Czechoslovak Mathematical Journal

Miloš Ráb

Asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + q(x)y = 0$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 2, 203–221

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100613

Чехословацкий математический журнал, т. 14 (89) 1964, Прага

ASYMPTOTISCHE FORMELN FÜR DIE LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y'' + q(x)\,y = 0$

MILOŠ RÁB, Brno

(Eingegangen am 1961)

Es werden asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung (1) $y'' + q(x)\,y = 0$ im oszillatorischen sowie im nichtoszillatorischen Fall abgeleitet. Zur Herleitung dieser Formeln wird die Transformation der Differentialgleichung (1) auf eine andere Differentialgleichung zweiter Ordnung und die Methode der Perturbation benutzt.

1. Verabredungen. Ist m eine nichtnegative ganze Zahl, so bedeutet C_m das System aller reellen Funktionen, welche eine stetige Ableitung m-ter Ordnung in $J = \langle a, \infty)$ haben. Der Einfachheit wegen werden wir oft in verschiedenen Beziehungen wie $f(x) > 0$, $f(x) = g(x)\,h(x)$ das x auslassen und nur $f > 0$, $f = gh$ usw. schreiben. Anstatt $\int_a^b f(x)\,dx$ werden wir oft $\int_a^b f$ schreiben; das Symbol $\int_a^\infty f$ bedeutet den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f$. Ist $\omega(x) \in C_0$, $\lim_{x\to\infty} \omega(x) = 1$ und $f(x) = \omega(x)\,g(x)$, so werden wir $f \sim g$ schreiben. Der Buchstabe o bezeichnet eine stetige Funktion, die für $x \to \infty$ gegen Null strebt.

Wenn $q \in C_0$ ist, so wird die Differentialgleichung $y'' + q(x)\,y = 0$ oszillatorisch oder nichtoszillatorisch genannt, je nachdem jede nichttriviale Lösung unendlichviele oder endlichviele Nullstellen in J hat.

2. Problemstellung. Es seien zwei Differentialgleichungen

$$(1) \qquad y'' + q(x)\,y = 0 \quad \left(' = \frac{d}{dx}\right),$$

$$(2) \qquad \ddot{Y} + Q(X)\,Y = 0 \quad \left(\cdot = \frac{d}{dX}\right),$$

$q, Q \in C_0$ in J gegeben, die gleichzeitig oszillatorisch oder nichtoszillatorisch sind. Wir werden uns mit der Frage beschäftigen, ob man die Lösungen von (1) mit Hilfe der Lösungen von (2) ausdrücken kann. Es seien U, V unabhängige Lösungen von (2).

Wir werden die Existenz einer Zahl $\xi \geqq a$ und solcher Funktionen f und F beweisen, dass die Funktionen

$$f(x)\, U[F(x)]\,, \quad f(x)\, V[F(x)] \tag{3}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen von (1) für $x \geqq \xi$ bilden. Die Funktionen f und F sind Lösungen des nichtlinearen Systems

$$fF'' + 2f'F' = 0\,, \quad f'' + [q - F'^2\, Q(F)]\, f = 0\,. \tag{4}$$

Wenn wir noch mit u, v zwei beliebige unabhängige Lösungen von (1) bezeichnen, so kann man f und F mit Hilfe der Funktionen u, v, U, V folgendermassen ausdrücken:

$$F(x) = F(\xi) + \int_\xi^x P^2[F(t)]\, \varrho^{-2}(t)\, \mathrm{d}t\,, \quad f(x) = \varrho(x)\, P^{-1}[F(x)]$$

mit

$$\varrho = (Au^2 + 2Buv + Cv^2)^{\frac{1}{2}}\,, \quad P = (AU^2 + 2BUV + CV^2)^{\frac{1}{2}}\,,$$

wobei $\xi \geqq a$, A, B und C passende Konstanten bedeuten. Es erhebt sich naturgemäss die Frage, in welcher Beziehung die Funktionen (3) zur Gleichung (1) sein werden, wenn wir in (3) anstatt f und F die Funktionen φ und Φ setzen, die im gewissen Sinne approximative Lösungen von (4) sind. Die Antwort auf diese Frage ist in den Sätzen 12 und 30 enthalten. Aus ihnen kann man durch passende Wahl der Funktionen φ und Φ eine Reihe von asymptotischen Formeln für die Lösungen von (1) ableiten.

3. Satz. *Es gelte $q \in C_0$. Es seien u, v unabhängige Lösungen von (1), w ihre Wronskische Determinante. Es seien $\xi \geqq a$, A, B, C solche Konstanten, dass die Funktion $\sigma = Au^2 + 2Buv + Cv^2$ für $x \geqq \xi$ positiv ist. Wir setzen für diese x $\varrho^2 = \sigma$. Dann gilt*

$$\varrho^3\varrho'' + q\varrho^4 = (AC - B^2)\, w^2\,. \tag{5}$$

Beweis. Aus der Beziehung $\varrho^2 = Au^2 + 2Buv + Cv^2$ folgt durch Differenzieren $\varrho\varrho' = Auu' + B(u'v + uv') + Cvv'$ und $\varrho\varrho'' + \varrho'^2 = Au'^2 + 2Bu'v' + Cv'^2 + Auu'' + B(u''v + uv'') + Cvv''$. Da die Funktionen u, v die Differentialgleichung (1) erfüllen, können wir die letztere Beziehung in der Gestalt

$$\varrho\varrho'' + \varrho'^2 = Au'^2 + 2Bu'v' + Cv'^2 - q(Au^2 + 2Buv + Cv^2) =$$
$$= Au'^2 + 2Bu'v' + Cv'^2 - q\varrho^2$$

schreiben. Daraus folgt

$$\varrho\varrho'' + q\varrho^2 = Au'^2 + 2Bu'v' + Cv'^2 - \varrho'^2 =$$
$$= Au'^2 + 2Bu'v' + Cv'^2 - \varrho^{-2}[Auu' + B(u'v + uv') + Cvv']^2$$

und schliesslich

$$\varrho^3\varrho'' + q\varrho^4 = (Au^2 + 2Buv + Cv^2)(Au'^2 + 2Bu'v' + Cv'^2) -$$
$$- [Auu' + B(u'v + uv') + Cvv']^2 =$$
$$= (AC - B^2)(u^2v'^2 - 2uvu'v' + u'^2v^2) = (AC - B^2)\, w^2 .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

4. Satz. *Es gelte $q, Q \in C_0$. Es seien u, v unabhängige Lösungen von (1), w ihre Wronskische Determinante und U, V unabhängige Lösungen von (2) mit der Wronskischen Determinante W, welche die Bedingung $W = w$ erfüllt. Es seien $\xi \geqq a$, A, B und C solche Konstanten, dass die Funktionen $\sigma = Au^2 + 2Buv + Cv^2$ und $\Sigma = AU^2 + 2BUV + CV^2$ für $x \geqq \xi$ nur positive Werte annehmen. Wir setzen für diese x $\varrho^2 = \sigma$, $P^2 = \Sigma$. Dann existiert gerade eine Lösung der Differentialgleichung*

$$F' = P^2(F)\, \varrho^{-2}(x) \tag{6}$$

mit der Anfangsbedingung $F(\xi) = \xi$, die für solche x definiert ist, für welche die Beziehungen

$$0 \leqq \int_\xi^x \varrho^{-2} < \int_\xi^\infty P^{-2} \tag{7}$$

bestehen. Wir bezeichnen mit j die Gesamtheit aller diesen Zahlen x und setzen

$$f = \varrho\, P^{-1}(F) = F'^{-\frac{1}{2}} . \tag{8}$$

Dann ist j offensichtlich ein Intervall und in j bestehen die Beziehungen

$$fF'' + 2f'F' = 0 , \tag{9}$$

$$f'' + [q - Q(F)\, F'^2] f = 0 . \tag{10}$$

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung F von (6) in j ist offenbar, denn es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variabeln. In j gilt laut (8)

$$f^2F' = 1 \tag{11}$$

und daraus folgt (9). Nach (8) ist

$$f' = \varrho'\, P^{-1}(F) - \varrho\, P^{-2}(F)\, \dot{P}(F)\, F' = \varrho'\, P^{-1}(F) - \dot{P}(F)\, \varrho^{-1} .$$

Daraus ergibt sich weiter

$$f'' = \varrho''\, P^{-1}(F) - \varrho'\, P^{-2}(F)\, \dot{P}(F)\, F' - \varrho^{-1}\, \ddot{P}(F)\, F' + \varrho^{-2}\varrho'\, \dot{P}(F) =$$
$$= \varrho''\, P^{-1}(F) - \varrho^{-3}\, P^2(F)\, \ddot{P}(F) .$$

Laut Satz 3 ist aber

$$\varrho'' = - q\varrho + \varrho^{-3}(AC - B^2)\, w^2$$

und

$$\ddot{P}(F) = - Q(F)\, P(F) + P^{-3}(F)\,.\,(AC - B^2)\, W^2\,,$$

so dass

$$f'' + [q - Q(F)\, F'^2]\, f =$$
$$= \varrho''\, P^{-1}(F) - \varrho^{-3}\, P^2(F)\, \ddot{P}(F) + [q - \varrho^{-4}\, P^4(F)\, Q(F)]\, \varrho\, P^{-1}(F) =$$
$$= - q\varrho\, P^{-1}(F) + \varrho^{-3}\, P^{-1}(F)\, (AC - B^2)\, w^2 + \varrho^{-3}\, Q(F)\, P^3(F) - \varrho^{-3}\, P^{-1}(F)\,.$$
$$.\,(AC - B^2)\, W^2 + q\varrho\, P^{-1}(F) - \varrho^{-3}\, Q(F)\, P^{-3}(F) =$$
$$= \varrho^{-3}\, P^{-1}(F)\, (AC - B)^2)\, (W^2 - w^2) = 0\,,$$

denn es ist $W = w$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

5. Bemerkung. Aus der Gleichung (6) folgt, dass jede Lösung F eine wachsende Funktion in j ist, so dass ein endlicher oder unendlicher Grenzwert $\lim_{x \to \beta -} F(x) = C$ existiert, wobei β den Endpunkt des Intervalls j bezeichnet. Offensichtlich ist $C = \infty$ gerade dann, wenn $\int_\xi^\infty P^{-2} \leqq \int_\xi^\infty \varrho^{-2}$ gilt. Das ergibt sich aus der Gleichung $\int_\xi^{F(x)} P^{-2} = \int_\xi^x \varrho^{-2}$, die man aus (6) durch Integration von ξ bis x bekommt.

Aus der Ungleichung (7) ergibt sich: ist $\int_\xi^\infty P^{-2} = \infty$, so gilt $\beta = \infty$.

6. Bemerkung. Man kann die Konstanten A, B und C immer derart bestimmen, dass

$$\int_\xi^\infty P^{-2} = \infty \tag{12}$$

ist.

Beweis. Ist (2) oszillatorisch, so setzen wir $A = B = 1$, $C = 0$ (siehe z. B. [5], S. 338). Im nichtoszillatorischen Fall bezeichnen wir mit V eine Hauptlösung von (2) ([2], S. 503) und mit U eine von V unabhängige Lösung von (2). Es gibt ein $\xi \geqq a$ derart, dass die Funktionen U, V für $x \geqq \xi$ keine Nullstelle haben. Man kann also annehmen, dass sie positiv sind. Setzen wir $A = C = 0$, $B = 1$, so ist wieder (12) in Kraft ([2], S. 503). (Siehe auch Lemma 18 dieses Artikels.)

7. Satz. *Es seien U, V unabhängige Lösungen von (2), W ihre Wronskische Determinante. Es seien f und F Funktionen, welche die Gleichungen (9) und (10) in j erfüllen. Dann gilt $f^2F' = C =$* Konst. *und die Funktionen $u = f\, U(F)$, $v = f\, V(F)$ genügen der Differentialgleichung (1) in j. Ihre Wronskische Determinante w hat den Wert $w = WC$.*

Beweis. Die Beziehung $f^2F' = C$ folgt unmittelbar aus (9). Es sei Y beliebige Lösung von (2). Wir werden zeigen, dass die Funktion $y = f\, Y(F)$ die Gleichung (1) erfüllt. Da ($\cdot = \mathrm{d}/\mathrm{d}F$)

$$y'' = f''\, Y(F) + 2f'\, \dot{Y}(F)\, F' + f\, \ddot{Y}(F)\, F'^2 + f\, \dot{Y}(F)\, F''$$

und

$$\ddot{Y}(F) = - Q(F)\, Y(F)$$

ist, bekommen wir leicht

$$y'' + qy = [f'' + (q - Q(F)\, F'^2) f]\, Y(F) + (2f'F' + fF'')\, \dot{Y}(F) = 0 .$$

Ferner ist

$$w = uv' - u'v = f\, U(F)\, [f'\, V(F) + f\, \dot{V}(F)\, F'] - [f'\, U(F) + f\, \dot{U}(F)\, F']\, f\, V(F) =$$
$$= f^2\, F'[U(F)\, \dot{V}(F) - \dot{U}(F)\, V(F)] = f^2 F' W = CW .$$

Damit ist alles bewiesen.

8. Satz. *Es sei $q \in C_0$. Es existiert eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Die Funktion f ist definiert in J, est gilt $f > 0, f \in C_2$ und*

(13) $$f^3 f'' + q f^4 = 1 .$$

b) *Die Funktionen*

(14) $$u = f(x) \sin \int_a^x f^{-2}, \quad v = f(x) \cos \int_a^x f^{-2}$$

bilden ein Fundamentalsystem von (1).

Beweis. Wenn wir im Satz 4 $\xi = a$ und $Q(X) = 1$ wählen, so ist $U = \sin x$, $V = \cos x$, $W = -1$ und nach (8) gilt für $A = C = 1, B = 0$ die Beziehung $f^2 F' = 1$; es ist also (9) erfüllt und wegen $F' = f^{-2}$ vereinfacht sich (10) auf (13). Wenn wir noch die Bemerkung 5 anwenden, so gilt wegen $\int_a^\infty P^{-2}(x)\, dx = \int_a^\infty dx = \infty$ die Beziehung $\beta = \infty$ und die Behauptung ist bewiesen.

Da das Integral $\int_a^\infty f^{-2}$ im nichtoszillatorischen Fall konvergiert, sind die Formeln (14) nicht allzu sehr geeignet. Wir werden daher im nichtoszillatorischen Fall u, v auf eine andere Form bringen.

9. Satz. *Es sei $q \in C_0$ und die Differentialgleichung* (1) *sei nichtoszillatorisch. Es existieren ein $\xi \geqq a$ und eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Die Funktion f ist für alle $x \geqq \xi$ definiert, es gilt $f > 0, f \in C_2$ und*

(15) $$f^3 f'' + q f^4 = -1 .$$

b) *Die Funktionen*

(16) $$u = f(x) \exp \left\{ \int_\xi^x f^{-2} \right\}, \quad v = f(x) \exp \left\{ - \int_\xi^x f^{-2} \right\}$$

bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen für die Gleichung (1). (Der Beweis kann dem Leser überlassen werden.)

10. Bemerkung. Sätze 8 und 9 sind Spezialfälle folgender Behauptung, die man leicht aus den Sätzen 4, 7 und Bemerkung 6 beweisen kann:

Es gelte $q, Q \in C_0$ und die Differentialgleichungen (1) und (2) seien gleichzeitig oszillatorisch oder nichtoszillatorisch in J. Es seien U, V unabhängige Lösungen von (2). Dann gibt es ein $\xi \geqq a$ und Lösungen f und F von (9), (10) mit der Eigenschaft, dass die Funktionen $u = f\, U(F)$, $v = f\, V(F)$ ein Fundamentalsystem von (1) für $x \geqq \xi$ bilden.

11. Satz. *Es sei $\mathbf{y}(x)$ ein Spaltenvektor, $\mathbf{A}(x)$ eine quadratische Matrix, deren Elemente $a_{ik}(x)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ stetige Funktionen in J sind. Wir setzen $\|\mathbf{A}\| = \sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|$. Es gilt folgende Behauptung:*

Es gelte

$$\int_a^\infty \|\mathbf{A}\| < \infty\,. \tag{17}$$

Dann existiert für jede nichttriviale Lösung $\mathbf{y}$ des Systems

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\, \mathbf{y} \tag{18}$$

ein endlicher Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ und wenn wir $\delta(x) = \int_x^\infty \|\mathbf{A}\|$ bezeichnen, so gibt es eine Konstante K derart, dass die Beziehung

$$\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{c}\| \leqq K\, \delta(x) \tag{19}$$

in Kraft ist.

Beweis. Für jedes Zahlenpaar $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ und jede Lösung von (18) gelten die Ungleichungen

$$\|\mathbf{y}(x_2) - \mathbf{y}(x_1)\| = \left\| \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{y}' \right\| \leqq \int_{x_1}^{x_2} \|\mathbf{y}'\| \leqq \int_{x_1}^{x_2} \|\mathbf{A}\|\, \|\mathbf{y}\|\,. \tag{20}$$

Wir setzen $x_2 = x$, $x_1 = a$. Dann gilt $\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}(a)\| \leqq \int_a^x \|\mathbf{A}\|\, \|\mathbf{y}\|$ und daraus ergibt sich $\|\mathbf{y}(x)\| \leqq \|\mathbf{y}(a)\| + \int_a^x \|\mathbf{A}\|\, \|\mathbf{y}\|$. Aus der Bellmanschen Ungleichung ([1], S. 46) folgt $\|\mathbf{y}(x)\| \leqq \|\mathbf{y}(a)\| \exp\{\int_a^x \|\mathbf{A}\|\}$ und wegen (17) existiert eine Konstante K derart, dass $\|\mathbf{y}(x)\| \leqq K$ in J gilt. Aus der Gleichung $\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}(a) = \int_a^x \mathbf{A}\mathbf{y}$ folgt nun die Existenz eines endlichen Grenzwertes $\lim_{x\to\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{c}$.

Setzen wir jetzt in (20) $x_2 = \infty$, $x_1 = x$. Dann gilt $\|\mathbf{c} - \mathbf{y}(x)\| \leqq K \int_a^x \|\mathbf{A}\| = K\, \delta(x)$ und damit ist (19) bewiesen.

Nehmen wir jetzt an, dass für eine nichttriviale Lösung $\mathbf{y}_1(x)$ von (18) $\lim_{x\to\infty} |\mathbf{y}_1(x)| = 0$ gilt. Es existieren n-1 Lösungen derart, dass die Matrix $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n)$ fundamental ist. Es gilt

$$0 = \lim_{x\to 0} \operatorname{Det} \mathbf{Y}(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{Det} \mathbf{Y}(x_0) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \sum_{1}^{n} a_{ii}(t)\, \mathrm{d}t\right\} \neq 0\,,$$

denn es ist wegen (17) $|\int_{x_0}^{x} \sum_{1}^{n} a_{ii}(t)\, dt| < \infty$. Daraus folgt $\lim_{x \to \infty} |\mathbf{y}_1(x)| \neq 0$ und die Behauptung ist voll bewiesen.

12. Satz. *Es gelte $q, Q \in C_0$. Es seien φ und Φ Funktionen mit den Eigenschaften $\varphi, \Phi \in C_2$, $\varphi > 0$, $\Phi > 0$, $\Phi' > 0$ in J. Es seien U, V beliebige unabhängige Lösungen von (2).*

Ferner setzen wir voraus, dass die Bedingungen

$$\int_a^\infty \frac{|(\varphi^2 \Phi')'|}{\varphi^2 \Phi'} \left[|U(\Phi)| + |V(\Phi)|\right] \left[|\dot{U}(\Phi)| + |\dot{V}(\Phi)|\right] < \infty\,, \tag{21}$$

$$\int_a^\infty |\varphi \varphi'' + q\varphi^2 - Q(\Phi)\, \Phi'^2 \varphi^2| \left[U^2(\Phi) + V^2(\Phi)\right] < \infty \tag{22}$$

erfüllt sind. Dann ist

$$\lim_{x \to \infty} \varphi^2(x)\, \Phi'(x) = K > 0 \tag{23}$$

und die Differentialgleichung (1) hat eine allgemeine Lösung y mit

$$y = \varphi(x) \{[c_1 + \varepsilon_1(x)]\, U[\Phi(x)] + [c_2 + \varepsilon_2(x)]\, V[\Phi(x)]\}\,, \tag{24}$$

$$y' = [c_1 + \varepsilon_1(x)]\, \{\varphi(x)\, U[\Phi(x)]\}' + [c_2 + \varepsilon_2(x)]\, \{\varphi(x)\, V[\Phi(x)]\}'\,, \tag{25}$$

wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ stetige Funktionen mit der Eigenschaft $\lim_{x \to \infty} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \to \infty} \varepsilon_2(x) = 0$ bezeichnen.

Beweis. Wegen $(|U| + |V|)(|\dot{U}| + |\dot{V}|) \geqq |U\dot{V} - \dot{U}V| = \text{Konst} > 0$ ergibt sich aus (21) die Konvergenz des Integrals $\int_a^\infty |(\varphi^2 \Phi')'| : (\varphi^2 \Phi')$ und daraus folgt (23).

Wir setzen $z_1 = U[\Phi(x)]$, $z_2 = V[\Phi(x)]$. Diese Funktionen bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen für die Differentialgleichung

$$z'' - \frac{\Phi''}{\Phi'} z' + Q(\Phi)\, \Phi'^2 z = 0\,. \tag{26}$$

Ferner gilt $W = z_1 z_2' - z_1' z_2 = \Phi'[U(\Phi)\, \dot{V}(\Phi) - \dot{U}(\Phi)\, V(\Phi)]$, so dass wir $W = \Phi'$ annehmen können. Wir bezeichnen

$$k = \frac{\Phi''}{\Phi'} + \frac{2\varphi'}{\varphi} = \frac{(\varphi^2 \Phi')'}{\varphi^2 \Phi'}\,, \quad l = \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + q - Q(\Phi)\, \Phi'^2\right)$$

und setzen

$$\mathbf{A} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} z_2(kz_1' + lz_1), & z_2(kz_2' + lz_2) \\ -z_1(kz_1' + lz_1), & -z_1(kz_2' + lz_2) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\int_a^x \|\mathbf{A}\| \leqq \sum_{i,k=1}^{2} \int_a^x \left|\frac{k}{W} z_i' z_k\right| + \sum_{i,k=1}^{2} \int_a^x \left|\frac{l}{W} z_i z_k\right|.$$

Wegen $|z_i z_k| \leqq z_1^2 + z_2^2$ für $i, k = 1, 2$ ist

$$\int_a^x \|\mathbf{A}\| \leqq \int_a^x |k| \, \{|U(\Phi)| + |V(\Phi)|\} \, \{|\dot{U}(\Phi)| + |\dot{V}(\Phi)|\} + \\ + 4 \int_a^x \left| \frac{\varphi^2 l}{\varphi^2 \Phi'} \right| \{U^2(\Phi) + V^2(\Phi)\}$$

und aus (21), (22), (23) folgt $\int_a^\infty \|\mathbf{A}\| < \infty$.

Es sei jetzt $\mathbf{y}$ eine beliebige nichttriviale Lösung von

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{y}\,. \tag{27}$$

Aus Satz 11 ergibt sich die Existenz eines konstanten, von Null verschiedenen Vektors $\mathbf{c}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{y}(x) \to \mathbf{c}$ für $x \to \infty$. Wir zeigen, dass zu jeder Lösung Z der Differentialgleichung

$$Z'' + \frac{2\varphi'}{\varphi} Z' + \left[q + \frac{\varphi''}{\varphi}\right] Z = 0 \tag{28}$$

eine Lösung von (27) mit den Komponenten y_1, y_2 existiert, welche die Bedingungen

$$Z = y_1 z_1 + y_2 z_2\,, \quad Z' = y_1 z_1' + y_2 z_2' \tag{29}$$

erfüllt.

Sind die Funktionen y_1, y_2 der Bedingungen

$$y_1' z_1 + y_2' z_2 = 0\,, \tag{30}$$

$$y_1' z_1' + y_2' z_2' + y_1 z_1'' + y_2 z_2'' + \frac{2\varphi'}{\varphi}(y_1 z_1' + y_2 z_2') + \\ + \left(q + \frac{\varphi''}{\varphi}\right)(y_1 z_1 + y_2 z_2) = 0 \tag{31}$$

unterworfen, so erfüllt die Funktion $Z = y_1 z_1 + y_2 z_2$ die Beziehungen (29) und (28). Mit Rücksicht auf (26) ergibt sich aus (31)

$$y_1' z_1' + y_2' z_2' = -\, y_1 \left(\frac{\Phi''}{\Phi'} z_1' - Q(\Phi)\, \Phi'^2 z_1\right) - y_2 \left(\frac{\Phi''}{\Phi'} z_2' - Q(\Phi)\, \Phi'^2 z_2\right) - \\ - \frac{2\varphi'}{\varphi}(y_1 z_1' + y_2 z_2') - \left(q + \frac{\varphi''}{\varphi}\right)(y_1 z_1 + y_2 z_2)\,,$$

so dass wir (31) durch

$$y_1' z_1' + y_2' z_2' = -\, k(y_1 z_1' + y_2 z_2') - l(y_1 z_1 + y_2 z_2) \tag{32}$$

ersetzen können. Setzen wir

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} z_1, & z_2 \\ z_1', & z_2' \end{pmatrix},$$

so kann das System (30), (32) in der Gestalt $\mathbf{B}\mathbf{y}' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{y}$ geschrieben werden und wegen Det $\mathbf{B} = \Phi' \neq 0$ folgt daraus, dass $\mathbf{y}$ eine Lösung des Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ ist.

Es sei jetzt y eine beliebige Lösung von (1). Wenn wir $Z = y/\varphi$ setzen, so genügt Z, wie man leicht nachrechnet, der Gleichung (28) und daraus folgt (24). Die Formel (25) folgt nun aus den Beziehungen

$$y' = \varphi' Z + \varphi Z' = \varphi'(y_1 z_1 + y_2 z_2) + \varphi(y_1 z_1' + y_2 z_2') =$$
$$= y_1(\varphi z_1)' + y_2(\varphi z_2)' .$$

Damit ist der Beweis vollendet.

13. Bemerkung. Die Formel (25) kann man in manchen Fällen auf eine einfachere Form bringen. Ist besonders $U^2 + V^2 \leqq M < \infty$ und $\lim_{x\to\infty} \varphi(x)\,\varphi'(x) = 0$, so gilt

$$y' = \varphi\, \Phi\{[c_1 + o]\,\dot{U}(\Phi) + [c_2 + o]\,\dot{V}(\Phi) + o\} . \tag{33}$$

14. Bemerkung. Es seien U, V unabhängige Lösungen von (2). Bemerken wir, dass das Integral $\int_a^\infty (U^2 + V^2)^{-1}$ divergiert oder konvergiert, je nachdem die Differentialgleichung (2) oszillatorisch oder nichtoszillatorisch ist. Dieser Umstand ermöglicht beurteilen, wie der Faktor $P^2 = U^2 + V^2$ das Verhalten des Integrals in (22) beeinflusst. Im oszillatorischen Fall kann P^2 wegen $\int_a^\infty P^{-2} = \infty$ nicht zu steil gegen Unendlich streben, so dass die Voraussetzung (22) nicht zu sehr einschränkend wirkt. Im nichtoszillatorischen Fall kann dagegen P^2 sehr steil gegen Unendlich streben und der Satz 12 liefert nicht befriedigende Ergebnisse. Weiterhin werden wir darum die Aufmerksamkeit dem nichtoszillatorischen Fall zuwenden.

Bei der Untersuchung der asymptotischen Eigenschaften von Lösungen spielt im nichtoszillatorischen Fall eine wichtige Rolle die sogenannte „Hauptlösung“[1]) der Differentialgleichung (1). Die Eigenschaften der Hauptlösung wurden im Zusammenhang mit der Herleitung der asymptotischen Formeln für die Lösungen von (1) in [2] abgeleitet. Weiterhin werden wir einige Sätze über die Hauptlösung einer allgemeineren Gleichung

$$[p(x)\,y']' + q(x)\,y = 0\,, \quad p', q \in C_0\,, \quad p > 0 \tag{34}$$

anführen. Die Beweise dieser Sätze kann man dem Leser überlassen, denn man kann sie ganz ähnlich wie im zitierten Artikel durchführen.

---

[3]) Den Begriff der Hauptlösung („focal solution“) haben M. Morse und W. Leighton im Artikel „Singular quadratic functionals“, Trans. Amer. Math. Soc. *40* (1936), pp. 252–286 definiert und nicht P. Hartman und A. Wintner, wie in [2] eingeführt wurde.

15. Lemma. *Die Differentialgleichung* (34) *sei in J nichtoszillatorisch. Dann gibt es ein $b \geqq a$ und unabhängige Lösungen u, v von* (34) *mit den Eigenschaften* $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ *für $x \geqq b$ und* $\int_b^\infty p^{-1}u^{-2} < \infty$, $\int_b^\infty p^{-1}v^{-2} = \infty$.

16. Definition. Es sei v eine Lösung von (34). Wir sagen, dass v eine Hauptlösung ist, wenn es eine Zahl $b \geqq a$ gibt mit der Eigenschaft, dass $v(x) \neq 0$ für jedes $x \geqq b$ ist und dass das Integral $\int_b^\infty p^{-1}v^{-2}$ divergiert.

17. Lemma. *Es existiert eine Hauptlösung von* (34) *und je zwei Hauptlösungen sind linear abhängig.*

18. Lemma. *Es sei v eine Hauptlösung und u eine von v unabhängige Lösung von* (34). *Wir setzen* $u'v - uv' = wp^{-1}$, $w = \text{Konst} \neq 0$. *Dann ist* $\lim_{x\to\infty} u(x)/w\,v(x) = \infty$ *und es gibt ein $b \geqq a$, so dass die Funktion uv/w positiv in $\langle b, \infty)$ ist und die Beziehung* $\int_b^\infty w(puv)^{-1} = \infty$ *besteht.*

19. Definition. *Es sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller Funktionen $puvw^{-1}$, wobei v eine Hauptlösung, u eine von v unabhängige Lösung von* (34) *und $w = p(u'v - uv')$ ist.*

20. Lemma. *Es sei v eine Hauptlösung und u eine von v unabhängige Lösung von* (34) *mit $u \neq 0$ in $\langle b, \infty)$. Für jede zwei Funktionen $f, f_1 \in \mathfrak{F}$ gibt es eine Konstante c derart, dass die Beziehungen*

$$f_1 = f\left(1 + c\frac{v}{u}\right), \quad p\left(\frac{f_1}{p}\right)' = p\left(\frac{f}{p}\right)'\left(1 + c\frac{v}{u}\right) - c\frac{v}{u}$$

bestehen.

21. Definition. Wir nennen die Gleichung (34) regelmässig, wenn sie nichtoszillatorisch ist und wenn es ein $f \in \mathfrak{F}$ mit

$$\limsup_{x\to\infty}\left|p(x)\left[\frac{f(x)}{p(x)}\right]'\right| < 1 \tag{35}$$

gibt.

22. Bemerkung. *Gilt die Beziehung* (35) *für eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$, so gilt sie für alle $f \in \mathfrak{F}$.*

23. Lemma. *Es sei v eine Hauptlösung, u eine von v unabhängige Lösung und die Gleichung* (34) *sei regelmässig. Dann bestehen folgende Beziehungen*:

$$0 < \liminf_{x\to\infty}|p(x)\,u'(x)\,v(x)|\,, \qquad \limsup_{x\to\infty}|p(x)\,u'(x)\,v(x)| < \infty\,, \tag{36}$$

$$0 < \liminf_{x\to\infty}|p(x)\,u(x)\,v'(x)|\,, \qquad \limsup_{x\to\infty}|p(x)\,u(x)\,v'(x)| < \infty\,, \tag{37}$$

$$\lim_{x\to\infty} p(x)\,u(x)\,u'(x) = \infty\,, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{p(x)\,v(x)\,v'(x)} = -\infty\,. \tag{38}$$

24. Bemerkung. Laut (38) ist jede Lösung einer regelmässigen Gleichung im gewissen Intervall $\langle b, \infty)$ monoton. Eine positive Lösung y ist dann abnehmend oder wachsend, je nachdem y eine Hauptlösung ist oder nicht.

25. Definition. Wir nennen die Gleichung (34) normal, wenn sie regelmässig ist und wenn es eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$ mit

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{p(x)} < \infty \tag{39}$$

gibt.

26. Lemma. *Gilt die Beziehung* (39) *für eine Funktion* $f \in \mathfrak{F}$, *so gilt sie für alle* $f \in \mathfrak{F}$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Lemma 20, denn es ist $f \sim f_1$ und $f/p \sim f_1/p$.

27. Lemma. *Ist die Gleichung* (34) *normal, so sind die Funktionen* u/pu', v/pv' *beschränkt.*

Beweis. Es ist $u/pu' = uv/pu'v$, $v/pv' = uv/puv'$. Die Behauptung folgt nun aus (36), (37) und (39).

28. Satz. *Es sei* $k, l, K, L \in C_0$ *und die Differentialgleichung*

$$y'' + k(x)\, y' + l(x)\, y = 0 \tag{40}$$

sei nichtoszillatorisch in J. *Es sei* v *eine Hauptlösung und* u *eine von* v *unabhängige Lösung von* (40) *mit* $u(x) \neq 0$ *für* $x \geqq b \geqq a$. *Es gelte*

$$\left|\int_b^\infty K\right| < \infty \tag{41}$$

und

$$\int_b^\infty \exp\left\{\int_b^x k\right\} \left| K(x)\,\frac{u'(x)}{u(x)} + L(x)\right| |u(x)\, v(x)|\, \mathrm{d}x < \infty\,. \tag{42}$$

Dann ist die Differentialgleichung

$$Y'' + [k(x) + K(x)]\, Y' + [l(x) + L(x)]\, Y = 0 \tag{43}$$

nichtoszillatorisch. Es gibt ein Fundamentalsystem U, V *von* (43) *mit*

$$U \sim u\,, \quad V \sim v \tag{44}$$

und V *ist eine Hauptlösung. Ist die Gleichung* (40) *regelmässig, so gilt noch*

$$U' \sim u'\,, \quad V' \sim v'\,. \tag{45}$$

Beweis. Wir können annehmen, dass u, v in einem Intervall $\langle b, \infty)$ positiv sind und dass

$$v(x) = u(x) \int_x^\infty u^{-2}(t) \exp\left\{-\int_b^t k\right\} \mathrm{d}t$$

für $x \geqq b$ ist. Wir setzen

$$\lim_{x\to\infty} \exp\left\{\int_b^x K\right\} = C, \quad p(x) = u^2(x) \exp\left\{\int_b^x (k+K)\right\},$$

$$q(x) = u(x)\,[K(x)\,u'(x) + L(x)\,u(x)] \exp\left\{\int_b^x (k+K)\right\}$$

und $h = p/u^2$. Es gilt

$$\int_b^\infty \frac{1}{p(x)} \int_b^x |q(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_b^\infty |q(t)| \int_t^\infty \frac{\mathrm{d}x}{p(x)}\,\mathrm{d}t \leqq \kappa_1 \int_b^\infty |q(t)| \int_t^\infty u^{-2}(x) \exp\left\{-\int_b^x k\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \kappa_2 \int_b^\infty \exp\left\{\int_b^x k\right\} \left| K(x) \frac{u'(x)}{u(x)} + L(x) \right| |u(x)\,v(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

$$(\kappa_1, \kappa_2 = \text{Konst})\,.$$

Laut [6], S. 55 gibt es eine Funktion λ mit $\lambda(x) \to 1$ für $x \to \infty$, welche der Gleichung

(46) $$(p\lambda')' + q\lambda = 0$$

genügt. Es ist aber $p\lambda'' + p'\lambda' + q\lambda = h\langle u^2\lambda'' + [(k+K)\,u^2 + 2uu']\,\lambda' + u[Ku' + Lu]\,\lambda\rangle = 0$ und wenn wir zu dieser Beziehung $\lambda u'' + k\lambda u' + l\lambda u = 0$ addieren, so bekommen wir $(u\lambda)'' + (k+K)\,(u\lambda)' + (l+L)\,u\lambda = 0$. Daraus ergibt sich, dass die Funktion $U = \lambda u$ der Gleichung (43) genügt und dass die erste von Relationen (44) besteht.

Wir wählen nun ein $b_1 \geqq b$ derart, dass $U(x) > 0$ für $x \geqq b_1$ ist, und setzen

(47) $$V(x) = C\,U(x) \int_x^\infty \frac{1}{hU^2}\,.$$

Dann gilt

$$\mu(x) = \frac{V(x)}{v(x)} = \frac{C\,u(x)\,\lambda(x) \int_x^\infty (h\lambda^2 u^2)^{-1}}{u(x) \int_x^\infty u^{-2}(t) \exp\left\{-\int_{b_1}^t k\right\} \mathrm{d}t} \to 1$$

für $x \to \infty$ und daraus ergibt sich $V \sim v$.

Die Differentialgleichung (32) sei nun regelmässig. Nach Lemma 23 und Bemerkung 24 gibt es Zahlen $b_2 < b_1$, $\delta < 0$ derart, dass für $x \geqq b_2$ die Ungleichungen $u' > 0$, $v' < 0$, $hu'v \geqq \delta$ gelten. Somit ist in $\langle b_2, \infty)$ $U' = u'\lambda + u\lambda' = u'(\lambda + (u\lambda')/u')$. Ganz ähnlich wie in [2], S. 511–512 kann man die Beziehung $(u\lambda')/u' \to 0$ beweisen; es ist also $U' \sim u'$. Ferner gilt $U = \lambda u$, $V = \mu v$, $U' = \lambda_1 u'$, $UV' = U'V + \lambda_2(uv' - u'v)$ mit $\lim_{x\to\infty} \lambda(x) = \lim_{x\to\infty} \mu(x) = \lim_{x\to\infty} \lambda_1(x) = \lim_{x\to\infty} \lambda_2(x) = 1$. Daraus ergibt sich

$$\frac{V'}{v'} = \frac{u'\, v(\lambda_1\mu - \lambda_2)}{\lambda u v'} + \frac{\lambda_2}{\lambda} \to 1\,,$$

denn die Funktion $(u'v)/(uv') = (pu'v)/(puv')$ ist nach Lemma 23 beschränkt. Damit ist auch (45) bewiesen.

29. Bemerkung. Ist die Gleichung (40) regelmässig, so gilt nach Lemma (23) $0 < \liminf_{x\to\infty} |u'(x)\, v(x) \exp\{\int_b^x k\}|$, $\limsup_{x\to\infty} |u'(x)\, v(x) \exp\{\int_b^x k\}| < \infty$ und statt (41) und (42) kann man nur $\int_b^\infty (|K| + |Lf|) < \infty, f \in \mathfrak{F}$ voraussetzen.

30. Satz. *Es sei $q, Q \in C_0$, die Gleichung (2) sei nichtoszillatorisch, V sei eine Hauptlösung und U eine von V unabhängige Lösung der Gleichung (2). Es sei φ, $\Phi \in C_2$, $\Phi' > 0$, $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$ und*

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^2(x)\, \Phi'(x) = c\,, \quad 0 < c < \infty\,. \tag{48}$$

Weiter setzen wir voraus, dass die Beziehungen

$$\int_a^\infty |(\varphi^2\Phi')'\, \dot{U}(\Phi)\, V(\Phi)| < \infty\,, \tag{49}$$

$$\int_a^\infty |\varphi\varphi'' + q\varphi^2 - Q(\Phi)\, \Phi'^2\varphi^2|\, |U(\Phi)\, V(\Phi)| < \infty \tag{50}$$

bestehen. Dann existiert ein Fundamentalsystem u, v von (1) mit

$$u \sim \varphi\, U(\Phi)\,, \quad v \sim \varphi\, V(\Phi)\,. \tag{51}$$

Ist die Gleichung (2) regelmässig, so sind die Beziehungen (51) differenzierbar:

$$\begin{aligned} u' &= (1 + o)\, \varphi\Phi'\, \dot{U}(\Phi) + (1 + o)\, \varphi'\, U(\Phi)\,, \\ v' &= (1 + o)\, \varphi\Phi'\, \dot{V}(\Phi) + (1 + o)\, \varphi'\, V(\Phi)\,. \end{aligned} \tag{52}$$

Beweis. Es sei V eine Hauptlösung und U eine von V unabhängige Lösung der Gleichung (2). Die Funktionen $z_1 = U[\Phi(x)]$, $z_2 = V[\Phi(x)]$ bilden ein Fundamentalsystem der Gleichung (26) und z_2 ist eine Hauptlösung, denn es gibt ein $b \geqq a$, so dass $z_1(x) > 0$ für $x \geqq b$ ist, und es gilt

$$\int_b^\infty \Phi' z_1^{-2} = \int_b^\infty \Phi'\, V^{-2}(\Phi) = \int_{\Phi(b)}^\infty V^2 = \infty\,.$$

Wenn wir

$$K = \frac{(\varphi^2\Phi')'}{\varphi^2\Phi'}, \quad L = q + \frac{\varphi''}{\varphi} - Q(\Phi)\,\Phi'^2, \quad k = \frac{2\varphi'}{\varphi}$$

setzen, so ist*)

$$\int_a^x K = \int_a^x \frac{(\varphi^2\Phi')'}{\varphi^2\Phi'} = \log \frac{\varphi^2(x)\,\Phi'(x)}{\varphi^2(a)\,\Phi'(a)} \to \log \frac{c}{\varphi^2(a)\,\Phi'(a)}$$

für $x \to \infty$ und

$$\int_b^\infty \exp\left\{\int_b^x k\right\} \left| K(x)\frac{z_1'(x)}{z_1(x)} + L(x)\right| |z_1(x)\,z_2(x)|\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_b^\infty \frac{\varphi^2(x)}{\varphi^2(b)} |K(x)\,z_1'(x)\,z_2(x)|\,\mathrm{d}x + \int_b^\infty \frac{\varphi^2(x)}{\varphi^2(b)} |L(x)\,z_1(x)\,z_2(x)|\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \int_b^\infty \frac{\varphi^2(x)\,\Phi'(x)}{\varphi^2(b)} |K(x)\,\dot{U}[\Phi(x)]\,V[\Phi(x)]|\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_b^\infty \frac{\varphi^2(x)}{\varphi^2(b)} |L(x)\,U[\Phi(x)]\,V[\Phi(x)]|\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\varphi^2(b)} \int_b^\infty |(\varphi^2\Phi')'\,\dot{U}(\Phi)\,V(\Phi)| + \frac{1}{\varphi^2(b)} \int_b^\infty |\varphi\varphi'' + q\varphi^2 - Q(\Phi)\,\Phi'^2\varphi^2|\,|U(\Phi)\,V(\Phi)|\,.$$

Laut (49) und (50) sind beide letzteren Integrale konvergent und aus Satz 28 folgt die Existenz eines Fundamentalsystems Z_1, Z_2 der Gleichung

$$Z'' - \left(\frac{\Phi''}{\Phi'} + K\right) Z' + [Q(\Phi)\,\Phi'^2 + L]\,Z = 0$$

mit

$$Z_1 \sim U(\Phi), \quad Z_2 \sim V(\Phi).$$

Man kann leicht nachrechnen, dass jede Lösung dieser Gleichung die Form $Z = y/\varphi$ hat, wobei y eine passende Lösung der Gleichung (1) bezeichnet; daraus folgen die Formeln (51).

Ist die Gleichung (2) regelmässig, so ist auch (26) regelmässig und aus Satz 28 folgt $Z_1' \sim [U(\Phi)]' = \dot{U}(\Phi)\,\Phi'$. Ferner gilt $u = Z_1\varphi$, $u' = Z_1'\varphi + Z_1\varphi'$ und wegen $u \sim \varphi\,U(\Phi)$ ergibt sich daraus die erste Beziehung in (52). Ähnlich beweist man die entsprechende Beziehung für v.

31. Bemerkung. Es seien die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes erfüllt. Wenn die Gleichung (2) normal ist und die Beziehung

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x)\,\varphi'(x) = 0 \tag{53}$$

---

*) Wegen (48) und $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$ können wir $\varphi^2\Phi' > 0$ in J annehmen.

besteht, so gilt (51) und

$$u' \sim \varphi\Phi' \dot{U}(\Phi)\,, \quad v' \sim \varphi\Phi' \dot{V}(\Phi)\,. \tag{54}$$

Beweis. Da die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes erfüllt sind, gilt (51) und (52). Die Beziehungen (52) können wir aber auf die Form (wir führen nur die Formel für u ein)

$$u' = \varphi\Phi' \dot{U}(\Phi)\left[\omega_1 + \frac{\varphi\varphi'}{\varphi^2\Phi'}\frac{U(\Phi)}{\dot{U}(\Phi)}\,\omega_2\right]$$

mit $\omega_1 \to 1$, $\omega_2 \to 1$ bringen. Laut Lemma 27 ist die Funktion $U(\Phi)/\dot{U}(\Phi)$ beschränkt und wegen (53) und (48) ist wirklich die erste Beziehung in (54) in Kraft.

32. Satz. *Es seien zwei Differentialgleichungen* (1) *und* (2) *mit* $q, Q \in C_0$ *gegeben, die gleichzeitig oszillatorisch oder nichtoszillatorisch sind. Dann gibt es Funktionen* φ *und* Φ, *die alle Voraussetzungen der Sätze* 12 *und* 30 *im gewissen Intervall* $\langle\xi, \infty)$ *erfüllen.*

Beweis. Aus Satz 4 und Bemerkungen 5, 6 folgt die Existenz einer Konstanten ξ und solcher Funktionen F und f, dass $f(x) > 0$ für $x \geqq \xi$ gilt und dass für diese x die Beziehungen (9) und (10) bestehen. Wir setzen $\Phi = F$, $\varphi = f$.

33. Aus Sätzen 12 und 30 kann man eine Reihe von asymptotischen Formeln für die Lösungen der Gleichung (1) herleiten. Wählen wir zum Beispiel $Q(X) = 1$, so bekommen wir aus Satz 12 und Bemerkung 13 folgenden Satz:

Es sei $q \in C_0$. *Es seien* φ *und* Φ *Funktionen mit den Eigenschaften* $\varphi, \Phi \in C_2$, $\varphi > 0$, $\Phi > 0$, $\Phi' > 0$ *in* J *und es gelte*

$$\int_a^\infty |\mathrm{d} \log(\varphi^2\Phi')| < \infty\,, \quad \int_a^\infty |\varphi\varphi'' + q\varphi^2 - \Phi'^2\varphi^2| < \infty\,.$$

Dann hat die Gleichung (1) *ein Fundamentalsystem* u, v *mit*

$$\begin{aligned} u &= \varphi(\sin\Phi + o)\,, \quad v = \varphi(\cos\Phi + o)\,,\\ u' &= (1 + o)(\varphi\sin\Phi)' + o(\varphi\cos\Phi)'\,,\\ v' &= (1 + o)(\varphi\cos\Phi)' + o(\varphi\sin\Phi)'\,. \end{aligned} \tag{55}$$

Ist ferner $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)\,\varphi'(x) = 0$, *so bestehen statt* (55) *die Beziehungen*

$$u' = \varphi\,\Phi'(\cos\Phi + o)\,, \quad v' = -\,\varphi\,\Phi'(\sin\Phi + o)\,.$$

34. Ein ähnliches Ergebnis bekommen wir aus Satz 30 und Bemerkung 31 im nichtoszillatorischen Fall, wenn wir $Q(X) = -1$ setzen:

Es sei $q \in C_0$. Es seien φ und Φ Funktionen mit den Eigenschaften $\varphi, \Phi \in C_2$, $\varphi > 0$ $\Phi > 0$, $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$, $\Phi' > 0$ und es gelte

$$\int_a^\infty |\mathrm{d} \log (\varphi^2 \Phi')| < \infty \,, \quad \int_a^\infty |\varphi\varphi'' + q\varphi^2 + \Phi'^2\varphi^2| < \infty \,.$$

Dann hat die Gleichung (1) ein Fundamentalsystem u, v mit

$$u \sim \varphi e^{\Phi} \,, \quad v \sim \varphi e^{-\Phi} \,,$$

$$\begin{aligned} u' &= [1 + o]\, \varphi\Phi' e^{\Phi} + [1 + o]\, \varphi' e^{\Phi} \,, \\ v' &= -\, [1 + o]\, \varphi\Phi' e^{-\Phi} + [1 + o]\, \varphi' e^{-\Phi} \,. \end{aligned} \tag{56}$$

Ist ferner $\lim_{x\to\infty} \varphi(x)\, \varphi'(x) = 0$, so bestehen statt (56) die Beziehungen

$$u' \sim \varphi\Phi' e^{\Phi} \,, \quad v' \sim -\, \varphi\Phi' e^{-\Phi} \,.$$

35. Verschiedene Folgerungen der Sätze 33 und 34 im Falle $\Phi' = \varphi^{-2}$ wurden in [2] und [4] behandelt. Weiterhin begnügen wir uns mit der Aufgabe einer Applikation des Satzes 34. Eine umfangreichere Sammlung von Spezialisationen der erwähnten Sätze scheint überflüssig, da die Wahl der Funktionen φ und Φ von der Gestalt der Vergleichsgleichung (2) abhängt und wir sind bestrebt in Einzelfällen die Funktionen φ und Φ den Lösungen f und F von (9) und (10) so gut wie möglich anzupassen.

Ausserdem wurde eine zahlreiche Reihe von Spezialisationen im nichtoszillatorischen Fall schon in [2] und [3] angeführt und die Resultate haben ihre Analogie auch im oszillatorischen Fall.

Wir setzen $\log_0 x = x$, $M_0(x) = 1$, $\log_{n+1} x = \log(\log_n x)$, $M_{n+1}(x) = M_n(x)\,.$ $.\, \log_n x$, $Z_n(x) = \sum_{k=1}^{n} M_k^{-2}(x)$ ($n = 0, 1, \ldots$; *also* $Z_0(x) = 0$). *Es seien r, s Funktionen mit* $r \in C_1$, $s \in C_0$, $r > 0$, $\int^\infty |\mathrm{d} \log r| < \infty$ und

$$\int^\infty |s| < \infty \,. \tag{57}$$

Zu jeder Lösung y der Gleichung

$$y'' + \frac{1}{4}\left[Z_n(x) + \frac{r(x) + s(x)\, M_n(x)}{M_n^2(x)}\right] y = 0$$

gibt es Funktionen c_1, c_2 mit endlichen Grenzwerten im Unendlichen, so dass

$$y = M_n^{\frac{1}{2}}(c_1 \cos \Phi + c_2 \sin \Phi)$$

mit

$$\Phi' = \frac{\sqrt{r}}{2M_n}$$

gilt.

Beweis. Ist $\varphi = M_n^{\frac{1}{2}}$, so gilt

$$\varphi' = \frac{1}{2} M_n^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} M_k^{-1}, \quad \varphi'' = \frac{1}{4} M_n^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} M_k^{-1} - \frac{1}{2} M_n^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} M_k' M_k^{-2} = -\frac{1}{4} M_n^{\frac{1}{2}} Z_n ,$$

wie man leicht nachrechnet. Daraus ergibt sich

$$\varphi\varphi'' + q\varphi^2 - \Phi'^2\varphi^2 = -\frac{1}{4} M_n Z_n + \frac{1}{4}\left(Z_n + \frac{r + sM_n}{M_n^2}\right) M_n - \frac{1}{4}\frac{r}{M_n} = s$$

und wegen (57) ist

$$\int^{\infty} |\varphi\varphi'' + q\varphi^2 - \Phi'^2\varphi^2| < \infty .$$

Ferner gilt

$$\int^{\infty} |\mathrm{d} \log (\varphi^2 \Phi')| = \int^{\infty} \left| \mathrm{d} \log \frac{\sqrt{r}}{2} \right| < \infty$$

und aus Satz 33 ergibt sich die Behauptung.

Literatur

[1] *R. Bellman*: Теория устойчивости дифференциальных уравнений. Moskva 1954.

[2] *J. Mařík, M. Ráb*: Asymptotische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $y'' = A(x) y$ im nichtoszillatorischen Fall. Czech. Math. J. *10 (85)*, 1960, 501–522.

[3] *J. Mařík, M. Ráb*: Nichtoszillatorische lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung. Czech. Math. J. *13* (*88*), 1963, 209–225.

[4] *M. Ráb*: Asymptotische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $y'' + A(x) y = 0$. Czech. Math. J. *8* (*83*), 1958, 513–519.

[5] *M. Ráb*: Kriterien für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung $(p(x) y')' + q(x) y = 0$. Čas. pro pěst. mat. *84* (1959), 335–370.

[6] *A. Wintner*: Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator in its hyperbolic range. Duke Math. J. *15* (1948), 55–67.

Резюме

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' + q(x) y = 0$

МИЛОШ РАБ (Miloš Ráb), Брно

Пусть $J = \langle a, \infty)$, q, $Q \in C_0$ в J. Пусть дифференциальные уравнения

$$y'' = q(x) y = 0 , \tag{1}$$

$$Y'' + Q(x) Y = 0 \tag{2}$$

одновременно колеблющиеся или неколеблющиеся в J и U, V — фундаментальная система решений уравнения (2). В первой части работы доказывается существование числа $\xi \geqq a$ и функций f, $F \in C_2$ таких, что функции

$$(3) \qquad f(x)\, U[F(x)]\,, \quad f(x)\, V[F(x)]$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) для $x \geqq \xi$. Функции f, F удовлетворяют нелинейной системе дифференциальных уравнений

$$(4) \qquad fF'' + 2f'F' = 0\,,$$

$$f'' + [q - Q(F)\, F'^2]\, f = 0\,.$$

Если мы подставим в (3) функции φ и Φ вместо функций f и F, которые являются в определенном смысле приближенным решением системы (4), мы получим асимптотические формулы для решений уравнения (1).

Теорема. *Пусть q, $Q \in C_0$. Пусть φ, Φ — положительные функции в J и такие, что φ, $\Phi \in C_2$, $\Phi' > 0$; U, V — фундаментальная система решений уравнения* (2). *Если*

$$(5) \qquad \int_a^\infty \frac{|(\varphi^2\Phi')'|}{\varphi^2\Phi'}\, [|U(\Phi)| + |V(\Phi)|]\, [|\dot{U}(\Phi)| + |\dot{V}(\Phi)|] < \infty\,,$$

$$(6) \qquad \int_a^\infty |\varphi\varphi'' + q\varphi^2 - Q(\Phi)\, \Phi'^2\varphi^2|\, |U^2(\Phi) + V^2(\Phi)| < \infty\,,$$

то $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi^2(x)\, \Phi'(x) = K$, $0 < K < \infty$, *и общее решение дифференциального уравнения* (1) *принимает вид*

$$y = \varphi(x)\, \{[c_1 + \varepsilon_1(x)]\, U[\Phi(x)] + [c_2 + \varepsilon_2(x)]\, V[\Phi(x)]\}\,,$$

$$y' = [c_1 + \varepsilon_1(x)]\, \{\varphi(x)\, U[\Phi(x)]\}' + [c_2 + \varepsilon_2(x)]\, \{\varphi(x)\, V[\Phi(x)]\}'\,,$$

где ε_1 и ε_2 — непрерывные функции такие, что $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon_2(x) = 0$.

В случае, когда сравнительное уравнение неколеблющееся, то предположения (5) и (6) могут оказаться сильно ограничивающими. Это вызвано поведением факторов $(|U| + |V|)\,(|\dot{U}| + |\dot{V}|)$ и $U^2 + V^2$. Поэтому неколеблющийся случай исследован отдельно.

Решение Y уравнения (2) называем главным, если существует $b \geqq a$ такое, что $Y(x) \neq 0$ для $x \geqq b$ и $\int_b^\infty Y^{-2} = \infty$. Известно, что главное решение всегда существует и каждых два главных решения линейно зависимы. Пусть $\mathfrak{F}$ — система всех функций вида UV/W, где V — главное решение, U — независимое от V решение уравнения (2) и $W = U'V - UV'$. Уравнение (2) называем правильным, если существует $f \in \mathfrak{F}$ так, что $\limsup\limits_{x\to\infty} |f'(x)| < 1$. Если уравнение (2) правильно и существует $f \in \mathfrak{F}$ так, что $\limsup_{x \to \infty} |f(x)| < \infty$, мы называем уравнение (2) нормальным. Справедлива теорема:

Пусть $q, Q \in C_0$, уравнение (2) неколеблющееся, V — главное решение и U — независимое решение уравнения (2). Пусть $\varphi, \Phi \in C_2$, $\Phi' > 0$, $\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = \infty$ и $\lim_{x \to \infty} \varphi^2(x)\,\Phi'(x) = c$, $0 < c < \infty$. Пусть, далее,

$$\int_a^\infty \left|(\varphi^2\Phi')'\,\dot{U}(\Phi)\,V(\Phi)\right| < \infty\,, \quad \int_a^\infty \left|\varphi\varphi'' + q\varphi^2 - Q(\Phi)\,\Phi'^2\varphi^2\right| \left|U(\Phi)\,V(\Phi)\right| < \infty\,.$$

Тогда существует фундаментальная система решений u, v уравнения (1) *такая, что $u \sim \varphi\,U(\Phi)$, $v \sim \varphi\,V(\Phi)$. Если уравние* (2) *правильно, то эти соотношения дифференцируемы. Если уравнение* (2) *нормально и $\lim_{x \to \infty} \varphi(x)\,\varphi'(x) = 0$, то*

$$u' \sim \varphi\Phi'\dot{U}(\Phi)\,, \quad v' \sim \varphi\Phi'\dot{V}(\Phi)\,.$$