Hans-Jürgen Hoehnke

Über antiautomorphe und involutorische primitive Halbgruppen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 1, 50–63

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100653

Чехословацкий математический журнал т. 15 (90) 1965, Прага

ÜBER ANTIAUTOMORPHE UND INVOLUTORISCHE PRIMITIVE HALBGRUPPEN

HANS-JÜRGEN HOEHNKE, Berlin

(Eingegangen am 24. Oktober 1963)

0. Für primitive Halbgruppen S mit irreduziblen, von einem Idempotent erzeugten Rechtsidealen wurde kürzlich ein Struktursatz aufgestellt, [9] (Theorem 15.7), in welchem Paare (M, M') von dualen Vektorsystemen über einer Gruppe oder Gruppe mit Null Δ eine Rolle spielen. In dieser Note wird mit Hilfe von selbstdualen Vektorsystemen M und schwach hermiteschen Skalarprodukten $g(x, y)$ in M (in Analogie zu [10] S. 80–83) der oben erwähnte Struktursatz für solche Halbgruppen verschärft, die einen Antiautomorphismus gestatten (Satz 1.14). Der Fall eines hermiteschen Skalarprodukts $g(x, y)$ wird näher untersucht. Wählt man für die Matrix von $g(x, y)$ die Einheitsmatrix (δ_{ik}), so ergibt sich auf diese Weise insbesondere ein Struktursatz über die Halbgruppe $G_I(.)$ aller eineindeutigen Teiltransformationen einer Menge I sowie über das Kranzprodukt $G_I(.)\,({}^{-}\Delta)$ (Folgerung 4.10), der als Verallgemeinerung eines Satzes von A. H. CLIFFORD [1] (Theorem 8.1, S. 341) über die Struktur der BRANDTschen Halbgruppe angesehen werden kann. Ferner wird ein Zusammenhang mit gewissen Pseudogruppen aufgedeckt.

1. Es sei Δ eine Gruppe oder Gruppe mit Null und $\alpha \to \bar{\alpha}$ ein Antiautomorphismus von Δ (d.h. $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}$). [1]) Ein Vektorsystem M über Δ [9] (Section 10) wird bez. der Komposition $x\bar{\alpha} = \alpha x$ $(x \in M,\ \alpha \in \Delta)$ zu einem Rechtsvektorsystem über Δ. Man kann daher gemäß [9] (Section 15) eine Bilinearform $g(x, y)$ definieren, die sich auf M als Vektorsystem und M als Rechtsvektorsystem bezieht: $g(x, y)$ ist eine Abbildung von $M \times M$ in Δ, so daß für alle $x, y \in M$ und $\alpha \in \Delta$

$$(1.1) \qquad g(\alpha x, y) = \alpha g(x, y) \quad \text{und} \quad g(x, \alpha y) = g(x, y)\,\bar{\alpha}\,.$$

$g(x, y)$ heißt ein *Skalarprodukt* in M. Wenn g nichtentartet ist, so heißt M *selbstdual*

[1]) Offenbar besitzt Δ stets einen involutorischen Antiautomorphismus (d.h. einen solchen mit der Periode 2), nämlich $\alpha \to \alpha^{-1} (\alpha \neq 0)$, $0 \to 0$ (falls $0 \in \Delta$). Daher hat jeder Antiautomorphismus von Δ die Form $\alpha \to \alpha^{-\sigma} (= (\alpha^{-1})^{\sigma})$, wo σ ein Automorphismus von Δ ist.

bez. g. Zufolge [9], (10.6), kann ein beliebiges Vektorsystem M über Δ identifiziert werden mit der Gesamtheit der Symbole $(\xi)_i$, $\xi \in \Delta$, $i \in I$ (I eine Indexmenge), wobei

$$(1.2) \qquad (\xi)_i = (\eta)_k \Leftrightarrow \xi = \eta,\ i = k, \quad \text{oder} \quad \xi = \eta = 0 \ (\text{falls } 0 \in \Delta)$$

und

$$(1.3) \qquad \alpha(\xi)_i = (\alpha\xi)_i \quad \text{für} \quad \alpha \in \Delta\,.$$

Indem man $g((1)_i, (1)_k) = \gamma_{ik}$ setzt, wo 1 das Einselement von Δ bezeichnet, erhält man aus (1.1)

$$(1.4) \qquad g((\xi)_i, (\eta)_k) = \xi\gamma_{ik}\bar{\eta}\,.$$

Dann und nur dann ist g nichtentartet, wenn die $I \times I$ Matrix (γ_{ik}) folgenden zwei Bedingungen genügt:

(1.5) In jeder Zeile und in jeder Spalte existiert wenigstens ein von Null verschiedenes Element von Δ.

(1.6) Weder zwei verschiedene Zeilen noch zwei verschiedene Spalten haben ein nichtverschwindendes gemeinsames Vielfaches bez. Δ.

Ein Skalarprodukt g heißt *schwach hermitesch*, wenn eine Abbildung $\mathfrak{q}$ von M auf sich existiert, so daß

$$(1.7) \qquad g(x, y) = \overline{g(y, x\mathfrak{q})} \quad \text{für alle} \quad x, y \in M\,.$$

Nun sei g nichtentartet. Dann ist $\mathfrak{q}$ durch (1.7) eindeutig bestimmt und erweist sich als eine eineindeutige halblineare Transformation [9] (Section 17) von M auf M mit dem zugehörigen Automorphismus τ^2, wobei τ die Inverse von $\alpha \to \bar{\alpha}$ bezeichnet. Setzt man

$$(1.8) \qquad (1)_i\,\mathfrak{q} = (\varepsilon_i)_{iq}\,, \quad i \in I\,,$$

so ist $\varepsilon_i \neq 0$ (falls $0 \in \Delta$), und $i \to iq$ ist eine Permutation von I. Aus (1.4), (1.8) folgt, daß (1.7) gleichbedeutend ist mit

$$(1.9) \qquad \gamma_{ik} = \bar{\bar{\varepsilon}}_i\bar{\gamma}_{k,iq} \quad \text{für alle} \quad i, k \in I\,.$$

Aus (1.7) ergibt sich die Beziehung

$$(1.10) \qquad \overline{\overline{g(x\mathfrak{q}, y)}} = g(x, y\mathfrak{q}^{-1})\,,$$

wonach $\mathfrak{q}$ die Adjungierte $\mathfrak{q}^{-1}$ bez. g (Definition in [9], Section 17) besitzt. Umgekehrt ist $\mathfrak{q}$ die Adjungierte von $\mathfrak{q}^{-1}$.

$\mathfrak{L}(M)$ sei die Halbgruppe aller Endomorphismen des Vektorsystems M über Δ. Ferner sei $\mathfrak{L}_M(M)$ die in [9] (Section 15) mit $M' = M$ eingeführte Halbgruppe.

$\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}_M(M)$ bedeutet, daß eine Adjungierte $\mathfrak{a}'$ existiert, so daß

$$g(x\mathfrak{a}, y) = g(x, y\mathfrak{a}') \,. \tag{1.11}$$

Im Hinblick auf (1.7) erhält man hieraus

$$g(y\mathfrak{a}', x) = g(y, x\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{q}) \,, \tag{1.12}$$

d.h., $\mathfrak{a}'$ besitzt die Adjungierte $\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{q}$ und gehört zu $\mathfrak{L}_M(M)$. Die Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{q}$ ist ein Automorphismus von $\mathfrak{L}_M(M)$. Nach (1.12) ist somit jedes Element von $\mathfrak{L}_M(M)$ die Adjungierte eines geeigneten Elements von $\mathfrak{L}_M(M)$. Unter Beachtung von [9] (Lemma 15.5) folgt, daß $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ ein Antiautomorphismus von $\mathfrak{L}_M(M)$ ist. Offenbar wird die Halbgruppe $\mathfrak{F}_M(M)$ (Definition in [9], Section 15, mit $M' = M$) hierbei auf sich abgebildet nach folgendem

1.13. Lemma. *Der Sockel einer [0-] primitiven Halbgruppe S mit [0-] minimalen Rechtsidealen ist identisch mit dem Durchschnitt aller Ideale $\neq \{0\}$ (falls $0 \in S$) von S.*

Beweis. Zufolge [9] (Lemma 13.2a) ist jedes 0-minimale Rechtsideal von S irreduzibel. Daher ist der Sockel von S identisch mit der Vereinigung $\mathfrak{T} = \bigcup R$ aller 0-minimalen Rechtsideale R von S. Sei $Z \neq \{0\}$ (falls $0 \in S$) ein Ideal von S. Da $RZ \subseteq R \cap Z$, ist $R \cap Z \neq \emptyset$. Wäre $RZ = \{0\}$ (falls $0 \in S$), so wäre S sicher nicht schwach nullteilerfrei, was der [0-] Primitivität von S widerspricht (vgl. [9]). Da $\{0\} \neq R \cap Z \subseteq R$, muß sein $R \cap Z = R$, $R \subseteq Z$ und $\mathfrak{T} \subseteq Z$.

Mit den bisherigen Überlegungen ist Teil a) des folgenden Satzes bewiesen.

1.14. Satz. a) *Es sei M ein Vektorsystem, welches selbstdual bez. eines nichtentarteten schwach hermiteschen Skalarprodukts g ist. Dann ist die adjungierte Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ bez. g ein Antiautomorphismus von $\mathfrak{L}_M(M)$ und die induzierte Abbildung ein Antiautomorphismus von $\mathfrak{F}_M(M)$.*

b) *Umgekehrt sei S eine beliebige primitive Halbgruppe mit irreduziblen Rechtsidealen, die von einem Idempotent erzeugt sind, und mit einem Antiautomorphismus v: $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^v$. Dann existiert ein Vektorsystem M, welches selbstdual bez. eines nichtentarteten schwach hermiteschen Skalarprodukts g ist, so daß S identifiziert werden kann mit einer $\mathfrak{F}_M(M)$ umfassenden Teilhalbgruppe von $\mathfrak{L}_M(M)$ und daß v identifiziert werden kann mit derjenigen Abbildung, die von der adjungierten Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ in S induziert wird.*

Beweis von 1.14. b) Da S primitiv ist und einen Antiautomorphismus v besitzt, so ist S auch links primitiv. Zufolge [9] (Theorem 15.9) dürfen wir $\mathfrak{F}_{M'}(M) \subseteq S \subseteq \mathfrak{L}_{M'}(M)$ annehmen, wobei (M, M') ein nichtentartetes duales Paar von Vektorsystemen über Δ ist, und wobei überdies der Zentralisator des S-Systems M mit Δ übereinstimmt. Die Adjungierte $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}_{M'}(M)$ in M' ist durch $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt. Wie im Beweis von [9] (Theorem 15.9) gezeigt wurde, ist $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ ein Antiisomorphismus von $\mathfrak{L}_{M'}(M)$ auf $\mathfrak{L}_M(M')$, welcher einen Antiisomorphismus von S auf $S' = \{s' \mid s \in S\}$ induziert, wo $\mathfrak{F}_M(M') \subseteq S' \subseteq \mathfrak{L}_M(M')$. Dabei ist (M', M) ein duales Paar über Δ'; Δ' ist antiisomorph zu Δ bez. einer geeigneten Abbildung $\delta \to \delta'$. Die Abbildung $\mathfrak{a}' \to \mathfrak{a}^v$ ist ein Isomorphismus von S' auf S. Mit (M, M') ist auch (M', M) nichtentartet, so daß zufolge [9] (Theorem 17.9) der Zentralisator des S'-Systems M' mit Δ' übereinstimmt. Auf Grund des Isomorphiesatzes [9] (Theorem 17.3) existiert eine eineindeutige halblineare Transformation (s, σ) von M' (als Linksvektorsystem) auf M, so daß

$$\mathfrak{a}^v = s^{-1}\mathfrak{a}'s \tag{1.15}$$

für alle $\mathfrak{a} \in S$. Bisher war v nur in S erklärt. Faßt man (1.15) als Definition von v in ganz $\mathfrak{L}_{M'}(M)$ auf, so wird v zu einem Antiautomorphismus von $\mathfrak{L}_{M'}(M)$. (Man beachte, daß (s, σ) und (s^{-1}, σ^{-1}) nach Konstruktion (vgl. [9], Theorem 17.3) Adjungierte besitzen.) Die Abbildung $\tau : \delta \to \delta'^{\sigma}$ ist ein Antiautomorphismus von Δ. Durch

$$g(x, y) = (x, ys^{-1}) \quad \text{für} \quad x, y \in M\,,$$

wird mittels der zu (M, M') gehörigen Bilinearform (x, y') in M ein nichtentartetes Skalarprodukt g bez. des Antiautomorphismus $\alpha \to \bar{\alpha} = \alpha^{\tau^{-1}}$ definiert.

Für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}_{M'}(M)$ hat man

$$\begin{aligned} g(x\mathfrak{a}, y) &= (x\mathfrak{a}, ys^{-1}) = (x, ys^{-1}\mathfrak{a}') \\ &= (x, y\mathfrak{a}^v s^{-1}) = g(x, y\mathfrak{a}^v)\,, \end{aligned}$$

wonach $\mathfrak{a}$ die Adjungierte $\mathfrak{a}^v$ bez. g besitzt. Somit ist

$$\mathfrak{F}_{M'}(M) \subseteq S \subseteq \mathfrak{L}_{M'}(M) \subseteq \mathfrak{L}_M(M)\,. \tag{1.16}$$

Insbesondere gilt $\mathfrak{F}_{M'}(M) \subseteq \mathfrak{F}_M(M)$. Wenn andererseits $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}_M(M)$ und $\bar{\mathfrak{f}}$ die Adjungierte von $\mathfrak{f}$ bez. g ist, so wird

$$\begin{aligned} (x\mathfrak{f}, y') &= g(x\mathfrak{f}, y's) = g(x, y's\bar{\mathfrak{f}}) \\ &= g(x, y's\bar{\mathfrak{f}}s^{-1}s) = (x, y's\bar{\mathfrak{f}}s^{-1})\,, \end{aligned}$$

d.h. $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}_{M'}(M)$ und

$$\mathfrak{F}_{M'}(M) = \mathfrak{F}_M(M)\,. \tag{1.17}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (1.16) und mit Rücksicht auf die Maximalität von $\mathfrak{L}_{M'}(M)$ [9] (Theorem 17.10), daß auch

$$\mathfrak{L}_{M'}(M) = \mathfrak{L}_M(M) \tag{1.18}$$

gilt. (1.17) und (1.18) ergänzen die in Satz 1.14. b) enthaltenen Aussagen.

Wir zeigen noch, daß g schwach hermitesch ist. Bezeichnen x_1, y_1 irgendzwei Elemente von M, so ist die Abbildung $x \to g(x, y_1)\, x_1$ ein Element von $\mathfrak{F}_M(M)$ mit der Adjungierten

$$y \to y_1 g(x_1, y) = g(x_1, y)^\tau y_1 . \tag{1.19}$$

Da die Adjungierte bez. g sich auch als Bild bez. des Antiautomorphismus ν auffassen läßt, gehört sie (mit Rücksicht auf Lemma 1.13) gleichfalls zu $\mathfrak{F}_M(M)$. Somit existieren Elemente z_2, y_2, so daß

$$g(x_1, y)^\tau y_1 = g(y, z_2)\, y_2 \quad \text{für alle} \quad y \in M . \tag{1.20}$$

Zufolge [9] (Theorem 15.9) ist $|\Delta| \neq 1$. Wir wählen nun y_1 so, daß $y_1 \neq 0$, wo 0 das einzige (nur im Fall $0 \in \Delta$ auftretende) Fixelement von M bez. Δ ist. Dann existiert ein Element $y_3 \in M$, so daß $g(y_1, y_3) \neq 0$ (falls $0 \in \Delta$). Aus (1.20) folgt

$$\begin{aligned} g(x_1, y)^\tau &= g(y, z_2)\, g(y_2, y_3)\, g(y_1, y_3)^{-1} \\ &= g(y, z_1) \end{aligned}$$

für alle $y \in M$ und geeignetes (von y unabhängiges) $z_1 \in M$ Bezeichnet $\mathfrak{q}$ die Abbildung $x_1 \to z_1$, so hat man also $g(x_1, y)^\tau = g(y, x_1\mathfrak{q})$, d.h., (1.7) ist erfüllt. Die Abbildung (1.19) (wobei jetzt y_1 nicht notwendig $\neq 0$ zu sein braucht) hat die Form

$$y \to g(y, x_1\mathfrak{q})\, y_1 .$$

Da ν einen Antiautomorphismus von $\mathfrak{F}_M(M)$ induziert, muß für gegebene x_0, $y_0 \in M$

$$g(y, x_1\mathfrak{q})\, y_1 = g(y, x_0)\, y_0$$

nach x_1, y_1 lösbar sein. Hieraus folgt leicht, daß $\mathfrak{q}$ eine Abbildung auf M ist.

2. Es sei M ein selbstduales Vektorsystem bez. des schwach hermiteschen, nichtentarteten Skalarprodukts g. Wir untersuchen den Fall, daß der Antiautomorphismus $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ involutorisch ist, d.h., $(\mathfrak{a}')' = \mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}_M(M)$.

2.1. Lemma. *Die adjungierte Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ ist genau dann ein involutorischer Antiautomorphismus von $\mathfrak{L}_M(M)$, wenn die in* (1.7) *auftretende Abbildung $\mathfrak{q}$ eine Skalarmultiplikation von M* (d.h. $x\mathfrak{q} = x\bar{\gamma} = \gamma x$ *für ein gewisses $\gamma \in \Delta$ und alle $x \in M$*) *ist.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}')' = \mathfrak{a} &\Leftrightarrow g(x, y(\mathfrak{a}')') = g(x, y\mathfrak{a}) \\ &\Leftrightarrow g(x\mathfrak{a}', y) = g(x, y\mathfrak{a}) . \end{aligned}$$

Da

$$g(x, y\mathfrak{a}) = \overline{g(y\mathfrak{a}, x\mathfrak{q})} = \overline{g(y, x\mathfrak{q}\mathfrak{a}')}$$

und

$$g(x\mathfrak{a}', y) = \overline{g(y, x\mathfrak{a}'\mathfrak{q})} ,$$

so ist

$$\begin{aligned} g(x\mathfrak{a}', y) = g(x, y\mathfrak{a}) &\Leftrightarrow g(y, x\mathfrak{a}'\mathfrak{q}) = g(y, x\mathfrak{q}\mathfrak{a}') \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{a}'\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{a}' . \end{aligned}$$

D.h., $\mathfrak{q}$ ist mit allen Elementen von $\mathfrak{L}_M(M)$ vertauschbar. Da der Zentralisator des $\mathfrak{L}_M(M)$-Systems M zufolge [9] (Theorem 17.8) mit Δ übereinstimmt, so ist $\mathfrak{q} = (\gamma)_l$ für geeignetes $\gamma \in \Delta$.

Analog den bekannten Resultaten über reflexive Semibilinearformen in Vektorräumen (vgl. [3], S. 11, sowie das Referat hierzu im Zentralblatt f. Math. *67*, S. 261) gilt

2.2. Lemma. *Wenn* $\mathfrak{q}$ *in* (1.7) *die Skalarmultiplikation* $\mathfrak{q} = (\gamma)_l$ *ist, so hat man*

$$\xi^{\tau^2} = \gamma \xi \gamma^{-1} \quad \text{für alle} \quad \xi \in \Delta \tag{2.3}$$

und

$$\gamma \gamma^\tau = 1 . \tag{2.4}$$

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \overline{g(y, \gamma x)} = \overline{g(y, x)\,\bar{\gamma}} \\ &= \bar{\bar{\gamma}}\,\overline{g(y, x)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

ist einerseits

$$\xi\, g(x, y) = \xi \bar{\bar{\gamma}}\, \overline{g(y, x)}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \xi\, g(x, y) = g(\xi x, y) &= \bar{\bar{\gamma}}\, \overline{g(y, \xi x)} \\ &= \bar{\bar{\gamma}}\, \overline{g(y, x)\,\bar{\xi}} \\ &= \bar{\bar{\gamma}} \bar{\bar{\xi}}\, \overline{g(y, x)} , \end{aligned}$$

somit $\xi \bar{\bar{\gamma}} = \bar{\bar{\gamma}} \bar{\bar{\xi}}$ bzw. $\gamma \xi = \xi^{\tau^2} \gamma$, d.h., (2.3) ist erfüllt. Aus (2.3) und (2.5) folgt

$$\bar{\bar{\gamma}} = \gamma , \quad \gamma\, g(x, y)\, \gamma^{-1} = g(x, y)^{\tau^2} = \gamma\, g(x, y)\, \gamma^\tau ,$$

d.h., $\gamma^{-1} = \gamma^\tau$ wie in (2.4) behauptet.

Wir nennen das Skalarprodukt g *hermitesch* bez. $\alpha \to \bar{\alpha}$, wenn

$$g(x, y) = \overline{g(y, x)} . \tag{2.6}$$

Man beweist nun leicht folgenden

2.7. Satz. *Die adjungierte Abbildung* $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ *sei ein involutorischer Antiautomorphismus, so daß* $\mathfrak{q} = (\gamma)_l$. *Wenn die Gleichung* $\pi \gamma = \bar{\pi}$ *nach* $\pi \in \Delta$ *auflösbar ist, so läßt sich* g *durch Multiplikation gemäß* $g(x, y)\, \pi = h(x, y)$ *in ein hermitesches Skalarprodukt* $h(x, y)$ *bez. des involutorischen Antiautomorphismus* $\alpha \to \alpha^* = \pi^{-1} \bar{\alpha} \pi$ *von* Δ *verwandeln.*

Im nächsten Abschnitt werden wir eine konkrete Darstellung der Endomorphismenhalbgruppe $\mathfrak{L}(M)$ angeben und anschließend in Abschnitt 4 einen einfachen Spezialfall des hermiteschen Skalarprodukts kennenlernen.

3. Es sei Δ eine Gruppe mit Null und M ein beliebiges Vektorsystem über Δ, das in der in Abschnitt 1 beschriebenen konkreten Form gegeben sei. Für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}(M)$ und $i \in I$ sei

$$(3.1) \qquad (1)_i\mathfrak{a} = \alpha_i(1)_{ia}, \quad \text{falls} \quad (1)_i\mathfrak{a} \neq 0,$$

wo 0 das Fixelement von M ist. Hiernach ist die Abbildung $i \to ia$ auf einer gewissen Teilmenge $L(a) \subseteq I$ definiert. Für die Bildmenge schreiben wir $R(a) = (L(a))\,a$. Man nennt eine solche Abbildung a auch eine Teiltransformation von I. Jedem Element $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}(M)$ entspricht so eine Teiltransformation $a : L(a) \to R(a)$ und ein Komplex

$$(3.2) \qquad A = \{(\alpha_i, i) \mid i \in L(a)\}$$

von Elementen $(\alpha_i, i) \in \Delta \times I$. Wenn $\mathfrak{a}$ die Abbildung $x \to 0$ ist, so sind A, $L(a)$ und $R(a)$ leer, und a ist die Nulltransformation (d.h. die Abbildung der leeren Teilmenge auf sich). Ist umgekehrt a eine Abbildung einer Teilmenge $L(a) \subseteq I$ auf eine Teilmenge $R(a) \subseteq I$ (wobei $R(a) = \emptyset$ nur für $L(a) = \emptyset$ möglich, d.h. a die Nulltransformation $\emptyset \to \emptyset$ ist) und ist A ein Komplex der Form (3.2), so ist dadurch gemäß (3.1) in Verbindung mit $(\xi)_i\,\mathfrak{a} = \xi((1)_i\,\mathfrak{a})$ eindeutig eine Abbildung $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}(M)$ bestimmt. Wir schreiben kürzehalber

$$\mathfrak{a} = \langle \alpha_i, a \rangle$$

bzw. $\mathfrak{a} = \langle\ , a\rangle$ wenn $\mathfrak{a} : x \to 0$ und a die Abbildung $\emptyset \to \emptyset$ ist.

Die Gesamtheit aller Teiltransformationen von I ist eine Kategorie H_I in bezug auf folgende Verknüpfung: Für $a, b \in H_I$ ist ab dann und nur dann definiert, wenn $R(a) = L(b)$, und dann ist $ab : i \to (ia)\,b$. In H_I läßt sich eine Teilordnungsbeziehung $a < b$ einführen gemäß

$$a < b \Leftrightarrow L(a) \subseteq L(b) \quad \text{und} \quad ia = ib \quad \text{für alle} \quad i \in L(a).$$

Die Relation $a < b$ hat folgende Eigenschaften ($\varrho(a)$ bzw. $\lambda(a)$ bedeute die Rechtseins bzw. Linkseins von a als Element der Kategorie):

O I. $a < c \,\&\, b < d \Rightarrow ab < cd$, falls ab und cd definiert sind.

O II. $a < b \Rightarrow \varrho(a) < \varrho(b) \,\&\, \lambda(a) < \lambda(b)$.

O III$_1$. Ist e ein Einselement der Kategorie mit $e < \lambda(a)$, so existiert ein b mit $b < a$ und $\lambda(b) = e$.

O III$_2$. Ist f ein Einselement mit $f < \varrho(a)$, so ist die Klasse $\{e \mid e < \lambda(a)$ und $\varrho(b) = f$ für $b < a$ mit $\lambda(b) = e\}$ nicht leer und enthält die obere Grenze $g(f, a)$ ihrer Elemente.

O IV$_1$. $a < c \,\&\, b < c \,\&\, \lambda(a) = \lambda(b) \Rightarrow a = b$.

O IV$_2$. $f < f' < \varrho(a) \Rightarrow g(f, a) < g(f', a)$.

Eine abstrakte Kategorie K mit einer Teilordnungsbeziehung $a < b$ (d.h., $a < a$; $a < b \,\&\, b < a \Rightarrow a = b$; $a < b \,\&\, b < c \Rightarrow a < c$), die den Axiomen O I, O II,

$O\ III_1$, $O\ III_2$, $O\ IV_1$, $O\ IV_2$ genügt, nennen wir *induktiv*. Dies ist eine Verallgemeinerung des in [11] erklärten Begriffs des induktiven Gruppoids. Die Kategorie H_I läßt sich auch dem in [5, S. 315/16] definierten (z. Teil spezielleren) Begriff einer induktiven Kategorie unterordnen.[2]) Ohne ein ausführliches Studium damit zu verbinden soll unser Axiomensystem lediglich der abstrakten Begründung der Ableitung einer Halbgruppe aus einer Kategorie nach der Pseudoproduktmethode dienen. Die Axiome sind überdies so gewählt, daß die aus einer Π-Kategorie (Definition siehe unten) abgeleitete Halbgruppe gleichfalls teilweise geordnet ist.

In einer induktiven Kategorie ist das gemäß $O\ III_1$ existierende Element b eindeutig bestimmt und heißt die *Einschränkung* von a auf e.

Sei $f < \varrho(a)$ und $g(f, a) < \lambda(a)$ das entsprechend $O\ III_2$ gewählte Einselement. a_1 sei die Einschränkung von a auf $g(f, a)$. Dann ist a_1 die obere Grenze aller Elemente $b < a$ mit $\varrho(b) = f$. Denn offenbar ist $\lambda(b)$ ein Element der in $O\ III_2$ definierten Klasse, somit $\lambda(b) < g(f, a) = \lambda(a_1)$. Zufolge $O\ III_1$ existiert $c < a_1$ mit $\lambda(c) = \lambda(b)$. Da $c < a_1 < a$ und $b < a$, hat man mit Rücksicht auf $O\ IV_1$ $b = c < < a_1$.

Wir setzen $\inf \{a, b\} = a \wedge b$ und nennen eine induktive Kategorie eine *Π-Kategorie*, wenn die beiden folgenden Axiome gelten:

O V. Für je zwei Einselemente e und e' von K existiert $e \wedge e'$.

O VI. Es gibt ein kleinstes Element o.

Die konkrete Kategorie H_I ist offenbar eine Π-Kategorie mit der Abbildung $\emptyset \to \emptyset$ als kleinstem Element o. Die Π-Kategorien, welche zugleich Gruppoide[3]) sind, stimmen mit den Pseudogruppen (Definition zum Beisp. in [11]) überein. In H_I ist die Pseudogruppe G_I aller eineindeutigen Teiltransformationen der Menge I enthalten. Wir bezeichnen G_I als das *symmetrische Gruppoid* über der Menge I. Es umfaßt insbesondere die symmetrischen Gruppen über I sowie über allen Teilmengen von I.

In einer Π-Kategorie K kann man die Multiplikation zu einer überall ausführbaren Verknüpfung fortsetzen: Für $a, b \in K$ existiert $\varrho(a) \wedge \lambda(b) = e$. (Man beachte, daß

---

[2]) Zusatz bei Korrektur. Wie uns Herr EHRESMANN ergänzend hierzu mitteilt, ist die Diskussion der geordneten Kategorien und zum Beispiel des Begriffs „Pseudoprodukt" von ihm seither weiter ausgeführt worden, besonders in: Élargissement de catégories, Sém. Topologie et Géom. diff., vol. III, Paris 1962; Catégories structurées (II, 6.), Ann. Sci. École Normale Sup., 3^e^ sér. *80*, 349—426 (1963); Sous-structures et catégories ordonnées (§§ 4, 5, 6), Fund. Math. *54*, 211—228 (1964); ferner in: Groupoïdes sous-inductifs, Ann. Inst. Fourier *13*, Fasc. 2, 1—60 (1963); Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, Ann. Inst. Fourier *14*, Fasc. 1, 205—268 (1964); Complétion des catégories ordonnées, C. R. Acad. Sci. Paris *257*, 4110—4113 (1963); Complétion des catégories sous-prélocales, C. R. Acad. Sci. Paris *259*, 701—704 (1964).

[3]) Gruppoid schlechthin bedeutet im folgenden (im Gegensatz zu [6]) stets Gruppoid im Sinne von CH. EHRESMANN (vgl. die Definition in [6], S. 146). Für unsere Betrachtungen genügt es hierbei vorauszusetzen, daß der Träger dieser partiellen algebraischen Struktur eine Menge ist. Mit dieser Einschränkung wurde dieses Gruppoid als „partielle Gruppe" bereits in [2] eingeführt.

das System K_0 der Einselemente von K abgeschlossen bez. $\wedge$ ist.) Wegen $e < \varrho(a)$, $e < \lambda(b)$ existieren ein eindeutig durch a bestimmtes maximales Element $a_1 < a$ mit $\varrho(a_1) = e$ und ein eindeutig durch b bestimmtes Element $b_1 < b$ mit $\lambda(b_1) = e$. Daher ist $a_1 b_1$ in K definiert; es heißt das *Pseudoprodukt* $a \,.\, b = a_1 b_1$ von a und b. Für $\varrho(a) = \lambda(b)$ ist $a \,.\, b = ab$. Das Pseudoprodukt ist assoziativ und stimmt im Fall einer Pseudogruppe mit dem in [4] (S. 60) erklärten Pseudoprodukt überein (vgl. auch [11], S. 203). Die so aus einer Π-Kategorie K *abgeleitete* Halbgruppe $K(.)$ ist eine bez. $<$ teilweise geordnete Halbgruppe mit Null

$$(\text{d.h., } a < b \Rightarrow (\forall c \in K(.))\, a \,.\, c < b \,.\, c \,\&\, c \,.\, a < c \,.\, b)\,.$$

Denn sei $a < c$, $b < d$ und wie oben $a \,.\, b = a_1 b_1$, entsprechend $c \,.\, d = c_1 d_1$. Dabei ist $a_1 < a$, $b_1 < b$ mit

$$\varrho(a) \wedge \lambda(b) = e = \varrho(a_1) = \lambda(b_1)$$

und $c_1 < c$, $d_1 < d$ mit

$$\varrho(c) \wedge \lambda(d) = f = \varrho(c_1) = \lambda(d_1)\,,$$

und a_1, c_1 sind maximal. Wegen $a < c$, $b < d$ ist

$$e < f = \varrho(c_1) < \varrho(c) \quad \text{und} \quad g(e, c) < g(f, c) = \lambda(c_1) < \lambda(c)\,.$$

Sei $c_2 < c$, $\lambda(c_2) = g(e, c)$. Da $a_1 < a < c$, $\varrho(a_1) = e$, und c_2 bez. $c_2 < c$, $\varrho(c_2) = e$ maximal ist, muß sein $a_1 < c_2$. Nun ist

$$c_2 < c,\ c_1 < c \quad \text{und} \quad \lambda(c_2) = g(e, c) < g(f, c) = \lambda(c_1)\,.$$

Daraus folgt $c_2 < c_1$. Denn für $c_3 < c_1$ mit $\lambda(c_3) = \lambda(c_2)$ gilt zugleich $c_2 < c$, $c_3 < c$ und $\lambda(c_2) = \lambda(c_3)$, d.h. $c_2 = c_3$. Wir haben gefunden, daß $a_1 < c_2 < c_1$.

Der Beweis von $b_1 < d_1$ ist einfacher. Aus $b_1 < b < d$, $d_1 < d$ und $\lambda(b_1) = e < f = \lambda(d_1)$ folgt wie zuvor $b_1 < d_1$. Schließlich ergibt O I., daß $a_1 b_1 < c_1 d_1$.

Eine Halbgruppe mit einem involutorischen Antiautomorphismus nennen wir *involutorisch*. Die aus einer Pseudogruppe K abgeleitete Halbgruppe $K(.)$ ist involutorisch; wenn mit a^{-1} das Inverse von a als Element der Pseudogruppe K bezeichnet wird, so ist $a \to a^{-1}$ ein involutorischer Antiautomorphismus von $K(.)$. Setzt man $a \,.\, b = a_1 b_1$, wobei $a_1 < a$ und $b_1 < b$ mit

$$\varrho(a) \wedge \lambda(b) = e = \varrho(a_1) = \lambda(b_1)\,,$$

so gilt $(a \,.\, b)^{-1} = b_1^{-1} a_1^{-1}$, und es ist zu zeigen, daß auch $b^{-1} \,.\, a^{-1} = b_1^{-1} a_1^{-1}$. Offenbar gilt

$$\varrho(b^{-1}) \wedge \lambda(a^{-1}) = \lambda(b) \wedge \varrho(a) = e\,.$$

Wir setzen $b^{-1} \,.\, a^{-1} = b_2 a_2$, wobei $b_2 < b^{-1}$ und $a_2 < a^{-1}$ mit $e = \varrho(b_2) = \lambda(a_2)$. Wegen $\varrho(a_1) = \lambda(a_2) = e$ ist $a_1 a_2$ definiert. Aus $a_1 < a$ und $a_2 < a^{-1}$ folgt

$$a_1 a_2 < a a^{-1} = \lambda(a)\,.$$

Da die Klasse K_0 der Einselemente von K bez. der Induktion abgeschlosen ist (d.h., $a < e \in K_0 \Rightarrow a \in K_0$), so ist $a_1 a_2 \in K_0$, d.h. $a_2 = a_1^{-1}$. Entsprechend erhält man $b_2 = b_1^{-1}$.

Die Pseudoproduktmethode ergibt für $K = H_I$ bzw. $K = G_I$ die Halbgruppe $H_I(.)$ aller Teiltransformationen der Menge I und die in $H_I(.)$ enthaltene involutorische Halbgruppe $G_I(.)$ aller eineindeutigen Teiltransformationen von I.

Das Pseudoprodukt $a \,.\, b$ für a und b aus $H_I(.)$ (bzw. aus $G_I(.)$ lautet explizit:

$$a \,.\, b\colon\ i \to i(a \,.\, b) = (ia)\, b \quad \text{für} \quad i \in L(a \,.\, b)\,, \tag{3.3}$$

worin

$$L(a \,.\, b) = (R(a) \cap L(b))\, a^{-1}\,. \tag{3.4}$$

Wir definieren nun das Produkt zweier Symbole $\langle \alpha_i, a\rangle$ und $\langle \beta_i, b\rangle$ gemäß

$$\langle \alpha_i, a\rangle \langle \beta_i, b\rangle = \langle \alpha_i \beta_{ia}, ab\rangle \quad \text{genau dann, wenn} \quad R(a) = L(b)\,. \tag{3.5}$$

Es ist leicht nachzuprüfen, daß die Gesamtheit der Symbole $\langle \alpha_i, a\rangle$ bez. der Verknüpfung (3.5) eine Kategorie $H_I(^-\Delta)$ bildet (hier ist $^-\Delta$ die aus Δ durch Weglassung des Nullelementes entstehende Gruppe). Ist K eine Teilkategorie von H_I, so ist die Gesamtheit der Symbole $\langle \alpha_i, a\rangle$ mit $a \in K$ eine Teilkategorie $K(^-\Delta)$ von $H_I(^-\Delta)$. Wir nennen $K(^-\Delta)$ das (*uneingeschränkte*) *Kranzprodukt* der Gruppe $^-\Delta$ mit der Kategorie $K \subseteq H_I$. Bei dieser Definition erscheint also $H_I(^-\Delta)$ selbst als ein solches Kranzprodukt. Ist $K = \mathfrak{S}_I$ die uneingeschränkte symmetrische Gruppe über I, so ist $\mathfrak{S}_I(^-\Delta)$ eine Gruppe, und zwar ist sie identisch mit dem Kranzprodukt von $^-\Delta$ und $\mathfrak{S}_I$ im gewöhnlichen Sinne (vgl. zum Beisp. [7]). In $H_I(^-\Delta)$ kann eine Teilordnungsbeziehung eingeführt werden gemäß

$$\langle \alpha_i, a\rangle < \langle \beta_i, b\rangle \Leftrightarrow a < b\,, \quad \alpha_i = \beta_i \quad \text{für alle} \quad i \in L(a)\,.$$

Wie man sich leicht überlegt, ist $H_I(^-\Delta)$ bez. dieser Teilordnung eine Π-Kategorie und das Kranzprodukt $G_I(^-\Delta)$ eine Pseudogruppe. In $H_I(^-\Delta)$ läßt sich also ein Pseudoprodukt einführen. Dieses Pseudoprodukt läßt sich mit Hilfe des in $H_I(.)$ erklärten Pseudoprodukts $a \,.\, b$ explizit so ausdrücken:

$$\langle \alpha_i, a\rangle \,.\, \langle \beta_i, b\rangle = \begin{cases} \langle \alpha_i \beta_{ia}, a \,.\, b\rangle, & \text{wenn} \quad a \,.\, b \neq o\,, \\ \langle\ , o\rangle & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Ist $G(.)$ eine Teilhalbgruppe von $H_I(.)$, so ist die Gesamtheit der Symbole $\langle \alpha_i, a\rangle$, $a \in G$, bez. der Verknüpfung (3.6) eine Teilhalbgruppe $G(.)(^-\Delta)$. Wir nennen $G(.)(^-\Delta)$ das (*uneingeschränkte*) *Kranzprodukt* der Gruppe $^-\Delta$ mit der Halbgruppe $G(.) \subseteq H_I(.)$. Wie man sich leicht überlegt, repräsentiert das Pseudoprodukt (3.6) genau diejenige Abbildung des Vektorsystems M, die sich bei der Bildung des gewöhnlichen Produkts der zugehörigen Abbildungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{L}(M)$ ergibt. Wir haben damit

3.7. Satz.[4]) *Die Halbgruppe $\mathfrak{L}(M)$ der Endomorphismen eines Vektorsystems M über einer Gruppe mit Null Δ ist isomorph darstellbar als das Kranzprodukt $H_I(.)\,({}^{-}\Delta)$ der Gruppe ${}^{-}\Delta$ mit der Halbgruppe $H_I(.)$.*

Wir identifizieren weiterhin $\mathfrak{L}(M)$ mit $H_I(.)\,({}^{-}\Delta)$.

Wie in [9] (Section 16) gezeigt wurde, gilt für ein beliebiges Vektorsystem M über einer Gruppe oder Gruppe mit Null Δ die Beziehung $\mathfrak{L}(M) = \mathfrak{L}_{M^*}(M)$, wo M^* das zu M adjungierte System bedeutet; die zugehörige Bilinearform $xf(x \in M,\ f \in M^*)$ ist nichtentartet. Zufolge [9] (Theorem 15.9) besteht daher

3.8. Satz. *Die Endomorphismenhalbgruppe $\mathfrak{L}(M)$ eines Vektorsystems M über einer Gruppe oder Gruppe mit Null Δ ist für $|\Delta| \neq 1$ (nicht nur primitiv, sondern auch) links primitiv.*

Für $0 \in \Delta$ ist die Voraussetzung $|\Delta| \neq 1$ des Satzes 3.8 von selbst erfüllt. Wählt man für Δ die aus 0 und 1 bestehende Gruppe mit Null, so wird $H_I(.)\,({}^{-}\Delta) = H_I(.)$, und man erhält

3.9. Folgerung. *Die Halbgruppe $H_I(.)$ aller Teiltransformationen einer Menge I ist eine primitive Halbgruppe mit irreduziblen, von einem Idempotent erzeugten Rechtsidealen, und zugleich links primitiv.*

Der Sockel von $H_I(.)$ besteht aus allen Teiltransformationen a von I mit $|R(a)| \leqq$ $\leqq 1$.

4. Es sei M ein Vektorsystem über Δ; im folgenden sei Δ stets eine Gruppe mit Null, $\alpha \to \bar{\alpha}$ irgendein involutorischer Antiautomorphismus von Δ und τ die Inverse von $\alpha \to \bar{\alpha}$. Das Vektorsystem M ist selbstdual bez. des Skalarprodukts

$$g((\xi)_i, (\eta)_k) = \xi\delta_{ik}\bar{\eta}\,,$$

wo δ_{ik} das Kroneckersymbol bedeutet. Da $\overline{\eta\delta_{ki}\bar{\xi}} = \xi\delta_{ik}\bar{\eta}$, so ist g hermitesch. Die Bedingungen dafür, daß $\mathfrak{a} = \langle\alpha_i, a\rangle$ zu $\mathfrak{L}_M(M)$ gehört, d.h. eine Adjungierte $\mathfrak{a}' =$ $= \langle\alpha'_k, a'\rangle = \langle\beta^\tau_k, b\rangle$ $(\beta^\tau_k = \alpha'_k,\ b = a')$ besitzt, lauten:

$$\alpha_i\delta_{ia,k} = 0 \quad \text{für} \quad i \in L(a),\ k \notin L(b)\,, \tag{4.1}$$

$$\delta_{i,kb}\beta_k = 0 \quad \text{für} \quad i \notin L(a),\ k \notin L(b)\,, \tag{4.2}$$

$$\alpha_i\delta_{ia,k} = \delta_{i,kb}\beta_k \quad \text{für} \quad i \in L(a),\ k \in L(b)\,. \tag{4.3}$$

Die Bedingungen (4.1), (4.2) sind gleichbedeutend mit

$$ia \neq k \quad \text{für} \quad i \in L(a),\ k \notin L(b)\,,$$

$$i \neq kb \quad \text{für} \quad i \notin L(a),\ k \in L(b)\,,$$

[4]) Für die Endomorphismenhalbgruppe $\mathfrak{L}(M)$ eines Vektorsystems M über einer Gruppe Δ gilt ein ähnlicher Satz, der aber insofern einfacher ist als an Stelle von $H_I(.)$ die Halbgruppe aller Transformationen von I in sich darin eingeht. Man vergleiche hierzu auch den in [9] (Theorem 10.10) beschriebenen Übergang von einer Darstellung einer Halbgruppe S zur monomialen Darstellung.

ebenso mit

$$R(a) \subseteq L(b)\,, \tag{4.4}$$

$$R(b) \subseteq L(a)\,. \tag{4.5}$$

Hieraus folgt, daß man in (4.3) $k = ia$ bzw. $i = kb$ einsetzen darf. Man findet dann

$$i = (ia)\,b\,, \quad i \in L(a) \tag{4.6}$$

bzw.

$$(kb)\,a = k\,, \quad k \in L(b)\,. \tag{4.7}$$

Aus (4.6) folgt $L(a) \subseteq R(b)$ und daher nach (4.5) $R(b) = L(a)$. Entsprechend folgt aus (4.4), (4.7), daß $R(a) = L(b)$. Ferner ersieht man aus (4.6), (4.7), daß a und b eineindeutige Teiltransformationen von I sind, somit zum symmetrischen Gruppoid G_I gehören und bez. der Verknüpfung in G_I zueinander invers sind, $b = a^{-1}$. Für $i = ka^{-1}$ erhält man aus (4.3)

$$\beta_k = \alpha_{ka^{-1}}\,, \quad k \in L(b)\,.$$

D.h., die Adjungierte $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$ läßt sich in folgender Form ausdrücken,

$$\mathfrak{a}' = \langle \alpha^{\tau}_{ka^{-1}}, a^{-1} \rangle\,. \tag{4.8}$$

Wir haben damit gefunden, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ zum Kranzprodukt $G_I(.)\,(^{-}\Delta)$ gehören, und wenn umgekehrt $\mathfrak{a} \in G_I(.)\,(^{-}\Delta)$ und für $\mathfrak{a}'$ der Ausdruck (4.8) verwendet wird, so sind die Bedingungen (4.1) bis (4.3) erfüllt. Demnach gilt

4.9. Satz. *Für das selbstduale Vektorsystem M bez. des hermiteschen Skalarprodukts $g((\xi)_i, (\eta)_k) = \xi\delta_{ik}\bar{\eta}$ ist die Halbgruppe $\mathfrak{L}_M(M)$ identisch mit dem Kranzprodukt $G_I(.)\,(^{-}\Delta)$ der Gruppe $^{-}\Delta$ mit der aus dem symmetrischen Gruppoid G_I abgeleiteten Halbgruppe $G_I(.)$.*

Wir bemerken noch, daß das Gruppoid $G_I(^{-}\Delta)$ genau aus den umkehrbaren Elementen der Kategorie $H_I(^{-}\Delta)$ besteht und die Adjungierte $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$ zufolge (4.8) im Fall $\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$ mit dem inversen Element $\mathfrak{a}^{-1}$ von $\mathfrak{a}$ im Gruppoid $G_I(^{-}\Delta)$ übereinstimmt.

Wir haben

4.10. Folgerung. *Das Kranzprodukt $G_I(.)\,(^{-}\Delta)$ ist eine involutorische primitive Halbgruppe mit irreduziblen, von einem Idempotent erzeugten Rechtsidealen (und notwendig auch links primitiv).*

Der Sockel von $G_I(.)\,(^{-}\Delta)$ besteht aus allen Elementen $\mathfrak{a} = \langle \alpha_i, a \rangle \in H_I(.)\,(^{-}\Delta)$ mit $|L(a)| \leqq 1$, ist also eine Brandt*sche Halbgruppe.*[5])

---

[5]) Brandtsche Halbgruppe = Brandtsches $^{+}$Gruppoid in der Definition von [6] (S. 146).

Die Elemente $a \in H_I$ mit $|L(a)| = 1$ bilden ein schlichtes BRANDTsches Teilgruppoid $^{-}S_I$ von G_I (Definition in [6], S. 142 und S. 146, Formel (2)). Die Vereinigungsmenge $S_I = {}^{-}S_I \cup \{o\}$ von $^{-}S_I$ mit der Nulltransformation $o: \emptyset \to \emptyset$ ist ein schlichtes (EHRESMANNsches) Gruppoid. Der Sockel von $G_I(.)\,(^{-}\Delta)$ kann damit auch als das Kranzprodukt $S_I(.)\,(^{-}\Delta)$ geschrieben werden, wo $S_I(.) \subseteq G_I(.)$ die aus S_I abgleitete Halbgruppe bedeutet. Bezeichnet T irgendein Teilgruppoid mit $S_I \subseteq T \subseteq G_I$ und $T(.) \subseteq G_I(.)$ die daraus abgeleitete Halbgruppe, so gilt für $T_I(.)\,(^{-}\Delta)$ natürlich

$$S_I(.)\,(^{-}\Delta) \subseteq T(.)\,(^{-}\Delta) \subseteq G_I(.)\,(^{-}\Delta)\,. \tag{4.11}$$

Da jede zwischen $\mathfrak{F}_M(M)$ und $\mathfrak{L}_M(M)$ gelegene Halbgruppe nach unserem Struktursatz [9] (Theorem 15.7) primitiv ist und da $T(.)\,(^{-}\Delta)$ bei der adjungierten Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ offenbar auf sich abgebildet wird, so besteht für das Kranzprodukt $T(.)\,(^{-}\Delta)$ eine zu 4.10 analoge, allgemeinere Folgerung. Wir formulieren sie nur im Spezialfall $\Delta = \{0, 1\}$:

4.12. Folgerung. *Es sei G_I das symmetrische Gruppoid über der Menge I, S_I das aus allen a mit $|L(a)| \leqq 1$ bestehende schlichte Gruppoid, T irgendein zwischen S_I und G_I gelegenes Gruppoid. Dann ist die aus T abgeleitete Halbgruppe $T(.)$ eine involutorische primitive Halbgruppe mit dem Sockel $S_I(.)$ (und notwendig links primitiv).*

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Forschungsgemeinschaft, Institut für Reine Mathematik

Literatur

[1] *A. H. Clifford:* Matrix representations of completely simple semigroups. Amer. J. Math. *64*, 327—342 (1942).

[2] *R. Croisot:* Une interprétation des relations d'équivalence dans un ensemble. C. R. Acad. Sci. Paris *226*, 616—617 (1948).

[3] *J. Dieudonné:* La géométrie des groupes classiques. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[4] *Ch. Ehresmann:* Gattungen von lokalen Strukturen. J.-Ber. Deutsch. Math. Verein. *60*, 49—77 (1957).

[5] *Ch. Ehresmann:* Catégories inductives et pseudogroupes. Ann. Inst. Fourier, Grenoble *10*, 307—336 (1960).

[6] *H. J. Hoehnke:* Zur Theorie der Gruppoide, I. Math. Nachr. *24*, 137—168 (1962).

[7] *H.-J. Hoehnke:* Über die Erzeugung von monomialen Gruppendarstellungen durch Brandtsche Gruppoide. Math. Z. *77*, 68—80 (1961).

[8] *H.-J. Hoehnke:* Zur Strukturtheorie der Halbgruppen. Math. Nachr. *26*, 1—13 (1963).

[9] *H.-J. Hoehnke:* Structure of semigroups. Canad. J. Math. (im Druck).

[10] *N. Jacobson:* Structure of rings. Providence, R. I., 1956.

[11] *W. Rinow:* Über die Vervollständigung induktiver Gruppoide. Math. Nachr. *25*, 199—222 (1963).

Резюме

ОБ АНТИАВТОМОРФНЫХ И ИНВОЛЮТИВНЫХ ПРОСТЫХ ПОЛУГРУППАХ

ГАНС-ЮРГЕН ХЕНКЕ (Hans-Jürgen Hoehnke), Берлин

Для простых полугрупп S с неприводимыми правыми идеалами, порожденными идемпотентом, была недавно установлена структурная теорема [9] (теорема 15.7), в которой фигурируют пары (M, M') двойственных векторных систем над группой или группой с нулем Δ. В данной заметке при помощи самодвойственных векторных систем M и слабо эрмитовых скалярных произведений $g(x, y)$ в M (аналогично [10], стр. 80–83) вышеупомянутая структурная теорема усиливается для полугрупп, допускающих антиавтоморфизм (теорема 1.14). Изучается случай эрмитова скалярного произведения $g(x, y)$. Выбор единичной матрицы (δ_{ik}) в качестве матрицы $g(x, y)$ таким образом приводит, в частности, к структурной теореме о полугруппе $G_I(.)$ всех взаимно однозначных частных преобразований множества I, а также к теореме о сплетении $G_I(.)$ $(^{-}\Delta)$ (следствие 4.10), которую можно рассматривать как обобщение теоремы Клиффорда [1] (теорема 8.1, стр. 341) о структуре полугруппы Брандта. Далее всркывается связь с некоторыми псевдогруппами.