}) \doteq K_b(I_{2t})$.

Folgerung 2. Es gelte (1.3). $(\bar{b})\ \{X(t), u_1(t)\} \in O_b(I_{2t}) \doteq (\bar{a})\ \{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\bar{b}_1)\ \{Y(t), v(t)\} \in O_b(I_{2t}) \doteq (\bar{a})\ \{Y(X_{-1}[T(x)]), u(x)\, v(X_{-1}[T(x)])/u_1(X_{-1}[T(x)])\} \in$ $\in O_a(I_{1x})$.

Hilfssatz 1.6. *Es gelte* (1.1). *Dann existiert ein derartiges nicht leeres Intervall* $\bar{I}_{1x} \subset I_{1x}$, *daß*

$$O_b(I_{2t}) \doteq O_a(\bar{I}_{1x}) \tag{1.6}$$

ist.

Beweis. Es gelte (1.1) und es sei das Bild $(\bar{b})\ \{X(t), u_1(t)\} \in O_b(I_{2t})$ in seinem ganzen Definitionsbereich $I_{2\xi} = X(I_{2t})$ quasiidentisch mit dem Bild $(\bar{a})\ \{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$, so daß $I_{2\xi} \subset T(I_{1x})$. Es sei ferner $T_{-1}(I_{2\xi}) = \bar{I}_{1x}$, wobei $\emptyset \neq \bar{I}_{1x} \subset I_{1x}$. Nach [I; 3,1.7c)] ist $(\bar{a})\ \{T(x), u(x)\} \in O_a(\bar{I}_{1x})$. Gemäß des Satzes 1.5 gilt (1.6).

Hilfssatz 1.7. *Es gelte* (0.1), (0.2), $(\bar{A})\ \{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$, $(\bar{B})\ \{X(t)\} \in p_b(I_{2t})$. *Wenn die Bilder* $(\bar{A}), (\bar{B})$ *im Intervall* $I_{1\xi} = T(I_{1x}) = X(I_{2t})$ *quasiidentisch sind, so befriedigt die Funktion*

$$t(x) = X_{-1}[T(x)] \in m(I_{1x}) \tag{1.7}$$

resp.

$$(1.8) \qquad x(t) = T_{-1}[X(t)] \in m(I_{2t})$$

die Gleichung

$$(1.9) \qquad \{t, x\} + \frac{3}{n+1} \mathfrak{B}_2(t)\, t'^2 = \frac{3}{n+1} \mathfrak{A}_2(x)\,, \quad x \in I_{1x}$$

resp.

$$(1.10) \qquad \{x, t\} + \frac{3}{n+1} \mathfrak{A}_2(x)\, \dot{x}^2 = \frac{3}{n+1} \mathfrak{B}_2(t)\,, \quad t \in I_{2t}\,.$$

Beweis. Sind die Bilder $(\bar{\mathrm{A}})$, $(\bar{\mathrm{B}})$ in $I_{1\xi}$ quasiidentisch, so sind die Normalformen von $(\bar{\mathrm{A}})$, $(\bar{\mathrm{B}})$ in $I_{1\xi}$ identisch. Gemäß [I; (3,2.12)], [I; (3,2.13)] gilt in $I_{1\xi}$

$$(1.11) \qquad \left\{[T'(x)]^{-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \mathfrak{A}_k(x)\, \Phi_{i-k}^{n,i}[\eta_T]\right\}_{x=T_{-1}(\xi)} =$$

$$= \left\{[\dot{X}(t)]^{-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \mathfrak{B}_k(t) \Phi_{i-k}^{n,i}[\eta_X]\right\}_{t=X_{-1}(\xi)}, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,,$$

wobei $\eta_T = T''(x)/T'(x)$, $\eta_X = \ddot{X}(t)/\dot{X}(t)$ zu nehmen ist. Wenn wir $i = 2$, $\xi = T(x)$ in (1.11) einsetzen, erhalten wir nach [I; (3,2.15)] und [I; 0.1b)] die Beziehung

$$(1.12) \qquad \{T, x\} - \frac{3}{n+1} \mathfrak{A}_2(x) =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}X_{-1}}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 \left(-\{X_{-1}, \xi\} \left[\frac{\mathrm{d}X_{-1}}{\mathrm{d}\xi}\right]^{-2} - \frac{3}{n+1} \mathfrak{B}_2[X_{-1}(T(x))]\right), \quad x \in I_{1x}\,.$$

Gemäß (1.7), [I; (0.2)] gelten die Formeln

$$(1.13) \qquad t'(x) = \frac{\mathrm{d}X_{-1}}{\mathrm{d}\xi} \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

$$(1.14) \qquad \{t, x\} = \{X_{-1}, \xi\} \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \{T, x\}\,.$$

Wenn wir (1.13), (1.14) in (1.12) einsetzen, erhalten wir (1.9). Den zweiten Teil der Behauptung des Hilfssatzes 1.7 beweisen wir auf gleiche Weise, wenn wir in (1.11) $i = 2$, $\xi = X(t)$ setzen.

Bemerkung 1.8. Es gelte (0.3), (0.4), $(\bar{\alpha})$ $\{T(x)\} \in k_a(I_{1x})$, $(\bar{\beta})$ $\{X(t)\} \in k_b(I_{2t})$. Wenn die Bilder $(\bar{\alpha})$, $(\bar{\beta})$ im Intervall $I_{1\xi} = T(I_{1x}) = X(I_{2t})$ quasiidentisch sind, so erfüllt die Funktion (1.7) resp. (1.8) die Gleichung (1.9) resp. (1.10) und gleichzeitig gilt (0.5) resp. (0.6).

Satz 1.9. *Es gelte* (0.1), (0.2), ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x})$, ($\bar{b}$) $\{X(t), u_1(t)\} \in o_b(I_{2t})$. *Wenn die Gleichungen* ($\bar{a}$), ($\bar{b}$) *im Intervall* $I_{1\xi} = T(I_{1x}) = X(I_{2t})$ *quasiidentisch sind, so gilt die Behauptung des Hilfssatzes* 1.7.

Beweis. Es sei ($\bar{A}$) $\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$, ($\bar{B}$) $\{X(t)\} \in p_b(I_{2t})$. Nach [I; 3,2.17] ist die Gleichung ($\bar{A}$) resp. ($\bar{B}$) die halbkanonische Hauptform von ($\bar{a}$) resp. ($\bar{b}$). Gemäß der Voraussetzung und der Folgerung des Satzes [I; 3,2.17] sind die Bilder ($\bar{A}$), ($\bar{B}$) quasiidentisch, so daß die Behauptung des Hilfssatzes 1.7 in Kraft ist.

2. ÄQUIVALENZ

Definition 2.1. Die Gleichung (b) ist im Intervall $\emptyset \neq I_{2t} \subset I_2$ *mit der Gleichung* (a) *äquivalent*, wenn ein derartiges nicht leeres Intervall $I_{1x} \subset I_1$ existiert, daß $O_b(I_{2t}) \dot{\Rightarrow} O_a(I_{1x})$ ist.

Definition 2.2. Die Koordinaten des Bildes ($\bar{a}$) $\in O_a(I_{1x})$, das im Intervall I_{2t} mit der Gleichung (b) quasiidentisch ist, werden wir als die *Träger* der Äquivalenz (b) mit (a) bezeichnen.

Bemerkung 2.3. Es sei (b) in I_{2t} äquivalent mit (a) und es seien die Funktionen $T(x)$, $u(x)$ die Träger der Äquivalenz (b) mit (a). Nach der Definition 2.2 ist die Gleichung (b) in I_{2t} quasiidentisch mit dem Bild ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$, wobei $I_{2t} \subset \subset T(I_{1x})$. Es sei $z(t)$ eine Lösung von (b). Laut [I; 3,1.15a)] ist die Funktion $y(x) = u(x)\, z[T(x)]$ im Intervall $T_{-1}(I_{2t})$ eine Lösung von (a). Wenn die Funktionen $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ein Hauptsystem von (b) bilden, so sind nach [I; 3,1.15g)] die Funktionen $y_i(x) = u(x) z_i[T(x)]$ im Intervall $T_{-1}(I_{2t})$ unabhängige Lösungen von (a).

Definition 2.4. Wenn derartige nicht leere Intervalle $I_{1x} \subset I_1, I_{2t} \subset I_2$ existieren, daß (b) in I_{2t} mit (a) und gleichzeitig (a) in I_{1x} mit (b) äquivalent ist, so sagen wir, daß die Gleichungen (a), (b) in den Intervallen I_{1x}, I_{2t} einander äquivalent sind.

Um auszudrücken, dass die Gleichungen (a), (b) in den Intervallen I_{1x}, I_{2t} einander äquivalent sind, schreiben wir

$$\{X(t), u_1(t)\}\,(a)\, I_{1x} \sim (b)\, I_{2t}\{T(x), u(x)\}\,, \tag{2.1}$$

wobei die Funktionen $\{X(t), u_1(t)\}$ $[\{T(x), u(x)\}]$ die Träger der Äquivalenz (a) [(b)] mit (b) [(a)] sind und $T(I_{1x}) = I_{2t}$, $X(I_{2t}) = I_{1x}$ gilt.

Bemerkungen 2.5. a) Die Gleichungen (a), (b) sind in den Intervallen I_{1x}, I_{2t} einander äquivalent dann und nur dann, wenn (1.3) gilt. Die Träger bestimmen wir nach der Definition 2.2.

b) Laut [I; 3,1.17] können wir z.B. $X(t) = T_{-1}(t)$, $u_1(t) = 1/u[T_{-1}(t)]$ setzen und daher führen wir statt (2.1) die einfachere Bezeichnung ein:

$$(2.2) \qquad (\mathrm{a})\, I_{1x} \sim (\mathrm{b})\, I_{2t}\{T(x), u(x)\}$$

oder

$$(2.3) \qquad (\mathrm{b})\, I_{2t} \sim (\mathrm{a})\, I_{1x} \left\{T_{-1}(t), \frac{1}{u[T_{-1}(t)]}\right\}.$$

Es ist noch zu bemerken, daß z.B. in (2.2) stets $I_{1x} \subset I_1, I_{2t} \subset I_2$, $\{T(x), u(x)\} \in M(I_{1x})$, $T(I_{1x}) = I_{2t}$, $(\mathrm{b}) \doteq (\bar{\mathrm{a}})\, \{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$, $x \in I_{1x}$, $t \in I_{2t}$ vorausgesetzt wird.

c) Da die Beziehungen (2.2), (2.3) symmetrisch sind, gelten alle Behauptungen, die für die Elemente der Menge $O_a(I_{1x})$ und für die Träger $\{T(x), u(x)\}$ in Kraft sind, mit einer gewißen Modifikation auch für die Elemente der Menge $O_b(I_{2t})$ und für die Träger $\{T_{-1}(t), 1/u[T_{-1}(t)]\}$.

d) $(\mathrm{a}) \doteq (\mathrm{b})$, $x \in I = I_1 \cap I_2 \Leftrightarrow (\mathrm{a})\, I \sim (\mathrm{b})\, I\{x, c\}$, $0 \neq c \in E_1$.

Hilfssatz 2.6. *Es sei* (b) *in* I_{2t} *äquivalent mit* (a) *und es seien die Funktionen* $T(x), u(x)$ *die Träger der Äquivalenz* (b) *mit* (a). *Dann gilt* (2.2), *wo* $I_{1x} = T_{-1}(I_{2t})$.

Der Hilfssatz wird mittels des Hilfssatzes 1.6 und der Bemerkung 2.5a) leicht erbracht.

Bemerkung 2.7. Nach dem Hilfssatz 2.6 sind *zwei Gleichungen einander äquivalent dann und nur dann, wenn eine Gleichung mit der zweiten äquivalent ist.* Daher werden wir uns nur mit solchen Gleichungen beschäftigen, die einander äquivalent sind und dann werden wir kurz sagen, daß diese Gleichungen *äquivalent* sind. Um auszudrücken, daß die Gleichungen (a), (b) äquivalent sind, benutzen wir häufig die Bezeichnung (2.2), s. Bem. 2.5b). Wenn uns die Träger oder auch die Intervalle nicht wichtig erscheinen werden, können wir (2.2) ohne Träger oder auch ohne Intervalle schreiben, also $(\mathrm{a})\, I_{1x} \sim (\mathrm{b})\, I_{2t}$ oder $(\mathrm{a}) \sim (\mathrm{b})$.

Hilfssatz 2.8. *Die Beziehung* (2.2) *ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.*

Beweis: Die Reflexivität und die Symmetrie ist klar. Es sei $(\mathrm{a})\, I_{1x} \sim$ $\sim (\mathrm{b})\, I_{2t}\{T(x), u(x)\}$, $(\mathrm{b})\, I_{2t} \sim (\mathrm{c})\, I_{3\xi}\{X(t), u_1(t)\}$. Nach der Definition 2.4 und 2.2 ist das Bild $(\bar{\mathrm{a}})\, \{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$ $[(\bar{\mathrm{b}})\, \{X(t), u_1(t)\} \in O_b(I_{2t})]$ quasiidentisch im Intervall $I_{2t} = T(I_{1x})$ $[I_{3\xi} = X(I_{2t})]$ mit der Gleichung (b) [(c)]. Gemäß des Hilfssatzes [I; 3,1.17] ist das Bild $(\bar{\mathrm{b}})\, \{X(t), u_1(t)\} \in O_b(I_{2t})$ und auch die Gleichung $(\mathrm{c}) \in O_c(I_{3\xi})$ quasiidentisch in $I_{3\xi}$ mit dem Bild $(\bar{\bar{\mathrm{a}}})\, \{X[T(x)], u(x)\, u_1[T(x)]\} \in$ $\in O_a(I_{1x})$, wobei $X[T(I_{1x})] = I_{3\xi}$. Gemäß des Satzes 1.5 gilt $O_a(I_{1x}) \doteq O_c(I_{3\xi})$. Nach der Bemerkung 2.5a) ist $(\mathrm{a})\, I_{1x} \sim (\mathrm{c})\, I_{3\xi}\{X[T(x)], u(x)\, u_1[T(x)]\}$.

Satz 2.9. *Die Beziehung* (2.2) *gilt dann und nur dann, wenn*

$$\frac{b_i[T(x)]}{b_0[T(x)]} = \frac{1}{[T'(x)]^i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{a_k(x)}{a_0(x)} \Phi^{n,i}_{i-k}[\eta(x), \zeta(x)] , \tag{2.4}$$

$$x \in I_{1x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

mit

$$\eta(x) = \frac{T''(x)}{T'(x)} \in C_{n-2}(I_{1x}) , \tag{2.5}$$

$$\zeta(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \in C_{n-1}(I_{1x}) \tag{2.6}$$

in Kraft ist.

Beweis. I. Gilt (2.2), so ist

$$T(I_{1x}) = I_{2t} \tag{2.7}$$

und die Gleichung (b) ist in I_{2t} quasiidentisch mit dem Bild ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$. Wenn wir die Normalformen von (a), (b) vergleichen, erhalten wir mit Rücksicht auf [I; (3,1.4)] die Beziehungen

$$\frac{b_i(t)}{b_0(t)} = \left\{\frac{1}{[T'(x)]^i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{a_k(x)}{a_0(x)} \Phi^{n,i}_{i-k}[\eta(x), \zeta(x)]\right\}_{x=T_{-1}(t)} \tag{2.8}$$

$$t \in I_{2t}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

wo (2.5), (2.6) zu nehmen ist. Wenn wir ferner in (2.8) $t = T(x)$ einsetzen, erhalten wir (2.4).

II. Laut (2.5), (2.6) und [I; 3,1.9]' existieren derartige Funktionen $T(x)$, $u(x)$, daß $\{T(x), u(x)\} \in M(I_{1x})$. Es erfüllen ferner die Koeffizienten der regulären Gleichungen mit Dimension (a), (b) die Beziehungen (2.4) und es gelte (2.7). Wenn wir in (2.4) $x = T_{-1}(t)$ einsetzen, erhalten wir (2.8). Die Gleichung (b) ist im Intervall (2.7) quasiidentisch mit dem Bild ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$, denn laut (2.8) haben die Gleichungen ($\bar{a}$), (b) in I_{2t} dieselbe Normalform. Gemäß des Satzes 1.5 und der Bemerkung 2.5a) gilt (2.2).

Bemerkung 2.10. Es gelte (0.1), (0.2), (2.2). Dann ist

$$T(x) = \mu(I_{1x}) , \tag{2.9}$$

s. [I; 3,2.7]. Wenn wir $i = 1$ in (2.4) einsetzen, erhalten wir mit Rücksicht auf [I; (2,3.4)] die Gleichung

$$(2.10)\qquad \frac{b_1[T(x)]}{b_0[T(x)]}\,T'(x) = \frac{n-1}{2}\,\eta(x) + \zeta(x) + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,, \quad x \in I_{1x}\,.$$

Daraus folgt $\eta \in C_{n-1}(I_{1x})$, so daß (2.9) laut (2.5) gilt.

Satz 2.11. *Es gelte* (2.2), (2.9). *Dann ist*

$$(2.11)\qquad \frac{b_j(t)}{b_0(t)} \in C_{n-j}(I_{2t})\,, \quad j = 1, 2, \ldots, i \Leftrightarrow \frac{a_j(x)}{a_0(x)} \in C_{n-j}(I_{1x})\,,$$
$$j = 1, 2, \ldots, i\,, \quad 1 \leqq i \leqq n\,.$$

Beweis. I. Es sei $a_j(x)/a_0(x) \in C_{n-j}(I_{1x})$, $j = 1, 2, \ldots, i \leqq n$. Laut (2.9), (2.5) ist $\eta \in C_{n-1}(I_{1x})$, so daß $\Phi^{n,j}_{j-k}(\eta, \zeta) \in C_{n-j+k}(I_{1x}) \subset C_{n-j}(I_{1x})$, $k = 0, 1, \ldots, j$. Nach (2.4) ist

$$(2.12)\qquad \frac{b_j[T(x)]}{b_0[T(x)]} = \frac{1}{[T'(x)]^j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{a_k(x)}{a_0(x)}\,\Phi^{n,j}_{j-k}[\eta(x), \zeta(x)] \in C_{n-j}(I_{1x})\,,$$
$$j = 1, 2, \ldots, i\,.$$

Wenn wir in (2.12) $x = T_{-1}(t)$ einsetzen, folgt daraus $b_j(t)/b_0(t) \in C_{n-j}(I_{2t})$, $j = 1, 2, \ldots, i$. II. Es sei umgekehrt $a_j(x)/a_0(x) \notin C_{n-j}(I_{1x})$ und es sei a_j der erste Koeffizient, der diese Eigenschaft besitzt, so daß $a_k/a_0 \in C_{n-k}(I_{1x})$, $k = 1, 2, \ldots, j-1$. Dann existiert ein natürliches $v \leqq j$ derart, daß $b_v/b_0 \notin C_{n-v}(I_{2t})$. Denn im entgegengesetzten Falle ist $b_v[T(x)]/b_0[T(x)] \in C_{n-v}(I_{1x})$ für ale $v = 1, 2, \ldots, j$ und laut (2.12) kommen wir zum Widerspruch

$$\frac{a_j(x)}{a_0(x)} = [T'(x)]^j\,\frac{b_j[T(x)]}{b_0[T(x)]} - \sum_{k=0}^{j-1}\binom{j}{k}\frac{a_k(x)}{a_0(x)}\,\Phi^{n,j}_{j-k}[\eta(x), \zeta(x)] \in C_{n-j}(I_{1x})\,.$$

Folgerung. Es gelte (2.2), (2.9). *Die Gleichung* (a) *ist eine reguläre Gleichung mit stetiger Dimension in* I_{1x} *dann und nur dann, wenn* (b) *eine reguläre Gleichung mit stetiger Dimension in* I_{2t} *ist.*

Bemerkungen 2.12. a) Es gelte (2.2). Dann ist

$$(2.13)\qquad \frac{b_j(t)}{b_0(t)} \in C_0(I_{2t})\,, \quad j = 1, 2, \ldots, i \Leftrightarrow \frac{a_j(x)}{a_0(x)} \in C_0(I_{1x})\,,$$
$$j = 1, 2, \ldots, i\,, \quad 1 \leqq i \leqq n\,.$$

Diese Behauptung beweist sich auf dieselbe Art wie der Satz 2.11.

b) Es gelte (2.2). *Die Gleichung* (a) *ist in* I_{1x} *regulär dann und nur dann, wenn die Gleichung* (b) *in* I_{2t} *regulär ist.* Diese Behauptung folgt unmittelbar aus (2.13).

Satz 2.13. *Es gelte* (0.3), (0.4). *Die Beziehung* (2.2) *gilt dann und nur dann, wenn*

$$(2.14)\qquad \mathfrak{B}_i[T(x)] = \frac{1}{[T'(x)]^i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\mathfrak{A}_i(x)\,\Phi^{n;i}_{i-k}[\eta(x)]\,,\quad i = 3, 4, \ldots, n\,,\quad x \in I_{1x}\,,$$

$$(2.15)\qquad u(x) = c[T'(x)]^{(1-n)/2}\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{b_1[T(s)]}{b_0[T(s)]}\,T'(s) - \frac{a_1(s)}{a_0(s)}\,\mathrm{d}s\right\},$$
$$0 \neq c \in E_1\,,\quad x \in I_{1x}$$

mit $\mathfrak{A}_0 = 1$, $\mathfrak{A}_1 = 0$, $\eta = T''/T' \in C_{n-1}\,(I_{1x})$ *in Kraft ist, wobei die Funktion* $t = T(x)$ *die Gleichung* (1.9) *erfüllt.*

Beweis. Gilt (2.2), (0.3), (0.4), so gilt (2.7), (2.9) und die Gleichungen (ā) $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$, (b) $\{t, 1\} \in O_b(I_{2t})$ sind quasiidentisch. Aus dem Satz 2.9 folgt (2.4). Wenn wir in (2.4) $i = 1$ einsetzen, erhalten wir bei Beachtung von [I; (3,1.7), (3,1.8)], (2.5), (2.6) die Beziehung (2.15). Gemäß der Bemerkung 2.5a) gilt (1.3), so daß nach dem Satz 1.5 (Folg. 2) die Bilder (B) $\{t\} \in p_b(I_{2t})$, $(\bar{\text{A}})\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ quasiidentisch sind. Wenn wir die Normalformen von $(\bar{\text{A}})$, (B) vergleichen, erhalten wir mit Rücksicht auf [I; (3,2.12), (3,2.13)] die Beziehungen

$$(2.16)\qquad \mathfrak{B}_i(t) = \frac{1}{[T'(x)]^i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\mathfrak{A}_k(x)\Phi^{n;i}_{i-k}[\eta(x)]\,,$$
$$x = T_{-1}(t)\,,\quad t \in I_{2t}\,,\quad i = 2, 3, \ldots, n$$

mit $\eta = T''/T'$, $\mathfrak{A}_0 = 1$, $\mathfrak{A}_1 = 0$. Wenn wir in (2.16) $i = 2$, $t = T(x)$ setzen, erhalten wir mit Rücksicht auf [I; (2,3.6)] die Gleichung (1.9). Durch die Transformation $t = T(x)$ gehen die Gleichungen (2.16) für $i = 3, 4, \ldots, n$ in (2.14) über. II. Es gelte (2.14) mit $\eta = T''/T'$, $\mathfrak{A}_0 = 1$, $\mathfrak{A}_1 = 0$, wobei $T(x)$ in I_{1x} eine Lösung von (1.9) ist. Es gelte ferner (2.7). Laut (0.3), (0.4), (1.9) ist $T(x) \in \mu(I_{1x})$. Wenn wir in (1.9), (2.14) $x = T_{-1}(t)$ setzen, erhalten wir (2.16). Die Gleichung (B) $\{t\} \in p_b(I_{2t})$ ist im Intervall (2.7) quasiidentisch mit dem Bild $(\bar{\text{A}})$ $\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$, denn nach (2.16) haben beide Gleichungen in I_{2t} dieselbe Normalform. Gemäß des Satzes 1.5 gilt (1.3). Nach der Formel (1.5), wo wir $Y(t) = X(t) = t$, $u_1(t) = \exp\{-\int_{t_0}^{t}[b_1(s)/b_0(s)]\,\mathrm{d}s\}$, $u(x) = c|T'(x)|^{(1-n)/2}\exp\{-\int_{x_0}^{x}[a_1(s)/a_0(s)]\,\mathrm{d}s\}$, $v(t) = 1$, $0 \neq c \in E_1$ setzen, ist die Gleichung (b) im Intervall (2.7) quasiidentisch mit mit dem Bild (ā) $\in O_a(I_{1x})$, das die Koordinaten $T(x)$, (2.15) hat, so daß (2.2) in Kraft ist.

Bemerkung 2.14. Den Satz 2.13 können wir folgendermaßen formulieren: *Es gelte* (0.3), (0.4). *Die Gleichungen* (a), (b) *sind in den Intervallen* I_{1x}, I_{2t} *äquivalent dann und nur dann, wenn eine derartige Lösung von* (1.9) *existiert, daß* (2.14), (2.7) *gilt.*

Gemäß der Bemerkung 2.14 schließen wir, daß die Äquivalenz der Gleichungen (a), (b), die die Eigenschaften (0.3), (0.4) besitzen, durch die Funktion $T(x)$ bestimmt ist. Daher führen wir die folgende Definition ein.

Definition 2.15. Es gelte (0.3), (0.4) und es seien die Gleichungen (a), (b) in den Intervallen I_{1x}, I_{2t} äquivalent. Die erste Koordinate $T(x)$ des Bildes $(\bar{a}) \in o_a(I_{1x})$, das im Intervall (2.7) mit der Gleichung (b) quasiidentisch ist, nennen wir den Träger der Äquivalenz (b) mit (a) – kurz den *Äquivalenzträger* und für die Äquivalenz führen wir die einfachere Bezeichnung

$$(a)\, I_{1x} \sim (b)\, I_{2t}\{T(x)\} \tag{2.17}$$

ein.

Bemerkungen 2.16. a) Es ist zu bemerken, daß in (2.17) stets vorausgesetzt wird: (0.3), (0.4), $I_{1x} \subset I_1, I_{2t} \subset I_2$, $T(x) \in \mu(I_{1x})$, $T(I_{1x}) = I_{2t}$, $(b) \doteq (\bar{a})\ \{T(x), u(x)\} \in$ $\in o_a(I_{1x})$, wo (2.15) zu nehmen ist. Die Funktion (2.15) bezeichnen wir oft als den Hilfsträger der Äquivalenz (b) mit (a) – kurz den Hilfsträger der Äquivalenz.

b) Es gelte (0.3) (0.4). Aus der Bemerkung 2.16a) folgt, daß (2.17) genau dann gilt, wenn (2.2) mit (2.15) in Kraft ist.

c) Wenn wir in (2.4) $i = 1$ einsetzen, erhalten wir nach Umformung die Beziehung

$$\zeta = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{n-1}{2}\eta + \frac{b_1[T(x)]}{b_0[1(x)]}\, T'(x)\,. \tag{2.18}$$

d) Auf ähnliche Weise wie im Satz [I; 3,2.15] kann man zeigen, daß sich die Gleichungen (2.4) für $i = 2, 3, \ldots, n$ mit Hilfe der Substitution (2.18) in (1.9), (2.14) überführen lassen.

e) Laut (2.18), (2.5), (2.6) schließen wir, daß die Funktion (2.15) eine Lösung der Gleichung

$$y' + \left\{\frac{n-1}{2}\frac{T''(x)}{T'(x)} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} - \frac{b_1[T(x)]\, T'(x)}{b_0[T(x)]}\right\} y = 0\,, \quad x \in I_{1x} \tag{2.19}$$

ist.

f) Die Gleichung (1.9) [(2.19)] nennen wir die Gleichung des Trägers [die Gleichung des Hilfsträgers] der Äquivalenz.

g) Es sei $(\bar{a})\ \{T(x)\} \in o_a(I_{1x})$, $(\bar{b})\ \{X(t)\} \in o_b(I_{2t})$. Wenn die Bilder $(\bar{a})$, $(\bar{b})$ quasiidentisch sind, so ist $(a)\, I_{1x} \sim (b)\, I_{2t}\{X_{-1}[T(x)]\}$.

h) Es gelte (2.17). *Das Bild* $(\bar{b})\ \{X(t), u_1(t)\} \in o_b(I_{2t})$ *ist im Intervall* $X(I_{2t})$ *quasiidentisch mit dem Bild* $(\bar{a})\ \{X[T(x)], U(x)\} \in o_a(I_{1x})$, *dessen zweite Koordinate*

$U(x)$ eine beliebige Lösung der Gleichung

$$(2.20)\qquad y' + \left\{\frac{a_1}{a_0} + \frac{n-1}{2}\frac{X''}{X'} - \frac{X'}{\dot{X}}\left[\frac{b_1}{b_0} + \frac{n-1}{2}\frac{\ddot{X}}{\dot{X}} + \frac{\dot{u}_1}{u_1}\right]\right\} y = 0\,, \quad x \in I_{1x}$$

ist, wo wir $t = T(x)$ setzen.

Beweis. Es sei $(\bar{\bar{a}})\ \{X(t), u_1(t)\} \in o_{\bar{\bar{a}}}(I_{2t})$, wo $(\bar{a})\ \{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x})$, (2.15) gilt. Gemäß des Hilfssatzes [I; 3,1.17] sind die Bilder $(\bar{\bar{a}})$, $(\bar{b})$ quasiidentisch. Jedoch $(\bar{\bar{a}})\ \{X[T(x)], U(x)\} \in o_a(I_{1x})$, $U(x) = u(x)\,u_1[T(x)]$, wobei $u(x)$ der der Gleichung (2.19) entsprechende Hilfsträger ist. Wenn wir in (2.19) $u(x) = U(x)/u_1[T(x)]$, $T'(x) = X'/\dot{X}$, $T''(x) = (X'' - \ddot{X}T'^2)/\dot{X}$, einsetzen, erkennen wir leicht, daß $U(x)$ eine Lösung von (2.20) ist.

Satz 2.17. *Es gelte (0.3), $b_i \equiv 0$, $i = 1, 2$ in I_{2t}. Die Beziehung (2.17) gilt dann und nur dann, wenn die Gleichungen*

$$(2.21)$$

$$\mathfrak{B}_i[T(x)] = \frac{1}{[T'(x)]^i} \sum_{\nu=0}^{i} \eta^\nu(x) \sum_{\mu=\nu}^{i} \left[\binom{i}{\mu}\Big/\binom{n-i+\mu}{\mu}\right] . \mathfrak{A}_{i-\mu}(x) . F^{n,i,i-\mu}_{\mu-\nu}[\mathfrak{A}_2(x)]\,,$$

$$x \in I_{1x}\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,,$$

mit $\eta = T''/T'$, $\mathfrak{A}_0 = 1$, $\mathfrak{A}_1 = 0$ erfüllt sind, wobei $T(x)$ in I_{1x} eine Lösung von (0.5) ist.

Den Satz 2.17 beweisen wir auf dieselbe Art wie den Satz 2.9, wenn wir statt [I; (3,1.4)] die Formeln [I; (3,3.8), (3,3.9)] benützen.

Satz 2.18. *Es sei $a_i \equiv 0$ in I_{1x}, $b_i \equiv 0$ in I_{2t}, $i = 1, 2$. Die Beziehung (2.17) gilt dann nur dann, wenn die Gleichungen*

$$(2.22)\qquad \mathfrak{B}_i[T(x)] = \frac{1}{[T'(x)]^i} \sum_{\nu=0}^{i-3} \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu \binom{i}{\nu}\binom{i-1}{\nu} \nu!\, \mathfrak{A}_{i-\nu}(x)\, \eta^\nu(x)\,,$$

$$x \in I_{1x}\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,,$$

mit $\eta = T''/T'$, $\mathfrak{A}_0 = 1$, $\mathfrak{A}_1 = 0$ erfüllt sind, wobei $T(x)$ in I_{1x} eine Lösung der Gleichung $\{T, x\} = 0$ ist.

Den Satz 2.18 beweisen wir auf dieselbe Art wie den Satz 2.17, nur verwenden wir statt [I; (3,3.9)] die Formeln [I; (3,3.11)].

Für die äquivalenten kanonischen Gleichungen (a), (b) ergeben sich aus dem Satz 2.18 die folgenden Folgerungen:

Folgerung 1. $b_j \equiv 0$ *in* I_{2t}, $j = 3, 4, \ldots, i \Leftrightarrow a_j \equiv 0$ *in* I_{1x}, $j = 3, 4, \ldots, i$, $i = 3, 4, \ldots, n$.

Folgerung 2.

$$(2.23) \qquad b_j \equiv 0\,, \quad j = 3, 4, \ldots, i-1\,, \quad b_i \not\equiv 0 \quad in \quad I_{2t} \Leftrightarrow a_j \equiv 0\,,$$
$$j = 3, 4, \ldots, i-1\,, \quad a_i \not\equiv 0 \quad in \quad I_{1x}\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,.$$

Folgerung 3. *Wenn* (2.23) *gilt, so ist*

$$(2.24) \qquad \mathfrak{B}_i[T(x)]\,[T'(x)]^i = \mathfrak{A}_i(x) \quad in \quad I_{1x}\,.$$

Bemerkung 2.19. Es gelte (2.23). Gemäß der Definition 0.3 ist die Funktion $\mathfrak{A}_i(x)$ die kanonische Invariante der kanonischen Gleichung (a) im Intervall I_{1x}.

Hilfssatz 2.20. *Es gelte* (0.3), (0.4), $(\bar{\text{a}})\,\{Y(x)\} \in o_a(I_{1x})$, $(\bar{\text{b}})\,\{X(t)\} \in o_b(I_{2t})$, $I_{1\xi} = Y(I_{1x})$, $I_{2\tau} = X(I_{2t})$. *Dann ist* $(\text{a})\,I_{1x} \sim (b)\,I_{2t}\{T(x)\} \Leftrightarrow (\bar{\text{a}})\,I_{1\xi} \sim$ $\sim (\bar{\text{b}})\,I_{2\tau}\{X(T[Y_{-1}(\xi)])\}$.

Beweis. Es gelte (2.17). Nach [I; 3,1.18] und der Bemerkung 2.5a) genügt es zu zeigen, daß die Funktion

$$(2.25) \qquad X(T[Y_{-1}(\xi)])$$

der Träger der Äquivalenz der Gleichung $(\bar{\text{b}})$ mit der Gleichung $(\bar{\text{a}})$ ist. Gemäß der Bemerkung 2.16h) ist das Bild $(\bar{\text{b}})\,\{X(t)\} \in o_b(I_{2t})$ in $I_{2\tau}$ quasiidentisch mit dem Bild $(\bar{\bar{\text{a}}})\,\{X[T(x)]\} \in o_a(I_{1x})$. Jedoch $(\bar{\bar{\text{a}}})\,\{X(T[Y_{-1}(\xi)])\} \in o_a(I_{1\xi})$. Die umgekehrte Behauptung wird auf ähnliche Weise bewiesen.

Folgerung 1. $(\text{a})\,I_{1x} \sim (\text{b})\,I_{2t}\{T(x)\} \Leftrightarrow (\text{A})\,I_{1x} \sim (\text{B})\,I_{2t}\{T(x)\}$. Der Hilfsträger der Äquivalenz (B) mit (A) wird durch die Formel [I; (3,2.18)] bestimmt.

Folgerung 2. Es sei $(\bar{\beta})\,\{X(t)\} \in k_b(I_{2t})$. Dann ist $(\text{a})\,I_{1x} \sim (\text{b})\,I_{2t}\{T(x)\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\text{a})\,I_{1x} \sim (\bar{\beta})\,I_{2\tau}\{X[T(x)]\}$, wobei die Funktion $X[T(x)]$ eine Lösung von (0.5) ist.

Folgerung 3. Es sei $(\bar{\alpha})\,\{Y(x)\} \in k_a(I_{1x})$. Dann ist $(\text{a})\,I_{1x} \sim (\text{b})\,I_{2t}\{T(x)\} \Leftrightarrow (\bar{\alpha})\,I_{1\xi} \sim$ $\sim (\bar{\beta})\,I_{2\tau}\{X(T[Y_{-1}(\xi)])\}$, wobei die Funktion (2.25) eine Lösung der Gleichung $\{X, \xi\} = 0$ ist.

Folgerung 4. $(\text{a})\,I_{1x} \sim (\text{b})\,I_{1x}\{x\} \Leftrightarrow (\bar{\text{a}})\,I_{1\xi} \sim (\bar{\text{b}})\,I_{2\tau}\{X[Y_{-1}(\xi)]\}$. Wenn wir $(\text{a}) \equiv$ $\equiv (\text{b})$, $(\bar{\text{b}}) \equiv (\bar{\bar{\text{a}}})\,\{X(x)\} \in o_a(I_{1x})$, setzen, so ist $(\bar{\text{a}})\,I_{1\xi} \sim (\bar{\bar{\text{a}}})\,I_{2\tau}\{X[Y_{-1}(\xi)]\}$. Wenn wir noch $(\bar{\text{a}}) = (\text{a})$ setzen, so ist $(\text{a})\,I_{1x} \sim (\bar{\bar{\text{a}}})\,I_{2\tau}\{X(x)\}$.

Bemerkung 2.21. Es sei die Gleichung (a_n) $[(\text{b}_n)]$ die Normalform von (a) [(b)]. Dann ist

$$(\text{a})\,I_{1x} \sim (\text{b})\,I_{2t}\{T(x)\} \Leftrightarrow (a_n)\,I_{1x} \sim (\text{b}_n)\,I_{2t}\{T(x)\}\,.$$

(Fortsetzung)