Czechoslovak Mathematical Journal

Grozó Stanilov

Биаксиальная теория конгруэнции прямых

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 1, 64–73

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100654

Чехословацкий математический журнал, т. 15 (90) 1965 Прага

БИАКСИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ

ГРОЗЬО СТАНИЛОВ, София

(Поступило в редакцию 1/XI 1963 г.)

В этой работе методом внешних форм Картана исследуются конгруэнции прямых в биаксиальном пространстве. Луч конгруэнции определяется двумя специальными, так называемыми, параболическими точками луча.

Пусть в трехмерном проективном пространстве P_3 заданны две различные скрешивающиеся прямые j, k, которые будем называть абсолютными. Коллинеации в P_3, которые оставляют эти две прямые неподвижными, образуют семичленную параметрическую группу — это фундаментальная группа биаксиального пространства B_3. В этой работе методом внешних форм Картана исследуем дифференциально-геометрические конгруэнции прямых. В отличие от общей проективной теории конгруэнции прямых, где в качестве определяющих точек луча служат фокусы луча, мы обнаружим две новые параболические точки в бихсиальном пространстве, которые полностью определяют этот луч и позволяют одновременное исследование параболических и непараболических конгруэнций. Используя специальное биаксиальное семейство реперов, очень быстро строим канонический репер и находим единственный инвариант b первого порядка. Даем геометрические толкования всех инвариантных величин и, наконец, устанавливаем связь между полуканоническим репером конгруэнции и каноническим репером линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции.

1. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ

В этой работе мы вводим одно специальное семейство реперов $(A_1A_2A_3A_4; E)$: $A_1 \in j$, $A_3 \in k$; единичная точка E находится на прямой, соединяющей точки $A_2 + A_3, A_1 + A_4$, где $A_2 + A_3 = (A_2A_3) \times j$, $A_1 + A_4 = (A_1A_4) \times k$. Абсолютные прямые относительно такой координатной системы имеют следующие уравнения

$$j: \quad x_2 = x_3, \; x_4 = 0 \; ;$$
$$k: \quad x_1 = x_4, \; x_2 = 0 \; .$$

Произвольная коллинеация, которая сохраняет эти две прямые, имеет следующее представление:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad \varrho x_1' &= (a_4 - a_7)\, x_1 + a_5 x_2 - a_2 x_3 + a_7 x_4\,,\\
\varrho x_2' &= -\, a_1 x_1 + a_3 x_2 + a_1 x_4\,,\\
\varrho x_3' &= -\, a_1 x_1 + a_6 x_2 + (a_3 - a_6)\, x_3 + a_8 x_4\,,\\
\varrho x_4' &= \quad a_2 x_2 - a_2 x_3 + a_4 x_4\,,
\end{aligned}
$$

где a_i — параметры. Отсюда как в [1] находим следующие формулы для инфинитезимальных преобразованных координат вершин репера выбранного семейства

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad \mathrm{d}A_1 &= (\Theta_4 - \Theta_7)\, A_1 - \Theta_1 A_2 - \Theta_1 A_3\,,\\
\mathrm{d}A_2 &= \quad \Theta_5 A_1 + \Theta_3 A_2 + \Theta_6 A_3 + \Theta_2 A_4\,,\\
\mathrm{d}A_3 &= -\, \Theta_2 A_1 + (\Theta_3 - \Theta_6)\, A_3 - \Theta_2 A_4\,,\\
\mathrm{d}A_4 &= \quad \Theta_7 A_1 + \Theta_1 A_2 + \Theta_8 A_3 + \Theta_4 A_4\,.
\end{aligned}
$$

Выбранное семейство реперов обладает свойством инвариантности в биаксиальном смысле. Можно непосредственно проверить, что каждых два репера нашего семейства связанны коллинеацией вида (1) и наоборот. Если репер нашего семейства преобразуем по формулам (1), получим репер того же семейства. Эти реперы очень удобны для целей линейчатой геометрии, так как точки A_2, A_4 могут быть вполне свободными.

Внешнее дифференцирование равенств (2) приводит к следующим уравнениям структуры биаксиального пространства B_3:

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad \mathrm{D}\Theta_1 &= [\Theta_1, \Theta_3 - \Theta_4 + \Theta_7]\,, \quad \mathrm{D}\Theta_2 = [\Theta_2, \Theta_4 - \Theta_3 + \Theta_6]\,,\\
\mathrm{D}\Theta_3 &= [\Theta_1, \Theta_5 - \Theta_2]\,, \qquad\quad \mathrm{D}\Theta_4 = [\Theta_2, \Theta_8 - \Theta_1]\,,\\
\mathrm{D}\Theta_5 &= [\Theta_2, \Theta_6 + \Theta_7] + [\Theta_5, \Theta_4 - \Theta_3 - \Theta_7]\,,\\
\mathrm{D}\Theta_6 &= \mathrm{D}\Theta_7 = [\Theta_1, \Theta_5] + [\Theta_2, \Theta_8]\,,\\
\mathrm{D}\Theta_8 &= [\Theta_1, \Theta_6 + \Theta_7] + [\Theta_8, \Theta_3 - \Theta_4 - \Theta_6]\,.
\end{aligned}
$$

Если произведем нормирование

$$(4) \qquad (A_1 A_2 A_3 A_4) = 1\,,$$

то путем внешнего дифференцирования получим

$$(5) \qquad 2(\Theta_3 + \Theta_4) = \Theta_6 + \Theta_7\,.$$

2. КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР КОНГРУЭНЦИИ

Присоединяя точки A_2, A_4 к лучу (u, v) данной конгруэнции, можно выделить главные формы Θ_5, Θ_6, Θ_7, Θ_8 конгруэнции. При подвижном луче между ними существуют два линейных соотношения, которые напишем в виде

$$\Theta_6 = a\Theta_5 + b\Theta_8, \quad \Theta_7 = b'\Theta_5 + c\Theta_8. \tag{6}$$

Внешним дифференцированием получим

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}a + (a + b')(a\Theta_2 + b\Theta_1) + a(\Theta_3 - \Theta_4 + \Theta_7) - \Theta_1 = x_1\Theta_5 + x_2\Theta_8, \\
&\mathrm{d}b + (b + c)(a\Theta_2 + b\Theta_1) + b(\Theta_4 - \Theta_3 + \Theta_6) - \Theta_2 = x_2\Theta_5 + x_3\Theta_8, \\
&\mathrm{d}b' + (a + b')(b'\Theta_2 + c\Theta_1) + b'(\Theta_3 - \Theta_4 + \Theta_7) - \Theta_1 = x'_1\Theta_5 + x'_2\Theta_8, \\
&\mathrm{d}c + (b + c)(b'\Theta_2 + c\Theta_1) + c(\Theta_4 - \Theta_3 + \Theta_6) - \Theta_2 = x'_2\Theta_5 + x'_3\Theta_8.
\end{aligned} \tag{7}$$

При вариации только по вторичным параметрам имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&\delta a + (a + b')(aM_2 + bM_1) + a(M_3 - M_4) - M_1 = 0, \\
&\delta b + (b + c)(aM_2 + bM_1) + b(M_4 - M_3) - M_2 = 0, \\
&\delta b' + (a + b')(b'M_2 + cM_1) + b'(M_3 - M_4) - M_1 = 0, \\
&\delta c + (b + c)(b'M_2 + cM_1) + c(M_4 - M_3) - M_2 = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Пользуясь уравнениями структуры (3), можно легко подсчитать изменения главных форм

$$\begin{aligned}
&\delta\Theta_5 = (\Theta_6 + \Theta_7)M_2 + \Theta_5(M_3 - M_4), \\
&\delta\Theta_6 = \delta\Theta_7 = \Theta_5 M_1 + \Theta_8 M_2, \\
&\delta\Theta_8 = (\Theta_6 + \Theta_7)M_1 + \Theta_8(M_4 - M_3).
\end{aligned} \tag{9}$$

Теперь можно непосредственно проверить, что следующие две квадратические формы

$$r = \Theta_6\Theta_7 - \Theta_5\Theta_8, \tag{10}$$

$$p = (\Theta_6 + \Theta_7)^2 - 4\Theta_5\Theta_8 \tag{11}$$

инвариантны, так как $\delta r = 0$, $\delta p = 0$. Кроме того, следующая линейная форма

$$q = \Theta_6 - \Theta_7 \tag{12}$$

является тоже инвариантной. Нулевым многобразием этой формы является специальная линейчатая поверхность конгруэнции, которую мы называем абсолютной.

Если $M = A_2 + tA_4$ – произвольная точка луча конгруэнции, то $\mathrm{d}M$ принадлежит этому лучу, если

$$\Theta_5 + t\Theta_7 = 0\,, \quad \Theta_6 + t\Theta_8 = 0\,.$$

Эти равенства определяют развертывающиеся поверхности конгруэнции. Исключая t, получим $r = \Theta_6\Theta_7 - \Theta_5\Theta_8 = 0$. Итак, нулевыми многообразиями формы r являются развертывающиеся поверхности конгруэнции.

Чтобы дать геометрическое толкование равенства $p = 0$, сначала рассмотрим линейчатые поверхности в B_3. Пусть $P = A_2 + \sigma A_4$ принадлежит лучу (A_2A_4) произвольной линейчатой поверхности в биаксиальном пространстве. Касательная плоскасть этой поверхности в точке $P(\sigma)$ определяется тангенциальными координатами

$$\eta = (A_2, A_4, \mathrm{d}P) = \left(A_2, A_4, A_1 + \frac{\Theta_6 + \sigma\Theta_8}{\Theta_5 + \sigma\Theta_7} A_3\right).$$

Она пересекает абсолютные прямые j, k соответственно в точках

$$J = A_1 + \frac{\Theta_6 + \sigma\Theta_8}{\Theta_5 + \sigma\Theta_7} (A_2 + A_3)\,,$$

$$K = A_3 + \frac{\Theta_5 + \sigma\Theta_7}{\Theta_6 + \sigma\Theta_8} (A_1 + A_4)\,.$$

Прямая (JK) пересекает луч (A_2A_4) в точке $P' = A_2 + \sigma A_4$, так что

$$\sigma' = -\frac{\Theta_5 + \sigma\Theta_7}{\Theta_6 + \sigma\Theta_8}\,.$$

Таким образом соответствие $P \to P'$ будет проективностью с двойными элементами, которые определяются уравнением

$$\Theta_8\sigma^2 + (\Theta_6 + \Theta_7)\,\sigma + \Theta_5 = 0\,. \tag{13}$$

Можно высказать следующее предложение. На каждом луче произвольной линейчатой поверхности в биаксиальном пространстве B_3 определены в общем случае 2 или 1 замечательные точки, которые называются узловыми точками луча [2]. Поверхность с одной узловой точкой называется параболической. Для них выполнено $p = (\Theta_6 + \Theta_7)^2 - 4\Theta_5\Theta_8 = 0$. Итак, нулевыми многообразиями формы p являются параболические поверхности конгруэнции. Они, если учесть (6), определяются уравнением

$$(a + b')^2\,\Theta_5^2 + [2(a + b')(b + c) - 4]\,\Theta_5\Theta_8 + (b + c)^2\,\Theta_8^2 = 0\,.$$

Мы рассмотрим конгруэнции, в которых эти две параболические поверхности не совпадают. Мы относим конгруэнцию к этим двум параболическим поверхностям. Это дает $b + c = 0$ и $a + b' = 0$. Тогда эти параболические поверхности определеяются соответственно уравнениями $\Theta_5 = 0$ и $\Theta_8 = 0$. Их узловые точки будут A_2 и A_4 — параболические точки луча конгруэнции. Таким же образом 4 вершины репера закрепленны: A_2 и A_4 параболические точки луча, $A_3 = k \times (A_2, j)$, $A_1 = j \times (A_4, k)$. Теперь $M_1 = M_2 = 0$ и из (8) получим $\delta(ab) = 0$, что показывает, что ab — инвариант первого порядка луча конгруэнции.

Можно дать геометрическое толкование этого инварианта. Фокусы F_1, F_2 луча (A_2A_4) определяются уравнением

$$at^2 - t - b = 0\,.$$

Если $\Delta = (A_2, A_4, F_1, F_2)$, можно показать, что

$$ab = -\frac{\Delta}{(\Delta + 1)^2}\,. \tag{14}$$

Вернемся к уравнениям (7). Вводя подходящие обозначения, получим следующие формулы построенного полуканонического репера:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a + a(\Theta_3 - \Theta_4 + \Theta_4) - \Theta_1 &= x_1\Theta_5 + x_2\Theta_8\,, \\ \mathrm{d}b + b(\Theta_4 - \Theta_3 + \Theta_6) - \Theta_2 &= x_2\Theta_5 + x_3\Theta_8\,, \\ \Theta_1 &= \alpha\Theta_5 + \beta\Theta_8\,, \\ \Theta_2 &= \beta\Theta_5 + \gamma\Theta_8\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Для дальнейшей канонизации репера можно в общем случае положить $a = 1$. Нормирование (4) приводит к каноническому реперу конгруэнции. Основные формулы дифференциальной биаксиальной геометрии можно написать в следующем виде

$$\begin{gathered} \Theta_1 = \alpha\Theta_5 + \beta\Theta_8\,, \quad \Theta_2 = \beta\Theta_5 + \gamma\Theta_8\,, \quad \Theta_3 = m\Theta_5 + n\Theta_8\,, \\ \Theta_4 = -\,m\Theta_5 - n\Theta_8\,, \quad \Theta_6 = -\,\Theta_7 = \Theta_5 + b\Theta_8\,, \\ \left(m = \tfrac{1}{2}(x_1 + \alpha + 1)\,, \quad n = \tfrac{1}{2}(x_2 + \beta + b)\right). \end{gathered} \tag{16}$$

Кроме того, имеет место дифференциальная связь

$$\mathrm{d}b + b(\Theta_4 - \Theta_3 + \Theta_6) - \Theta_2 = x_2\Theta_5 + x_3\Theta_8\,. \tag{17}$$

Окрестность первого порядка луча конгруэнции определяется только одним инвариантом b; окрестность второго порядка определяется 6 инвариантами $b, \alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$ (или m, n). Между ними кроме (17) существуют и другие соотношения — те, которые вытекают из (3).

После канонизации репера абсолютная линейчатая поверхность конгруэнции определяется уравнением

$$\Theta_5 = - b\Theta_8 , \tag{18}$$

а развертывающиеся поверхности — уравнением

$$\Theta_5^2 + (2b + 1)\,\Theta_5\Theta_8 + b^2\Theta_8^2 = 0 . \tag{19}$$

3. СОПРЯЖЕННЫЕ ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КОНГРУЭНЦИИ

Произвольная линейчатая поверхность, принадлежащая данной конгруэнции и проходящяя через рассматриваемый луч, дается уравнением

$$\Theta_5 = f\Theta_8 , \tag{20}$$

где $f = f(u, v)$ — произвольная функция. Узловые точки этой поверхности определяются уравнением

$$\sigma^2 + f = 0 . \tag{21}$$

Теперь можно высказать следующее предложение:

В семействе (20) существует точно одна линейчатая поверхность такая, что ее узловые точки и фокусы образуют гармоническую группу. Эту поверхность мы называем гармонической поверхностью конгруэнции. Она определяется уравнением

$$\Theta_5 = b\Theta_8 . \tag{22}$$

Вводим следующее определение: Две линейчатые поверхности f_1, f_2 из (20) называем сопряженными, если их узловые точки образуют гармоническую группу. Из этого определения сразу находим, что имеет место соотношение

$$f_2 = - f_1 . \tag{23}$$

Это соотношение является инволюцией с двойными элементами, которые будут параболическими поверхностями конгруэнции. Эта инволюция имеет биаксиальной смысл.

Две поверхности пересекаются гармонически [3], когда

$$f_2 = \frac{- (2b + 1) f_1 - 2b^2}{2f_1 + (2b + 1)} . \tag{24}$$

Это соотношение является тоже инволюцией с двойными элементами, которые будут развертывающимися поверхностями конгруэнции.

В семействе (20) имеют место 2 инволюции (23) и (24). Они имеют общую пару и определяются соответственно уравнениями

$$\Theta_5 = -b\Theta_8, \quad \Theta_5 = b\Theta_8.$$

Первая из них — это абсолютная линейчатая поверхность, а вторая — гармоническая поверхность конгруэнции. Таким образом мы дали геометрическое толкование абсолютной поверхности.

Через каждый луч конгруэнции проходит ряд замечательных поверхностей:

а) две параболические,
б) две развертывающиеся,
в) одна абсолютная,
г) одна гармоническая.

На луче конгруэнции существует 8 замечательных точек:

а) две параболические,
б) два фокуса,
в) две узловые точки абсолютной поверхности,
г) две узловые точки гармонической поверхности.

Можно выделить следующие важные классы конгруэнции в B_3:

1) $b = 0$ или $b = \infty$. Теперь абсолютная, гармоническая и одна из развертывающехся поверхностей совпадают.

2) $b = -\frac{1}{4}$. Теперь имеем параболические конгруэнции, и гармоническая поверхность совпадает со сдвоенным семейством развертывающихся поверхностей.

Имеет место следующая геометрическая характеристика параболических точек:

Узловые точки и параболические точки произвольной линейчатой поверхности (20) образуют гармоническую группу.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЛКОВАНИЯ ИНВАРИАНТОВ

Для инварианта b уже дано геометрическое толкование (14), где надо положить $a = 1$. Теперь используем другие инвариантные точки.

Рассмотрим касательную плоскость к параболической поверхности $\Theta_5 = 0$ в точке A_4. Ее тангенциальные координаты будут

$$\eta_4 = (A_2, A_4, -bA_1 + A_3).$$

Она пересекает абсолютные прямые j, k соответственно в точках

$$J_1 = -bA_1 + (A_2 + A_3),$$
$$K_1 = b(A_1 + A_4) - A_3.$$

Бесконечная прямая, проходящая через $\mathrm{d}A_4$, при $\Theta_8 = 0$ пересекает j, k в

$$J_2 = (1 - m) A_1 - \alpha(A_2 + A_3),$$
$$K_2 = - m(A_1 + A_4) - \alpha A_3 .$$

Тогда

$$(25) \qquad \delta_1 = (A_1, A_2 + A_3, J_1, J_2) = \frac{1}{b\alpha}(1 - m),$$

$$(26) \qquad \delta_2 = (A_1 + A_4, A_3, K_1, K_2) = - \frac{m}{b\alpha}.$$

Бесконечная прямая проходящая через $\mathrm{d}A_2$, при $\Theta_8 = 0$ пересекает j в

$$J_3 = (\beta - 1) A_1 - m(A_2 + A_3)$$

и

$$(27) \qquad \delta_3 = (A_1, A_2 + A_3, J_1, J_3) = \frac{1}{bm}(\beta - 1).$$

Бесконечная прямая, проходящая через $\mathrm{d}A_2$, при $\Theta_5 = 0$ пересекает j в

$$J_4 = \gamma A_1 - n(A_2 + A_3)$$

и

$$(28) \qquad \delta_4 = (A_1, A_2 + A_3, J_1, J_4) = \frac{\gamma}{bn}.$$

Бесконечная прямая, проходящая через $\mathrm{d}A_4$, при $\Theta_5 = 0$ дает

$$J_5 = (b - n) A_1 - \beta(A_2 + A_3)$$

и

$$(29) \qquad \delta_5 = (A_1, A_2 + A_3, J_1, J_5) = \frac{1}{b\beta}(b - n).$$

Равенства (14), (25), (26), (27), (28), и (29) дают геометрические толкования всех инвариантов $b, \alpha, \beta, \gamma, m, n$ (x_1, x_2) при помощи двойных отношений.

5. РЕПЕР ЛИНЕЙЧАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ ДАННОЙ КОНГРУЭНЦИИ

Сначала строим канонический репер произвольной непараболической линейчатой поверхности в биаксиальном пространстве. Теперь имеем

$$(30) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}B_1 &= (\psi_4 - \psi_7) B_1 - \psi_1 B_2 - \psi_1 B_3 , \\ \mathrm{d}B_2 &= \psi_5 B_1 + \psi_3 B_2 + \psi_6 B_3 + \psi_2 B_4 , \\ \mathrm{d}B_3 &= - \psi_2 B_1 + (\psi_3 - \psi_6) B_3 - \psi_2 B_4 , \\ \mathrm{d}B_4 &= \psi_7 B_1 + \psi_1 B_2 + \psi_8 B_3 + \psi_4 B_4 . \end{aligned}$$

Выбирая в качестве B_2, B_4 узловые точки луча линейчатой поверхности, сразу реализируем полуканонический репер [2]. Имеем

$$\psi_5 = \psi_8 = 0\,, \quad \psi_6 = K\psi_7\,, \quad K \neq -1\,, \tag{31}$$

где K – единственный инвариант первого порядка. Подходящим нормированием получим

$$\psi_1 = \psi_7\,, \quad \psi_2 = L\psi_7\,, \tag{32}$$

где L – тоже инвариант. Нормирование $(B_1 B_2 B_3 B_4) = 1$ приводит к каноническому реперу. Имеем еще

$$\psi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{K+1}{2} + N\right)\psi_7\,, \quad \psi_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{K+1}{2} - N\right)\psi_7\,. \tag{33}$$

Узловые точки произвольной поверхности (f) из (20) будут

$$B_2 = A_2 + \sigma_1 A_4 \qquad B_4 = A_2 + \sigma_2 A_4\,,$$

где $\sigma_{1,2} = \pm\sqrt{(-f)}$. Ее полуканонический репер определяется точками

$$\begin{aligned} B_1 &= \sigma_2 A_1 - (A_2 + A_3)\,, \quad & B_2 &= A_2 + \sigma_1 A_4\,, \\ B_3 &= A_3 - \sigma_1(A_1 + A_4)\,, \quad & B_4 &= A_2 + \sigma_2 A_4\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Теперь сравнивая полуканонические реперы поверхности (f) и конгруэнции получим следующие формулы перехода:

$$\begin{aligned} d\sigma_1 + \sigma_1\Theta_4 + \Theta_2 &= \sigma_1(\psi_3 - \psi_6) + \sigma_2\psi_2\,, \\ d\sigma_2 + \sigma_2\Theta_4 + \Theta_2 &= \sigma_1\psi_1 + \sigma_2\psi_4\,, \\ \sigma_1\Theta_8 + \Theta_6 &= \psi_6\,, \\ \sigma_2\Theta_8 + \Theta_6 &= -\psi_7\,, \\ \sigma_1\Theta_1 + \Theta_3 &= \psi_2 + \psi_3\,, \\ \sigma_2\Theta_1 + \Theta_3 &= \psi_1 + \psi_4 - \psi_7\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Из этих формул легко можно найти все величины $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_6, \psi_7, K, L, N$ линейчатой поверхности f при помощи величин Θ_i, a, b конгруэнции.

Литература

[1] *С. П. Фиников:* Метод внешних форм Картана. Москва-Ленинград, 1948.

[2] *Б. Петканчин:* Хиперболични роеве прави в двуосната геометрия. Год. на Соф. унив., *48*, I, 1, 1953—54.

[3] *С. П. Фиников:* Теория пар конгруэнций. Москва, 1956.

Zusammenfassung

KONGRUENZEN IN DER BIAXIALEN GEOMETRIE

GROZA STANILOV, Sophia

Die biaxiale Geometrie B_3 wird durch zwei windschiefe Geraden j und k gegeben. Wir werden nur solche Koordinatensysteme $(A_1A_2A_3A_4; E)$ benutzen, bei denen $A_1 \in j$, $A_3 \in k$ und der Punkt E liegt auf der Gerade $(A_2 + A_3, A_1 + A_4)$, wo $A_2 + A_3 = (A_2A_3) \times j$, $A_1 + A_4 = (A_1A_4) \times k$. Die Infinitesimaltransformationen der Grundpunkte eines Koordinatensystems aus dieser Gesamtheit sind mit (2) angegeben. Die Pfaffschen Θ_i-Formen genügen die Strukturgleichungen (3) des biaxialen Raumes.

Wenn die Punkte A_2 und A_4 auf der Gerade (u, v) liegen, dann sind die quadratischen Formen $r = \Theta_6\Theta_7 - \Theta_5\Theta_8$, $p = (\Theta_6 + \Theta_7)^2 - 4\Theta_5\Theta_8$ invariant. Die lineare Form $q = \Theta_6 - \Theta_7$ ist auch invariant. Die Gleichung $r = 0$ bestimmt die Torsen der Kongruenzen und $p = 0$ – die parabolischen Regelscharen. Die Gleichung $q = 0$ bestimmt das absolute Regelschar der Kongruenzen. Wir wählen die parabolischen Regelscharen als koordinate Regelscharen. Ihre Knotenpunkte A_2 und A_4 sind die parabolischen Punkte der Gerade (u, v).

Weiter finden wir noch das sogenannte harmonische Regelschar der Kongruenzen. Er wird durch die Gleichung $(K_1K_2F_1F_2) = -1$ bestimmt, wo K_1, K_2 die Knotenpunkte dem harmonischen Regelschar und F_1, F_2 die Brennpunkte der Geraden (u, v) sind. Das absolute und harmonische Regelschar bilden das einzige gemeinsame Paar der zwei Involutionen (23) und (24).

Alle Differentialinvarianten b, α, β, p, x_1, x_2 lassen geometrische Deutungen zu.

In p. 5 untersuchen wir ein Zusammenhang zwischen den Formen der Kongruenzen und den Formen des Regelschars (f), das zu den Kongruenzen gehört.