Czechoslovak Mathematical Journal

Marko Švec

Несколько замечаний о линейном дифференциальном уравнении третьего порядка

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 1, 42–49

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100652`

Чехословацкий математический журнал, т. 15 (90) 1965, Прага

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

МАРКО ШВЕЦ (Marko Švec), Братислава

(Поступило в редакцию 14/X 1963 г.)

В работе мы занимаемся линейным дифференциальным уравнением третьего порядка, имеющим свойство (V_1) или (V_2). Доказывается, что это свойство впечет за собой много дальнейших свойств, касающихся числа нулей решения, и, главное, существование решения без нулей.

Пусть L_3 – линейный дифференциальный оператор третьего порядка с непрерывными коэффициентами в интервале (a, ∞), $-\infty \leqq a$ и пусть коэффициент при наивысшей производной равен 1. Мы будем исследовать уравнение

$$L_3 y = 0\,. \tag{1}$$

Его решение мы будем называть *колебательным,* если оно имеет весконечное число нулей, имеющих предельную точку в бесконечности. Уравнение (1) мы будем называть *колебательным,* если существует хоть оуно решение, являющееся колебательным, и мы будем называть его *неколебательным,* если оно не имеет колебательных решений.

Мы будем говорить, что *уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1), *если каждое его решение, имеющее двойной нуль, напр., в* x_0, *не имеет нулей для* $x < x_0$.

Мы будем говорить, что *уравнение* (1) *имеет свойство* (V_2), *если каждое его решение, имеющее двойной нуль, напр., в* x_0, *не имеет нулей для* $x > x_0$.

Пусть

$$\bar{L}_3 z = 0 \tag{2}$$

есть уравнение, сопряженное для уравнения (1).

В дальнейшем мы будем пользоваться известным соотношением между решениями сопряженных уравнений. Если y_1, y_2, y_3 – фундаментальная система решений уравнения (1) и $W(y_1, y_2, y_3)$ – ее определитель Вронского ,и если u, v суть два произвольных решения уравнения (1), то функция $W(u, v)/W(y_1, y_2, y_3)$ является решением уравнения (2). Из известной формулы Лиувилля следует, что вронскиан фундаментальной системы решений является отличной от нуля функцией на интервале (a, ∞) и что вронскианы двух фундаментальных систем решений отличаются лишь постоянным фактором. Так как в дальнейшем этот постоянный фактор не будет иметь значения, мы будем в качестве вронскиана фундаментальной системы брать всегда одну и ту же функцию и обозначать ее через W.

Свойства V_1 и V_2 связаны с уравнениями (1) и (2) следующим образом ([1], Лемма 2.6, стр. 924):

Лемма 1. *Уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1) [(V_2)] *тогда и только тогда, когда уравнение* (2) *имеет свойство* (V_2) [(V_1)].

Из этой леммы мы получим следующее утверждение:

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1) *и* (V_2) *тогда и только тогда, когда каждое решение уравнения* (1) *имеет самое больше два простых нуля* (*или один двукратный*).

Доказательство. Пусть уравнение (1) имеет свойство (V_1) и (V_2). По лемме 1 свойствами (V_1) и (V_2) обладает и уравнение (2). Отсюда следует, что каждое решение уравнения (1), а также (2), имеющее двукратный нуль, не имеет уже других нулей. Покажем, что ни одно решение уравнения (1) не может обладать тремя простыми нулями. Пусть, напр., решение $y(x)$ уравнения (1) имеет три простых нуля: $x_1 < x_2 < x_3$. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1), имеющее в x_1 двукратный нуль (а значит, никаких других нулей уже не имеет). Ясно, что $W(y, u)$ имеет в x_1 двукратный нуль и, следовательно, $W(y, u)/W$, являющееся решением уравнения (2), уже не имеет других нулей. Итак, $W(y, u) \neq 0$ для $x \in \langle x_2, x_3 \rangle$. Но отсюда следует, что $u(x)$ должно иметь нуль в интервале $\langle x_2, x_3 \rangle$, а это противоречит допущению. Таким образом, мы доказали, что $y(x)$ не может иметь трех нулей.

С другой стороны, из определения свойств (V_1) и (V_2) следует утверждение: *Если каждое решение уравнения* (1) *имеет самое больше два нуля* (*или один двукратный*), *то уравнение* (1) *обладает свойствами* (V_1) *и* (V_2).

Замечание 1. Теорема 1 эквивалентна теореме Маммана [2] о разложении линейного дифференциального операгора порядка n ($n = 3$) в произведение n действительных линейных дифференциальных операторов 1-го порядка.

Замечание 2. Если уравнение имеет свойство (V_2), то каждое его решение, имеющее двукратный нуль, будет неколебательным.

Лемма 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1). *Тогда решения, имеющие нуль, имеют одинаковый колебательный характер, т. е. или все они колебательные или все они неколебательны.*

Это утверждение доказывается в [1], теорема 3.4, стр. 927.

Лемма 3. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1) *и пусть* $u(x)$ — *его решение, имеющее в числе* x_0 *двукратный нуль. Если* x_1 — *нуль решения* $u(x)$ *и притом первый, следующий за* x_0, *то каждое решение уравнения* (1), *имеющее в* x_0 *нуль, имеет нуль также в интервале* $(x_0, x_1\rangle$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1) и пусть $y(x_0) = 0$. Если и $y'(x_0) = 0$, то $y(x) = c\,u(x)$, где c — подходящая постоянная. Тогда утверждение, очевидно, справедливо. Итак, пусть $y'(x_0) \neq 0$. Тогда $W(u, y) = u'(x)\,y(x) - u(x)\,y'(x)$ — функция, имеющая в x_0 двукратный нуль и не равная тождественно нулю на (a, ∞). Так как $W(u, y)/W$ есть решение уравнения (2), имеющего свойство (V_2), это значит, что $W(u, y) \neq 0$ для $x > x_0$. Без ограничения общности можно допустить, что $u(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_1)$ и, следовательно, $u'(x_1) < 0$, и что $y'(x_0) > 0$. Если $y(x)$ не имеет на $(x_0, x_1\rangle$ нуля, то $y(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_1\rangle$. Но тогда $u(x)/y(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_1)$,

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{u(x)}{y(x)} = \frac{u'(x_0)}{y'(x_0)} = 0, \quad W(u, y)\big|_{x_1} = u'(x_1)\,y(x_1) < 0$$

и, следовательно, $W(u, y) < 0$ для $x > x_0$. Отсюда следует, что

$$\left(\frac{u(x)}{y(x)}\right)' = \frac{W(u, y)}{y^2(x)} < 0 \quad \text{для} \quad x \in (x_0, x_1)$$

и, следовательно, $u(x)/y(x)$ является на интервале (x_0, x_1) убывающей функцией. Это приводит к противоречию, ибо $\lim\limits_{x \to x_0+} u(x)/y(x) = 0$ и $u(x)/y(x) > 0$. Это противоречие доказывает, что $y(x)$ не может быть отличным от нуля для $(x_0, x_1\rangle$.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1). *Тогда*: а) *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение* (1) *было неколебательным, является условие, чтобы существовало его решение, имеющее лишь один нуль, причем этот нуль двукратный.*

б) *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение* (1) *было неколебательным, является существование числа* $\gamma \in (a, \infty)$ *такого, что на интервале* $\langle\gamma, \infty)$ *каждое решение уравнения* (1) *имеет не более двух нулей* (*или один двукратный*).

Доказательство. а) Из леммы 2 следует, что условие достаточно. Докажем его необходимость. Пусть уравнение (1) неколебательно. Пусть $u(x)$ — его решение и пусть x_n — его последний нуль. Тогда $u(x) \neq 0$ для $x > x_n$. Если x_n — двукратный нуль решения $u(x)$, то $u(x)$ есть решение требуемого свойства. Допустим поэтому, что x_n — простой нуль $u(x)$. Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(x_n) = y'(x_n) = 0$. Допустим далее, что это решение имеет за точкой x_n нуль, который мы обозначим через ξ. Но тогда по лемме 3 $u(x)$ должно иметь нуль в интервале $(x_n, \xi\rangle$, что противоречит допущению, что x_n является последним нулем $u(x)$. Это противоречие доказывает, что $y(x) \neq 0$ для $x > x_n$. Из свойства (V_1) следует, однако, что $y(x) \neq 0$ и для $x < x_n$. Итак, $y(x)$ есть решение требуемого свойства.

б) Ясно, что указанное условие достаточно. Докажем его необходимость. Пусть уравнение (1) неколебательно и пусть $u(x)$ имеет тот же самый смысл, как и в части а). Пусть $u(x) > 0$ для $x > x_n$. Пусть $v(x)$ – решение уравнения (1), имеющее на интервале $\langle x_n, \infty)$ по крайней мере три нуля. Обозначим их через t_1, t_2, t_3, и пусть это первые три нуля. Итак, $x_n \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq t_3$. Из леммы 3 следует, что не может быть $x_n = t_1 = t_2 < t_3$. Из свойства (V_1), однако, следует снова, что не может быть $t_1 < t_2 = t_3$, а из теоремы о существовании следует, что не может быть $t_1 = t_2 = t_3$ (тогда было бы $v(x)$ равным тождественно нулю, что мы исключаем). Итак, может наступить только случай $x_n \leqq t_1 \leqq t_2 < t_3$ (если $x_n = t_1$, то $t_1 < t_2$). Без ограничения общности можно допустить, что $v(x) > 0$ для $x \in (t_2, t_3)$. Но тогда будет и $v(x) > 0$ для $x \in \langle x_n, t_1)$, если $x_n < t_1$. Из сделанных предположений тогда следует, что существует число τ из интервала (t_2, t_3), в котором $W(u, v)$ равно нулю. Действительно, в противном случае решение $u(x)$ имело бы в интервале (t_2, t_3) нуль. Но это значит, что существует постоянная $c > 0$ такая, что $v(x)$ и $c\,u(x)$ касаются друг друга в точке τ, а в интервале $\langle x_n, t_1)$ пересекаются, если $x_n < t_1$. Если же $x_n = t_1$, то они пересекаются в x_n. Но тогда $c\,u(x) - v(x)$, являющееся решением уравнения (1), имеет в числе τ двукратный нуль и в интервале $\langle x_n, t_1)$, или в точке x_n, нуль, что противоречит свойству (V_1).

Замечание 3. Если уравнение (1) неколебательно и имеет свойство (V_1), то по доказанной теореме существует число γ такое, что на интервале (γ, ∞) уравнение (1) имеет свойства (V_1) и (V_2); следовательно, принимая во внимание теорему 1 и замечание 2, на этом интервале можно дифференциальный оператор L_3 представить в виде произведения трех действительных линейных дифференциальных операторов 1-го порядка

Теорема 3. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1). *Тогда существует его решение без нулей.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность чисел из интервала (a, ∞) и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Пусть x_0 – какое-либо число из интервала (a, ∞) и пусть $y_n(x)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$y_n(x_n) = y_n'(x_n) = 0\,, \tag{3}$$

$$y_n^2(x_0) + y_n'^2(x_0) + y_n''^2(x_0) = 1\,. \tag{4}$$

Из свойства (V_1) следует, что $y_n(x) \neq 0$ для $a < x < x_n$. Без ограничения обшности можно предположить, что $y_n(x) > 0$ для $x \in (a, x_n)$. Пусть $u_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, суть решения уравнения (1), определенные начальными условиями

$$u_i^{(k)}(x_0) = \delta_{ik}\,, \quad i, k = 0, 1, 2\,,$$

где δ_{ik} – символ Кронеккера. Тогда решение $y_n(x)$ можно записать в виде

$$y_n(x) = a_n u_0(x) + b_n u_1(x) + c_n u_2(x),$$

причем, очевидно, $y_n(x_0) = a_n$, $y_n'(x_0) = b_n$, $y_n''(x_0) = c_n$. Итак, условие (4) можно записать в виде

$$(5) \qquad a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 = 1 .$$

Из этого условия вытекает, что последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются ограниченными числовыми последовательностями. Поэтому существуют выделенные из них последовательности, которые сходятся. Пусть это последовательности $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{b_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{c_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, и пусть $\lim\limits_{i\to\infty} a_{n_i} = a_0$, $\lim\limits_{i\to\infty} b_{n_i} = b_0$, $\lim c_{n_i} = c_0$. Из (5) мы тогда получим

$$(6) \qquad a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1 .$$

Далее получаем

$$\lim_{i\to\infty} y_{n_i}(x) = \lim_{i\to\infty} [a_{n_i} u_0(x) + b_{n_i} u_1(x) + c_{n_i} u_2(x)] =$$
$$= a_0 u_0(x) + b_0 u_1(x) + c_0 u_2(x) = y(x) .$$

Функция $y(x)$ является, очевидно, решением уравнения (1) и условие (6) обеспечивает нетривиальность этого решения. Так как $y_{n_i}(x) > 0$ для $x \in (a, x_{n_i})$, будет $y(x) = \lim\limits_{i\to\infty} y_{n_i}(x) \geqq 0$ для $x \in (a, \infty)$. Но это значит, что $y(x)$ может иметь лишь двукратные нули. Однако, учитывая свойство (V_1), мы убеждаемся, что $y(x)$ не может иметь больше одного нуля, причем двукратного. Если уравнение (1) колебательно, то из теоремы 2 следует, что $y(x)$ вообще не имеет нулей.

Предположим теперь, что уравнение (1) неколебательно. Тогда из теоремы 2 следует существование числа $\gamma \in (a, \infty)$ такого, что на интервале $\langle\gamma, \infty)$ каждое решение уравнения (1) имеет не более двух нулей (или один двукратный). Пусть $t_0 \in (\gamma, \infty)$ и пусть $v(x)$ – решение уравнения (1), выполняющее условия $v(t_0) = v'(t_0) = 0$, $v''(t_0) > 0$. Тогда, очевидно, будет $v(x) > 0$ для $x \in (a, \infty)$, $x \neq t_0$. Это следует из свойства (V_1) и из упомянутого выше свойства решений на интервале (γ, ∞). Возьмем теперь число $t_1 \in (\gamma, \infty)$, $t_1 \neq t_0$ и построим решение $v_1(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$(7) \qquad v_1(t_1) = v(t_1) , \quad v_1'(t_1) = v'(t_1) , \quad v_1''(t_1) > v''(t_1) .$$

Тогда решение $z_1(x) = v_1(x) - v(x)$ выполняет в числе t_1 условия

$$z_1(t_1) = z_1'(t_1) = 0 , \quad z_1''(t_1) = v_1''(t_1) - v''(t_1) > 0 .$$

Так как $t_1 \in (\gamma, \infty)$, то из этих же условий следует, что $z_1(x) > 0$ для $x \in (a, \infty)$, $x \neq t_1$. Итак, $z_1(x) = v_1(x) - v(x) > 0$ для $x \in (a, \infty)$, $x \neq t_1$, $z_1(t_1) = v_1(t_1) - v(t_1) = 0$. Отсюда следует, что $v_1(x) > v(x) \geqq 0$ для $x \neq t_1$ и $v_1(t_1) = v(t_1) > 0$. Итак, $v_1(x) > 0$ для $x \in (a, \infty)$.

Теорема 4. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1) *и пусть оно колебательно; пусть его решения ограничены. Тогда для решения* $y(x)$ *без нулей, существование которого обеспечивается теоремой* 3 *и которое мы построили в ее доказательстве, имеет место*: $\liminf\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$.

Доказательство. Так как $y(x) > 0$ для $x \in (a, \infty)$, ясно, что $\liminf\limits_{x \to \infty} y(x) = m \geqq 0$. Допустим, что $m > 0$. Тогда к числу $\varepsilon = m/2$ можно подобрать такое число $t_\varepsilon \in (a, \infty)$, что для $x \in (t_\varepsilon, \infty)$ будет $y(x) > m - \varepsilon = m/2$.

Ограниченность решений уравнения (1) гарантирует, что последовательность решений $\{y_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ из доказательства теоремы 3 сходится к $y(x)$ равномерно на интервале (a, ∞). Итак, к числу $\varepsilon = m/2$ можно подобрать такой индекс N, что для $n_i > N$ будет $|y_{n_i}(x) - y(x)| < \varepsilon = m/2$. Для достаточно большого n_i будет $x_{n_i} \in (t_\varepsilon, \infty)$. Для этого числа будет одновременно иметь место

$$y(x_{n_i}) > \frac{m}{2} \quad \text{и} \quad |y(x_{n_i}) - y_{n_i}(x_{n_i})| = |y(x_{n_i})| < \frac{m}{2}\,.$$

Но это противоречие, доказывающее, что должно быть $m = 0$.

Теорема 5. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1) *и пусть оно неколебательно. Тогда существует тройка линейно независимых его решений, не имеющих нулей.*

Доказательство. Пусть $v(x)$ – решение уравнения (1) и пусть оно имеет тот же смысл, как и в доказательстве теоремы 3. Аналогично, пусть число t_1 и решение $v_1(x)$ означают то же, что и в доказательстве теоремы 3. Решение $v_1(x)$ не имеет нулей. Аналогично тому, как мы построили это решение, построим решение $v_2(x)$, удовлетворяющее условиям

$$(8) \qquad v_2(t_1) = v(t_1)\,, \quad v_2'(t_1) = v'(t_1)\,, \quad v_2''(t_1) > v''(t_1)\,, \quad v_2''(t_1) \neq v_2''(t_1)\,.$$

Решение $v_2(x)$ есть также решение без нулей. Подобное же построение применим для решения $v_3(x)$, пользуясь некоторой точкой t_2, $t_2 \in (\gamma, \infty)$, $t_2 \neq t_1$, $t_2 \neq t_0$. Мы потребуем, чтобы оно удовлетворяло условиям

$$v_3(t_2) = v(t_2)\,, \quad v_3'(t_2) = v'(t_2)\,, \quad v_3''(t_2) > v''(t_2)\,.$$

Число t_2 и последнее условие мы подберем так, чтобы

$$(9) \qquad v_3(t_1)\, v'(t_1) - v_3'(t_1)\, v(t_1) \neq 0\,.$$

Это всегда возможно. Достаточно построить сначала $v_3(x)$ и потом найти t_1 так, чтобы последнее условие выполнялось. Вычислим определитель Вронского $W(v_1, v_2, v_3)$ в точке t_1. Мы получим

$$W(v_1, v_2, v_3)\big|_{t_1} = \begin{vmatrix} v(t_1), & v(t_1), & v_3(t_1) \\ v'(t_1), & v'(t_1), & v_3'(t_1) \\ v_1''(t_1), & v_2''(t_1), & v_3''(t_1) \end{vmatrix},$$

где уже подставлены значения производных, которые в числе t_1 принимают функции $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$. После вычислений мы получим

$$W(v_1, v_2, v_3)\big|_{t_1} = (v_2''(t_1) - v_1''(t_1)) [v_3(t_1) v'(t_1) - v_3'(t_1) v(t_1)] \neq 0$$

с учетом (8) и (9). Но это значит, что решения $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$ линейно независимы. Все они без нулей.

Замечание 4. Теорему 5 можно истолковать и так: Если уравнение (1) имеет свойство (V_1) и имеет лишь одно решение без нулей, то это уравнение колебательно.

Замечание 5. Если уравнение (1) имеет свойство (V_1) и если оно колебательно, то оно может иметь и более одного решения без нулей. Напр., уравнение

$$(1 - e^{-x} + 2e^{-2x}) u''' - (e^{-x} - 4e^{-2x}) u'' + (1 + 2e^{-x} + 4e^{-2x}) u' = 0$$

для $x \in (0, \infty)$ имеет свойство (V_1) и является колебательным: его решения суть, напр., 1, $(1 - e^{-x}) \cos x$, $(1 - e^{-x}) \sin x$, а решения без нулей имеют, напр., вид

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 2 + (1 - e^{-x}) \cos x\,, \quad v_3 = 2 + (1 - e^{-x}) \sin x\,.$$

Однако, напр., уравнение $y''' + y = 0$ колебательно и имеет лишь одно решение без нулей, а именно $y = e^{-x}$.

Литература

[1] *M. Hanan:* Oscillation criteria for third-order linear differential equations. Pac. J. Math. *11* (1961), 919–944.

[2] *G. Mammana:* Decomposizione delle espressioni diferenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari. Math. Z. *33* (1931), 186–231.

Summary

SOME REMARKS ON THE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER

MARKO ŠVEC, Bratislava

Let (1) $L_3 y = 0$ be a linear differential equation of the third order, which has continuous coefficients in the interval (a, ∞), $-\infty \leqq a$. Let the leading coefficient be 1. We say that equation (1) has the property (V_1) if each of its solutions with a double zero in any point x_0, has no zero in (a, x_0). We say that (1) has the property

(V_2) if each of its solutions with a double zero in any point x_0, has no zero in (x_0, ∞). In this paper there are studied the effects of these properties on the existence of a solution without zeros. It is proved:

Theorem 1. *Equation* (1) *has properties* (V_1) *and* (V_2) *if and only if each of its solutions has at most two zeros (or one zero which is double).*

It follows from Mammana's theorem [2], p. 214, that the properties (V_1) and (V_2) constitute necessary and sufficient conditions for a decomposition of the operator L_3 into the product of three real linear operators of the first order.

Theorem 2. *Let equation* (1) *have property* (V_1). *Then*

a) *A necessary and sufficient condition that the equation* (1) *be non-oscillatory is that there exist a solution which has only one zero and that is double.*

b) *A necessary and sufficient condition that the equation* (1) *be non-oscillatory is that there exist a number* $\gamma \in (a, \infty)$ *such that every solution of* (1) *has at most two zeros (or one double zero) in the interval* (γ, ∞)).

Theorem 3. *If equation* (1) *has property* (V_1), *then there exists a solution without zeros.*

Theorem 5. *If equation* (1) *has property* (V_1) *and if it is non-oscillatory, then there exist three linearly independent solutions of* (1) *without zeros.*

In case equation (1) has property (V_1) and is oscillatory, there can exist one or more linearly independent solutions of (1) without zeros.