Alois Švec

Au sujet de la définition des variétés de König

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 2, 222–234

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100614

AU SUJET DE LA DÉFINITION DES VARIÉTÉS DE KÖNIG

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 21 mars 1962)

Dans cet article, on montre la connexion qui existe entre la définition des espaces de König, donnée dans [3] et la définition de la connexion dans les espaces fibrés.

1. LE GROUPE AFFINE

1.1. Soit G un groupe de Lie. J'appellerai *translation gauche* une transformation $L_a : G \to G$ pour laquelle $L_a(x) = ax$, $a \in G$. Un champ vectoriel X sur G sera dit *invariant à gauche* si $L'_aX = X$ pour tout $a \in G$. Soit e l'élément neutre du groupe G, soit T_e l'espace tangent au groupe G au point e. Etant donné un vecteur $A \in T_e$, le champ vectoriel X pour lequel $X_a = L'_aA$ est invariant à gauche. Soient $A, B \in T_e$, et X, L les champs vectoriels invariants à gauche correspondants; écrivons $[A, B] = [X, Y]_e$. Par cette définition du produit, T_e devient une *algèbre de Lie* du groupe G, nous la désignerons par $\mathfrak{G}$.

Tout automorphisme du groupe de Lie $\varphi : G \to G$ induit un automorphisme $\varphi' : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ de l'algèbre de Lie. Si φ est un automorphisme interne tel que $\varphi(x) = axa^{-1}$, nous écrivons $\varphi = \operatorname{adj}(a)$ et appelons *représentation adjointe* la transformation $a \to \operatorname{adj}(a)$.

1.2. Conformément à [2], nous introduisons la notion de *projection invariante*. Soient donnés deux groupes de Lie G et G' et un monomorphisme $h : G' \to G$ (c'est-à-dire un homomorphisme h pour lequel $h^{-1}(e) = e' \in G'$) qui induit un homomorphisme $\mathfrak{h} : \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$. Une transformation linéaire $\mathscr{P} : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$ sera appelée *projection invariante*, lorsque

(1) $\mathscr{P}(\mathfrak{h}(A')) = A'$ pour $A' \in \mathfrak{G}'$,

(2) le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G} \arrow[r, "\operatorname{adj}(h(G'))"] \arrow[d, "\mathscr{P}"'] & \mathfrak{G} \arrow[d, "\mathscr{P}"] \\ \mathfrak{G}' \arrow[r, "\operatorname{adj}(G')"'] & \mathfrak{G}' \end{tikzcd}$$

est commutatif.

S'il existe une projection invariante, alors l'ensemble des $A \in \mathfrak{G}$ pour lesquels $\mathscr{P}(A) = 0 \in \mathfrak{G}'$, forme un sousespace linéaire $\mathfrak{M}$ invariant par toutes les transformations $\operatorname{adj}(h(g')) : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, $g' \in G'$; de plus, $\mathfrak{G} = \mathfrak{h}(\mathfrak{G}') + \mathfrak{M}$ est une décomposition de l'espace $\mathfrak{G}$ en une somme directe. Ayons maintenant, par contre, une somme directe $\mathfrak{G} = \mathfrak{h}(\mathfrak{G}') + \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est invariant par les transformations $\operatorname{adj}(h(g'))$, $g' \in G'$. Désignons par $\mathscr{P}^* : \mathfrak{G} \to \mathfrak{h}(\mathfrak{G}')$ la transformation $\mathscr{P}^*(A, B) = A$, $A \in \mathfrak{h}(\mathfrak{G}')$, $B \in \mathfrak{M}$; la transformation $\mathscr{P} = \mathfrak{h}^{-1}\mathscr{P}^* : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$ sera alors une projection invariante.

1.3. J'appelle *groupe affine* (réel, à n dimensions) le groupe $G^n = G\,A(n, R)$ aux éléments $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}\}$, où $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ et $\boldsymbol{a} = (a_i)$ sont des matrices réelles du type $(n \times n)$ et $(n \times 1)$ resp., avec $\det \boldsymbol{A} \neq 0$; l'opération du groupe étant donnée par la formule

$$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}\} . \{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{Ab} + \boldsymbol{a}\} .$$

Désignons par Δ la matrice du type $(n \times n)$ aux éléments δ_{ij} ($= 1$ pour $i = j$ et $= 0$ pour $i \neq j$), et $\boldsymbol{N}$, ou $\boldsymbol{n}$, la matrice du type $(n \times n)$, ou $(n \times 1)$ resp., dont les éléments sont tous nuls. L'élément neutre du groupe G^n sera alors $e = \{\Delta, \boldsymbol{n}\}$.

Dans le groupe G^n, considérons les sousgroupes suivants:

(a) $G^0(\boldsymbol{z})$ est l'ensemble des éléments $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{Az}\}$ où z est une matrice donnée, fixe; $G^0(\boldsymbol{z})$ sera appelé *groupe des affinités qui laissent invariant le point z*;

(b) $G^0 = G^0(\boldsymbol{n})$, appelé *groupe linéaire*;

(c) T est l'ensemble des éléments $\{\Delta, \boldsymbol{a}\}$, appelé *groupe des translations*;

(d) G^p est l'ensemble des éléments de la forme

$$\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{(p,p)} & \boldsymbol{A}'_{(p,n-p)} \\ \boldsymbol{N}_{(n-p,p)} & \boldsymbol{A}''_{(n-p,n-p)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{(p)} \\ \boldsymbol{n}_{(n-p)} \end{pmatrix}\right\}$$

où les indices indiquent le type de la matrice. G^p est le groupe des affinités qui laissent invariant un sousespace à p dimensions.

1.4. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions différentiables sur le groupe G^n, alors le $\mathscr{F}$-module des champs vectoriels différentiables sur G^n a pour base les champs vectoriels $\partial/\partial X_{ij}$, $\partial/\partial x_i$. Soient

$$M = m_{ij} \frac{\partial}{\partial X_{ij}} + m_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad N = n_{ij} \frac{\partial}{\partial X_{ij}} + n_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

deux champs vectoriels sur G^n, alors

$$[M, N] = \left(m_{ij} \frac{\partial n_{kl}}{\partial X_{ij}} - n_{ij} \frac{\partial m_{kl}}{\partial X_{ij}} + m_i \frac{\partial n_{kl}}{\partial x_i} - n_i \frac{\partial m_{kl}}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial X_{kl}} +$$

$$+ \left(m_{ij} \frac{\partial n_k}{\partial X_{ij}} - n_{ij} \frac{\partial m_k}{\partial X_{ij}} + m_i \frac{\partial n_k}{\partial x_i} - n_i \frac{\partial m_k}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} .$$

1.5. La transformation gauche générale sur G^n est donnée par la relation

$$L_{\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{a}\}}\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{AX}, \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{a}\} .$$

Désignons par

$$L_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial X_{ij}}\right)_e , \quad L_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_e$$

la base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}^n$. Nous avons maintenant la proposition:

Le champ vectoriel

$$(R_{ij})_{\{\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}\}} = X_{ri}\left(\frac{\partial}{\partial X_{rj}}\right)_{\{\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}\}} , \quad (R_i)_{\{\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}\}} = X_{ri}\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\right)_{\{\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}\}}$$

est invariant à gauche et $(R_{ij})_e = L_{ij}$, $(R_i)_e = L_i$.

La démonstration peut se faire à l'aide du lemme suivant: Soit $\varphi : U \to V$ une application différentiable d'une variété U dans une autre variété V. Supposons que, au voisinage d'un point $p \in U$, nous ayons les coordonnées (u^ϱ) et au voisinage du point $\varphi(p)$ les coordonnées (v^α); φ soit donnée par les équations $v^\alpha = v^\alpha(u^\varrho)$. Alors

$$\varphi'\left(\frac{\partial}{\partial u^\varrho}\right)_p = \left(\frac{\partial v^\alpha(u^\varrho)}{\partial u^\varrho}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\right)_{\varphi(p)} .$$

On a, bien entendu,

$$[R_{ij}, R_{kl}] = (\delta_{lr}\delta_{jk}X_{si} - \delta_{jr}\delta_{il}X_{sk}) \frac{\partial}{\partial X_{sr}} ,$$

$$[R_{ij}, R_k] = \delta_{jk}X_{si}\frac{\partial}{\partial x_s} , \quad [R_i, R_j] = 0 ,$$

donc

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \delta_{jk}L_{il} - \delta_{il}L_{kj} , \quad [L_{ij}, L_k] = \delta_{jk}L_i , \quad [L_i, L_j] = 0 .$$

On démontre aisément que: *La base de la sousalgèbre de Lie*

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } \mathfrak{G}^0(\boldsymbol{z}) \\ \text{(b) } \mathfrak{G}^0 \\ \text{(c) } \mathfrak{T} \\ \text{(d) } \mathfrak{G}^p \end{array}\right\} \textit{est formée par les vecteurs} \left\{\begin{array}{l} L_{ij} - z_j L_i , \\ L_{ij} , \\ L_i , \\ L_{AB}, L_{AM}, L_{MN}, L_A \end{array}\right.$$

où $A, B = 1, \ldots, p$; $M, N = p + 1, \ldots, n$.

1.6. Considérons l'automorphisme interne

$$\varphi\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}\} . \{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}\} . \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}\}^{-1} = \{\boldsymbol{AXA}^{-1}, \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{AXA}^{-1}\boldsymbol{a}\} .$$

Alors

$$\varphi' \frac{\partial}{\partial X_{ij}} = A_{ri}\tilde{A}_{js} \frac{\partial}{\partial X_{rs}} - A_{ri}\tilde{A}_{jt}a_t \frac{\partial}{\partial x_r}, \quad \varphi' \frac{\partial}{\partial x_i} = A_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

donc

$$\operatorname{adj}(\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}\})(L_{ij}) = A_{ri}\tilde{A}_{js}L_{rs} - A_{ri}\tilde{A}_{jt}a_tL_r,$$
$$\operatorname{adj}(\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}\})(L_i) = A_{ri}L_r,$$

où la matrice $(\tilde{A}_{ij})$ est inverse de (A_{ij}).

1.7. *A l'injection* $i : G^0(\boldsymbol{x}_0) \to G^n$, *il existe une seule projection invariante* $\mathscr{P}(\boldsymbol{x}_0) : \mathfrak{G}^n \to \mathfrak{G}(\boldsymbol{x}_0)$, *et l'on a*

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{x}_0)\, L_{ij} = L_{ij} - x_{0,j}L_i\,, \quad \mathscr{P}(\boldsymbol{x}_0)\, L_i = 0\,.$$

Démonstration. a) Nous allons montrer que l'opérateur donné représente une projection invariante. Le sousespace maximal $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}^n$ pour lequel $\mathscr{P}(\boldsymbol{x}_0)\,\mathfrak{M} = 0 \in \mathfrak{G}^n(\boldsymbol{x}_0)$ a évidemment la base $L_1, \ldots, L_n$, et l'on a donc $\mathfrak{M} = \mathfrak{T}$. En effet, nous avons $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G}^0(\boldsymbol{x}_0) + \mathfrak{T}$. Il s'ensuit alors facilement des résultats du paragraphe précédent que $\mathfrak{T}$ est invariant par toutes les transformations $\operatorname{adj}(g')$, $g' \in G^0(\boldsymbol{x}_0)$.

b) En démontrant l'unicité, nous allons nous borner au cas où $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{n}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}^0$ est formée par les vecteurs L_{ij}, la base de l'espace $\mathfrak{M}$ soit formée par les vecteurs $K_k = t_{kij}L_{ij} + L_k$. Soit $g' = \{2\Delta, \boldsymbol{n}\} \in G^0$. Il résulte alors de $g'^{-1} = \{\frac{1}{2}\Delta, \boldsymbol{n}\}$ que nous avons $\operatorname{adj}(g')\, K_k = t_{kij}L_{ij} + 2L_k =$ une combinaison linéaire des vecteurs K_i, donc $t_{kij} = 0$ et $\mathfrak{M} = \mathfrak{T}$.

1.8. *A l'injection* $t : T \to G^n$, *il n'existe pas de projection invariante* $\mathscr{P}^t : \mathfrak{G}^n \to \mathfrak{T}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une décomposition directe $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{T} + \mathfrak{M}$, l'espace $\mathfrak{M}$ étant invariant par les transformations $\operatorname{adj}(\tau)$, $\tau \in T$. La base de l'espace $\mathfrak{M}$ soit formée par les vecteurs $K_{ij} = L_{ij} + \lambda_{ijk}L_k$. Soit $\tau = \{\Delta, \mathbf{t}\}$, alors

$$\operatorname{adj}(\tau)\, K_{ij} = L_{ij} + (\lambda_{ijk} - \delta_{ik}t_j)\, L_k\,.$$

Il faut donc que $\operatorname{adj}(\tau)\, K_{ij} - K_{ij} = -\,\delta_{ik}t_jL_k$ soit une combinaison linéaire des vecteurs K_{ij} pour tous $t_1, \ldots, t_n$, ce qui est impossible.

1.9. *Pour* $p > 0$, *il n'existe pas de projection invariante* $\mathscr{P}^p : \mathfrak{G}^n \to \mathfrak{G}^p$ *correspondant à l'injection* $h^p : G^p \to G^n$.

Démonstration. S'il existe une telle projection invariante, nous avons la somme directe $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G}^p + \mathfrak{M}^p$, l'espace $\mathfrak{M}^p$ étant invariant par les transformations $\operatorname{adj}(g)$, $g \in G^p$. Pour la base de l'espace $\mathfrak{M}^p$ prenons les vecteurs

$$K_{MA} = L_{MA} + \lambda_{MABC}L_{BC} + \lambda'_{MABN}L_{BN} + \lambda''_{MANO}L_{NO} + \lambda'''_{MAB}L_B\,,$$
$$K_M = L_M + \mu_{MAB}L_{AB} + \mu'_{MAN}L_{AN} + \mu''_{MNO}L_{NO} + \mu'''_{MA}L_A\,.$$

Soit $g = \{\boldsymbol{G}, \boldsymbol{n}\} \in G^p$, et soit $\boldsymbol{G}$ une matrice du type

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \Delta_{(p,p)} & \boldsymbol{H}_{(p,n-p)} \\ \boldsymbol{N}_{(n-p,p)} & \Delta'_{(n-p,n-p)} \end{pmatrix}.$$

A chaque vecteur $L = l_{ij}L_{ij} + l_i L_i$ nous pouvons associer le couple de matrices $\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{l} \rangle$, où $\boldsymbol{L} = (l_{ij})$, $\boldsymbol{l} = (l_i)$; nous avons alors évidemment

$$\operatorname{adj}(\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}\})\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{l} \rangle = \langle \boldsymbol{ALA}^{-1}, \boldsymbol{Al} - \boldsymbol{ALA}^{-1}\boldsymbol{a} \rangle .$$

Au vecteur K_{MA} est ainsi associée le couple

$$\mathscr{K}_{MA} = \left\langle \begin{pmatrix} \Lambda_{MA} & \Lambda'_{MA} \\ \Psi_{MA} & \Lambda''_{MA} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda'''_{MA} \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix} \right\rangle$$

où Ψ_{MA} est la matrice du type $(n - p \times p)$ ayant tous ses éléments nuls à l'exception de l'élément (égal à 1) de la $M^{\text{ème}}$ ligne et de la $A^{\text{ème}}$ colonne. A présent

$$\operatorname{adj}(\{\boldsymbol{G}, \boldsymbol{n}\})\mathscr{K}_{MA} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \Lambda_{MA} + \boldsymbol{H}\Psi_{MA}, & -\Lambda_{MA}\boldsymbol{H} + \Lambda'_{MA} - \boldsymbol{H}\Psi_{MA}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}\Lambda''_{MA} \\ \Psi_{MA}, & -\Psi_{MA}\boldsymbol{H} + \Lambda''_{MA} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda'''_{MA} \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Ce qui est essentiel, c'est que $\mathscr{K}_{MA} - \operatorname{adj}(\{\boldsymbol{G}, \boldsymbol{n}\})\mathscr{K}_{MA} \in \boldsymbol{G}^p$. Or, d'après nos suppositions, nous avons

$$\mathscr{K}_{MA} \in \mathfrak{M}^p, \quad \operatorname{adj}(\{\boldsymbol{G}, \boldsymbol{n}\})\mathscr{K}_{MA} \in \mathfrak{M}^p ;$$
$$\mathscr{K}_{MA} - \operatorname{adj}(\{\boldsymbol{G}, \boldsymbol{n}\})\mathscr{K}_{MA} = 0 \in \boldsymbol{G}^n$$

pour toutes les matrices $\boldsymbol{H}$, ce qui est impossible, car je peux choisir la matrice $\boldsymbol{H}$ de façon à avoir $\boldsymbol{H}\Psi_{MA} \neq \boldsymbol{N}_{(p,p)}$.

2. LES ESPACES DE KÖNIG

2.1. J'appellerai *variétés de König* les variétés $P_n^r = U_r \times G^n$, où U_r est un domaine de l'espace R_r; soient (u^α) les coordonnées dans U_r. La variété P_n^r est un espace fibré principal avec la base U_r, le groupe structurel G^n, la translation droite est la transformation $R_g : P_n^r \to P_n^r$ donnée par la formule

$$R_{\{\boldsymbol{G},\boldsymbol{g}\}}(u;\, Y, y) = (u; \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{g}) .$$

Sur P_n^r, nous avons la base du module de champs vectoriels $\partial/\partial u^\alpha$, $\partial/\partial Y_{ij}$ $\partial/\partial y_i$; la base du module des champs vectoriels verticaux est $\partial/\partial Y_{ij}$, $\partial/\partial y_i$.

Soit $p = (u_0; \boldsymbol{P}, \boldsymbol{p}) \in P_n^r$ un point fixe et considérons l'application $h_p : P_n^r \to G^n$ pour laquelle

$$h_p(u; \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{PY}^{-1}, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{PY}^{-1}\boldsymbol{y}\}$$

et, évidemment, $h_p(p) = e$. Un calcul direct donne

$$h'_p\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p = -\tilde{P}_{js}L_{is} + \tilde{P}_{js}p_s L_i\,, \quad h'_p\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = -L_i\,,$$

$$R'_{\{\mathbf{G},\mathbf{g}\}}\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_{R_g(p)}, \quad R'_{\{\mathbf{G},\mathbf{g}\}}\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p = \tilde{G}_{ki}\left(\frac{\partial}{\partial Y_{kj}}\right)_{R_g(p)},$$

$$R'_{\{\mathbf{G},g\}}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = \tilde{G}_{ji}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{R_g(p)}.$$

2.2. La connexion sur P^r_n est donnée par une 1-forme différentiable ω sur P^r_n à valeurs dans $\mathfrak{G}$, et pour laquelle

(1) $\omega(V_p) = h'_p(V_p)$ pour tout vecteur vertical,
(2) $\omega(R'_g\tau) = \operatorname{adj}(g^{-1})\,\omega(\tau)$ pour tout vecteur τ sur P^r_n et tout $g \in G^n$.

En vertu de (1) nous avons

$$(*) \qquad \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_p = \gamma_{\alpha ij}(p)\,L_{ij} + \gamma_{\alpha i}(p)\,L_i\,,$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p = -\tilde{P}_{js}L_{is} + \tilde{P}_{js}p_sL_i\,, \quad \omega\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = -L_i\,.$$

Ensuite, on a

$$\omega\left(R'_g\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_p\right) = \gamma_{\alpha ij}(R_g(p))\,L_{ij} + \gamma_{\alpha i}(R_g(p))\,L_i\,,$$

$$\omega\left(R'_g\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p\right) = -\tilde{G}_{ki}G_{ts}\tilde{P}_{jt}L_{ks} + \tilde{G}_{ki}\tilde{P}_{jt}(p_t - g_t)\,L_k\,,$$

$$\omega\left(R'_g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p\right) = -\tilde{G}_{ji}L_i\,,$$

$$\operatorname{adj}(g^{-1})\,L_{ij} = \tilde{G}_{ri}G_{js}L_{rs} + \tilde{G}_{ri}g_jL_r\,,$$

$$\operatorname{adj}(g^{-1})\,L_i = \tilde{G}_{ri}L_r\,,$$

$$\operatorname{adj}(g^{-1})\,\omega\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_p = \gamma_{\alpha ij}(p)\,\tilde{G}_{ri}G_{js}L_{rs} + (\gamma_{\alpha ij}(p)\,\tilde{G}_{ri}g_j + \gamma_{\alpha i}(p)\,\tilde{G}_{ri})\,L_r\,,$$

$$\operatorname{adj}(g^{-1})\,\omega\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p = -\tilde{G}_{ri}G_{st}\tilde{P}_{js}L_{rt} + \tilde{P}_{js}\tilde{G}_{ri}(p_s - g_s)\,L_r\,,$$

$$\operatorname{adj}(g^{-1})\,\omega\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = -G_{ri}L_r$$

de sorte que *la connexion générale est donnée par la forme* (*) *où* $\gamma_{\alpha ij}(p)$, $\gamma_{\alpha i}(p)$ *sont des fonctions différentiables sur* P_n^r *et*

$$\gamma_{\alpha ij}(R_g(p)) = G_{sj}\tilde{G}_{ir}\,\gamma_{\alpha rs}(p)\,,$$
$$\gamma_{\alpha i}(R_g(p)) = \tilde{G}_{ir}g_s\,\gamma_{\alpha rs}(p) + \tilde{G}_{ir}\,\gamma_{\alpha r}(p)\,.$$

2.3. Soit donnée une section $\varrho : U_r \to P_n^r$ par les équations $Y_{ij} = P_{ij}(u)$, $y_i = p_i(u)$. Alors

$$\varrho'\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_{(u)} = \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_p + \left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial u^\alpha}\right)_{(u)}\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p + \left(\frac{\partial p_i}{\partial u^\alpha}\right)_{(u)}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$$

où

$$p = (u; \mathbf{Y}, \mathbf{y})\,, \quad \mathbf{Y} = (Y_{ij}(u))\,, \quad \mathbf{y} = (y_i(u))\,.$$

J'appellerai alors *forme locale* ω_ϱ de la connexion considérée la 1-forme sur U_r à valeurs dans $\mathfrak{G}$, pour laquelle $\omega_\varrho(V) = \omega(\varrho' V)$ pour tout vecteur V sur U_r. On a donc

$$\omega_\varrho\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) = \Gamma^{(\varrho)}_{\alpha ij}(u)\,L_{ij} + \Gamma^{(\varrho)}_{\alpha i}(u)\,L_i$$

où

$$\Gamma^{(\varrho)}_{\alpha ij} = \gamma_{\alpha ij}(u; P_{ij}(u), p_i(u)) - \tilde{P}_{kj}(u)\frac{\partial P_{ik}}{\partial u^\alpha}\,,$$
$$\Gamma^{(\varrho)}_{\alpha i}(u) = \gamma_{\alpha i}(u; P_{ij}(u), p_i(u)) + \tilde{P}_{js}(u)\,p_s(u)\frac{\partial P_{ij}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial p_i}{\partial u^\alpha}\,.$$

Soit donnée une autre section $\sigma : U_r \to P_n^r$ par les équations $Y_{ij} = \tilde{G}_{ik}(u)\,P_{kj}(u)$, $y_i = \tilde{G}_{ij}(u)\,p_j(u) - \tilde{G}_{ij}(u)\,g_j(u)$ de sorte que

$$R_{\{G_{ij}(u), g_i(u)\}}(\varrho(u)) = \sigma(u)\,;$$

sa forme locale soit

$$\omega_\sigma\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) = \Gamma^{(\sigma)}_{\alpha ij}(u)\,L_{ij} + \Gamma^{(\sigma)}_{\alpha i}(u)\,L_i\,.$$

Alors évidemment

(a) $$\Gamma^{(\sigma)}_{\alpha ij} = G_{sj}\tilde{G}_{ir}\Gamma^{(\varrho)}_{\alpha rs} - G_{rj}\frac{\partial \tilde{G}_{ir}}{\partial u^\alpha}\,,$$

(b) $$\Gamma^{(\sigma)}_{\alpha i} = \tilde{G}_{ir}g_s\Gamma^{(\varrho)}_{\alpha rs} + \tilde{G}_{ir}\Gamma^{(\varrho)}_{\alpha r} + \tilde{G}_{ij}\frac{\partial g_j}{\partial u^\alpha}\,.$$

Si j'introduis les grandeurs $\varrho_i = -\tilde{G}_{ij}g_j$, l'équation (b) prend la forme

(b′) $$\Gamma^{(\sigma)}_{\alpha i} = \tilde{G}_{ir}\Gamma^{(\varrho)}_{\alpha r} - \varrho_k G_{sk}\tilde{G}_{ir}\Gamma^{(\varrho)}_{\alpha rs} - \frac{\partial \varrho_i}{\partial u^\alpha} + \varrho_k G_{ij}\frac{\partial \tilde{G}_{jk}}{\partial u^\alpha}\,;$$

les équations (a), (b′) sont alors les équations (12), (13) de [3].

2.4. La base du sousespace des vecteurs horizontaux au point $p = (u; \mathbf{P}, \mathbf{p}) \in P_n^r$ est formée par les vecteurs

$$K_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_p + P_{kj}\,\gamma_{\alpha ik}(p)\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p + (\gamma_{\alpha i}(p) + p_k\,\gamma_{\alpha ik}(p))\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p .$$

La partie horizontale, ou resp. verticale, est donc donnée par les relations

$$\mathscr{H}\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_p = (K_\alpha)_p ,$$

$$\mathscr{V}\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_p = -\,P_{kj}\,\gamma_{\alpha ik}(p)\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p - (\gamma_{\alpha i}(p) + p_k\,\gamma_{\alpha ik}(p))\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p ,$$

$$\mathscr{H}\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p = 0 , \quad \mathscr{V}\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p ,$$

$$\mathscr{H}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = 0 , \quad \mathscr{V}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p .$$

2.5. Soit M un espace vectoriel ayant la base ε_A et soit donnée sur U_r une fonction $\varphi(u)$ à valeurs dans M, donc $\varphi(u) = \varphi_A(u)\,\varepsilon_A$, où $\varphi_A(u)$ sont des fonctions réelles sur U_r. Soit donné ensuite sur U_r un champ vectoriel $V = V_\alpha \,.\, \partial/\partial u^\alpha$, nous définissons alors

$$V\varphi(u) = V_\alpha \frac{\partial \varphi_A(u)}{\partial u^\alpha} \,.\, \varepsilon_A .$$

Etant donné une q-forme différentielle extérieure $\Phi = \Phi(V_1, \ldots, V_q)$ sur U_r à valeurs dans M, alors sa différentielle extérieure est la $(q + 1)$-forme $\mathrm{d}\Phi$ définie par l'équation

$$\mathrm{d}\Phi(V_0, V_1, \ldots, V_q) = \sum_i (-1)^i\, V_i\, \Phi(V_0, \ldots, \hat{V}_i, \ldots, V_q) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\, \Phi([V_i, V_j], V_0, \ldots, \hat{V}_i, \ldots, \hat{V}_j, \ldots, V_q)$$

où l'on a omis les termes marqués de $\hat{}$.

Si, en particulier, $\Phi = \omega$, nous obtenons

$$\mathrm{d}\omega(V_0, V_1) = V_0\, \omega(V_1) - V_1\, \omega(V_0) - \omega([V_0, V_1]) .$$

Il en résulte pour $p = (u; \mathbf{P}, \mathbf{p})$

$$\mathrm{d}\omega\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right)_p = \left(\frac{\partial \gamma_{\beta ij}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha ij}}{\partial u^\beta}\right)_p L_{ij} + \left(\frac{\partial \gamma_{\beta i}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha i}}{\partial u^\beta}\right)_p L_i ,$$

$$\mathrm{d}\omega\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p = -\left(\frac{\partial \gamma_{\alpha rs}}{\partial Y_{ij}}\right)_p L_{rs} - \left(\frac{\partial \gamma_{\alpha r}}{\partial Y_{ij}}\right)_p L_r ,$$

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = -\left(\frac{\partial \gamma_{\alpha rs}}{\partial y_i}\right)_p L_{rs} - \left(\frac{\partial \gamma_{\alpha r}}{\partial y_i}\right)_p L_r,$$

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}, \frac{\partial}{\partial Y_{kl}}\right)_p = (\delta_{kr}\tilde{P}_{js}\tilde{P}_{li} - \delta_{ir}\tilde{P}_{ls}\tilde{P}_{jk}) L_{rs} + \\ + (\delta_{ir}\tilde{P}_{ls}\tilde{P}_{jk}p_s - \delta_{kr}\tilde{P}_{js}\tilde{P}_{li}p_s) L_r,$$

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p = -\delta_{ir}\tilde{P}_{jk}L_r, \quad d\omega\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p = 0.$$

Nous définissons la *forme de courbure* de la connexion ω donnée comme la forme

$$\Omega(V_0, V_1) \equiv (D\omega)(V_0, V_1) = d\omega(\mathscr{H}V_0, \mathscr{H}V_1).$$

Il suffit évidemment de déterminer

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right)_p = R_{\alpha\beta ij}(p) L_{ij} + R_{\alpha\beta i}(p) L_i$$

où

$$R_{\alpha\beta ij}(p) = \frac{\partial\gamma_{\beta ij}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial\gamma_{\alpha ij}}{\partial u^\beta} + (\gamma_{\alpha r} + p_s\gamma_{\alpha rs})\frac{\partial\gamma_{\beta ij}}{\partial y_r} - (\gamma_{\beta r} + p_s\gamma_{\beta rs})\frac{\partial\gamma_{\alpha ij}}{\partial y_r} + \\ + P_{ts}\gamma_{\alpha rt}\frac{\partial\gamma_{\beta ij}}{\partial Y_{rs}} - P_{ts}\gamma_{\beta rt}\frac{\partial\gamma_{\alpha ij}}{\partial Y_{rs}} + \gamma_{\alpha rj}\gamma_{\beta ir} - \gamma_{\beta rj}\gamma_{\alpha ir},$$

$$R_{\alpha\beta i}(p) = \frac{\partial\gamma_{\beta i}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial\gamma_{\alpha i}}{\partial u^\beta} + P_{ts}\gamma_{\alpha rt}\frac{\partial\gamma_{\beta i}}{\partial Y_{rs}} - P_{ts}\gamma_{\beta rt}\frac{\partial\gamma_{\alpha i}}{\partial Y_{rs}} + (\gamma_{\alpha r} + p_s\gamma_{\alpha rs})\frac{\partial\gamma_{\beta i}}{\partial y_r} - \\ - (\gamma_{\beta r} + p_s\gamma_{\beta rs})\frac{\partial\gamma_{\alpha i}}{\partial\gamma_r} + \gamma_{\alpha r}\gamma_{\beta ir} - \gamma_{\beta r}\gamma_{\alpha ir}$$

car

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right) = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}, \frac{\partial}{\partial Y_{kl}}\right) = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) = \\ = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = 0.$$

2.6. Nous obtenons d'une façon évidente

$$R_{\alpha\beta ij}(R_g(p)) = G_{sj}\tilde{G}_{ir} R_{\alpha\beta rs}(p),$$
$$R_{\alpha\beta i}(R_g(p)) = \tilde{G}_{ir} R_{\alpha\beta r}(p) + \tilde{G}_{ir}g_s R_{\alpha\beta rs}(p).$$

Soit donnée sur P_n^r une q-forme Φ à valeurs dans l'espace vectoriel M et soit $\mathscr{R}_M(G)$ la représentation linéaire du groupe G sur l'espace M. Nous disons que Φ est une *q-forme tensorielle du type $\mathscr{R}_M(G)$* lorsque

(1) $\Phi(V_1, \ldots, V_q) = 0$ si un au moins des vecteurs Y_i est vertical,

(2) $\Phi(R'_g V_1, \ldots, R'_g V_q) = \mathscr{R}_M(g^{-1})\, \Phi(V_1, \ldots, V_q)$.

Un calcul direct nous conduit alors à affirmer (ce qui est d'ailleurs bien connu dans la théorie générale) que *la forme Ω est une2-forme tensorielle du type* adj (G^n).

2.8. Soit donné un groupe de Lie G et son sousgroupe de Lie G'; considérons ensuite l'espace vectoriel $H = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ et une représentation linéaire $\mathscr{R}$ du groupe G' dans l'espace $\mathfrak{G}$. Nous disons qu'il est possible de *réduire la représentation* $\mathscr{R}(G')$ à H si l'on a $\mathscr{R}(g')\, V \in \mathfrak{G}'$ pour tout vecteur $V \in \mathfrak{G}'$ et tout $g' \in G'$. Choisissons dans $\mathfrak{G}$ une base ε_A, ε_M $(A = 1, \ldots, z_1;\ M = z_1 + 1, \ldots, z_2)$ de telle façon que ε_A soit une base de l'espace $\mathfrak{G}'$ et que

$$\mathscr{R}(g')\, \varepsilon_A = A_{AB}(g')\, \varepsilon_B + B_{AM}(g')\, \varepsilon_M\,, \quad \mathscr{R}(g')\, \varepsilon_M = C_{MA}(g')\, \varepsilon_A + D_{MN}(g')\, \varepsilon_N\,.$$

La représentation $\mathscr{R}$ sera alors réductible à H si et seulement si $B_{AM}(g') = 0$ pour tout $g' \in G'$.

Soit $\mathscr{R}$ réductible à H et soit φ_M la classe de H qui contient l'élément ε_M. Les éléments φ_M forment alors une base de l'espace H et $\mathscr{R}'(g')\, \varphi_M = D_{MN}(g')\, \varphi_N$ est une représentation linéaire du groupe G' sur l'espace H, nous la désignons par $\mathscr{R}(G')/G'$.

Soit maintenant $G = G^n$ et $G' = G^p$ $(p \geqq 0)$; $\mathscr{R}(G')$ se compose des éléments adj (g'^{-1}). Alors: *La représentation linéaire $\mathscr{R}(G^p)$ est réductible à G^n/G^p.*

La démonstration est facile. La base de l'espace $\mathfrak{G}^p$ est formée par les vecteurs L_{AB}, L_{AM}, L_{MN}, L_A et l'on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(g^{-1})\, L_{AB} &= \tilde{G}_{CA} G_{BD} L_{CD} + \tilde{G}_{CA} G_{BM} L_{CM} + \tilde{G}_{MA} G_{BC} L_{MC} + \\
&\quad + \tilde{G}_{OA} G_{BP} L_{OP} + \tilde{G}_{CA} g_B L_C + \tilde{G}_{MA} g_B L_M\,, \\
\operatorname{adj}(g^{-1})\, L_{AM} &= \tilde{G}_{BA} G_{MC} L_{BC} + \tilde{G}_{BA} G_{MN} L_{BN} + \tilde{G}_{NA} G_{MB} L_{NB} + \\
&\quad + \tilde{G}_{NA} G_{MQ} L_{NO} + \tilde{G}_{BA} g_M L_B + \tilde{G}_{NA} g_M L_N\,, \\
\operatorname{adj}(g^{-1})\, L_{MN} &= \tilde{G}_{AM} G_{NB} L_{AB} + \tilde{G}_{AM} G_{NO} L_{AO} + \tilde{G}_{OM} G_{NA} L_{OA} + \\
&\quad + \tilde{G}_{OM} G_{NP} L_{OP} + \tilde{G}_{AM} g_N L_A + \tilde{G}_{OM} g_N L_O\,, \\
\operatorname{adj}(g^{-1})\, L_A &= \tilde{G}_{BA} L_B + \tilde{G}_{MA} L_M\,.
\end{aligned}$$

Si $g = \{G_{ij}, g_i\} \in G^p$, alors $g^{-1} = \{\tilde{G}_{ij}, -\tilde{G}_{ij} g_j\} \in G^p$, donc $\tilde{G}_{MA} = 0$, $\tilde{G}_{Mj} g_j = \tilde{G}_{MN} g_N = 0$, ce qui démontre notre affirmation.

Soit $\mathscr{L}^p : \mathfrak{G}^n \to H^p = \mathfrak{G}^n/\mathfrak{G}^p$ la transformation canonique; soit $\Lambda_{MA} = \mathscr{L}^p(L_{MA})$, $\Lambda_M = \mathscr{L}^p(L_M)$ la base de l'espace H^p.

2.9. J'appellerai *variété de König* $P^r_{p,n}$ une variété P^r_n telle que dans son groupe structurel G^n est donné un sousgroupe G^p. Sur $P^r_{p,n}$ la connexion soit donnée par une forme ω; nous définissons alors la 1-forme Θ^p sur P^r_n à valeurs dans H^p par l'équation

$$\vartheta^p(V) = \mathscr{L}^p(\omega(V)) .$$

On a donc en particulier

$$\vartheta^p\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_p = \gamma_{\alpha MA}(p)\, \Lambda_{MA} + \gamma_{\alpha M}(p)\, \Lambda_M ,$$

$$\vartheta^p\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p = -\, \delta_{iM}\tilde{P}_{jN}\Lambda_{MA} + \delta_{iM}\tilde{P}_{js}p_s\Lambda_M ,$$

$$\vartheta^p\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = -\, \delta_{iM}\Lambda_M .$$

La forme $\Theta^p(V_1, V_2) = \mathrm{d}\vartheta^p(\mathscr{H}V_1, \mathscr{H}V_2)$ sera appellée *forme de torsion* de la variété $P^r_{p,n}$. Un calcul direct donne

$$\Theta^p\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right) = \Theta^p\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \Theta^p\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}, \frac{\partial}{\partial Y_{kl}}\right) =$$
$$= \Theta^p\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) = \Theta^p\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = 0 ,$$

$$\Theta^p\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right)_p = R_{\alpha\beta MA}(p)\, \Lambda_{MA} + R_{\alpha\beta M}(p)\, \Lambda_M .$$

On a: *La 2-forme Θ^p sur $P^r_{p,n}$ à valeurs dans H^p est une forme tensorielle du type* adj $(G^p)/G^p$; voir [1].

En effet, si nous désignons par $\mathscr{R}'(g^p) : H^p \to H^p$ la transformation linéaire correspondant à l'élément $g^p \in G^p$, nous avons

$$\mathscr{R}'(g^p)\, \Lambda_{MA} = \tilde{G}_{NM}G_{AB}\Lambda_{NB} + \tilde{G}_{NM}g_A\Lambda_N , \quad \mathscr{R}'(g^p)\, \Lambda_M = \tilde{G}_{NM}\Lambda_N .$$

Ensuite, pour $p' = R_{g^p}(p)$, nous avons

$$\Theta^p\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right)_{p'} = R_{\alpha\beta MA}(R_{g^p}(p))\, \Lambda_{MA} + R_{\alpha\beta M}(R_{g^p}(p))\, \Lambda_M =$$
$$= \tilde{G}_{NM}G_{AB}R_{\alpha\beta MA}\Lambda_{NB} + (\tilde{G}_{NM}R_{\alpha\beta M} + \tilde{G}_{NM}g_A R_{\alpha\beta MA})\, \Lambda_N =$$
$$= \mathscr{R}'(g^p)\, \Theta^p\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right)_p ,$$

ce qui achève la démonstration.

2.10. Citons la proposition suivante due à M. A. Goetz [2]: Soient $P(B, G)$ et $P'(B', G')$ deux espaces fibrés principaux. Une application différentiable $f : P' \to P$

est appelée *immersion* s'il existe une application différentiable $\varphi : B' \to B$ et un monomorphisme $h : G' \to G$ tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "R_{G'}"'] & P \arrow[d, "R_{h(G')}"] \\ P' \arrow[r, "f"'] & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi'"'] & P \arrow[d, "\pi"] \\ B' \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. Sur $P(B, G)$, la connexion soit donnée par une forme ω et soit $\mathscr{P} : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$ la projection invariante correspondant au monomorphisme h. Alors la forme $\omega' = \mathscr{P}\omega f$ définie sur P' et prenant ses valeurs dans $\mathfrak{G}'$ détermine la connexion (dite *induite*) sur $P'(B', G')$.

2.11. Appliquons la considération précédente au cas où $P(B, G)$ est une variété de König P_n^r, $B' = B = U_r$, φ est la transformation identique, $G = G^p$ et h est l'injection $h^p : G^p \to G^n$; on a $P'(B', G') = U_r \times G^p$. Comme l'injection h^p admet une projection invariante seulement si $p = 0$, nous allons nous borner à ce cas-ci.

Nous avons donc $f(u; \mathbf{Y}, \mathbf{n}) = (u; \mathbf{Y}, \mathbf{n})$, $\mathscr{P}L_{ij} = L_{ij}$, $\mathscr{P}L_i = 0$, de façon que pour la forme ω' de la connexion sur P' on a

$$\omega'\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_q = \gamma_{\alpha ij}(q)\, L_{ij}\,, \quad \omega'\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_q = -\,\tilde{Q}_{js} L_{is}$$

pour $q = (u; \mathbf{Q}, \mathbf{n}) \in P'$. Si nous désignons par $\mathscr{H}'V$ et resp. $\mathscr{V}'V$ la partie horizontale et resp. verticale du vecteur V sur P' pour la connexion ω', nous avons manifestement

$$\mathscr{H}'\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_q + \gamma_{\alpha ik}(q)\, Q_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_q,$$

$$\mathscr{V}'\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_q = -\,\gamma_{\alpha ik}(q)\, Q_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_q,$$

$$\mathscr{H}'\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_q = 0\,, \quad \mathscr{V}'\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_q.$$

Ensuite, on a

$$\mathrm{d}\omega'\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right)_q = \left(\frac{\partial \gamma_{\beta ij}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha ij}}{\partial u^\beta}\right)_q L_{ij}\,, \quad \mathrm{d}\omega'\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_q = -\left(\frac{\partial \gamma_{\alpha kl}}{\partial Y_{ij}}\right)_q L_{kl}\,,$$

$$\mathrm{d}\omega'\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}, \frac{\partial}{\partial Y_{kl}}\right)_q = (\delta_{kr}\tilde{Q}_{js}\tilde{Q}_{li} - \delta_{ir}\tilde{Q}_{ls}\tilde{Q}_{jk})\, L_{rs}$$

et pour

$$\Omega'(V_0, V_1) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}\omega'(\mathscr{H}'V_0, \mathscr{H}'V_1)$$

on a

$$\Omega'\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right) = \left(\frac{\partial \gamma_{\beta ij}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha ij}}{\partial u^\beta} + Q_{ts}\gamma_{\alpha rt}\frac{\partial \gamma_{\beta ij}}{\partial Y_{rs}} - \right.$$

$$\left. - Q_{ts}\gamma_{\beta rt}\frac{\partial \gamma_{\alpha ij}}{\partial Y_{rs}} + \gamma_{\alpha kj}\gamma_{\beta ik} - \gamma_{\alpha ik}\gamma_{\beta kj}\right)_q L_{ij},$$

$$\Omega'\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_q = \Omega'\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}, \frac{\partial}{\partial Y_{kl}}\right)_q = 0.$$

La forme Ω' est une forme tensorielle sur P' à valeurs dans $\mathfrak{G}^0$, *du type* adj (G^0); elle s'appelle *forme de courbure* de la variété de König $P^r_{0,n}$.

Bibliographie

[1] *B. Cenkl*: Les variétés de König généralisées. Czech. Math. Journal, *14* (*89*), 1964, 1—21.

[2] *A. Goetz*: On induced connections. Zeszyty naukowe Akad. Górniczo-Hutniczej, Kraków; *6* (1961), No 53, 45—48.

[3] *A. Švec*: L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle. Czech. Math. Journal, *10* (*85*), 1960, 523—550.

Резюме

К ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ КЭНИГА

АЛОИС ШВЕС (Alois Švec), Прага

Дается орпеделение многообразий Кэнига, объекта кручения и тензора кривизны, см. [3], на языке теории связностей на расслоенных пространствах.