Czechoslovak Mathematical Journal

Imrich Ličko; Marko Švec

Le caractère oscillatoire des solutions de l'équation $y^{(n)} + f(x)y^{\alpha} = 0,\ n > 1$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 4, 481–491

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100581

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *13* (*88*) ПРАГА 20. XI. 1963 г., No 4

LE CARACTÈRE OSCILLATOIRE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $y^{(n)} + f(x)\, y^\alpha = 0\,, \quad n > 1$

IMRICH LIČKO et MARKO ŠVEC, Bratislava

(Reçu le 18 mai 1961)

Dans cet article, on déduit les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions de l'équation $y^{(n)} + f(x)\, y^\alpha = 0$, $n > 1$, soient oscillatoires. Il s'agit de généralisations de la condition d'Atkinson.

Le présent travail a pour but d'établir les conditions nécessaires et suffisantes du caractère oscillatoire de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + f(x)\, y^\alpha = 0 \tag{1}$$

où $\alpha = p/q$, p et q étant deux nombres impaires, premiers entre eux. Pour $n = 2$, $\alpha > 1$, ces conditions sont données dans le travail [1]; pour $n = 2$, $0 < \alpha < 1$, dans le travail [2].

Quant à la fonction $f(x)$, nous supposerons qu'elle est continue et positive dans l'intervalle $\langle a, \infty)$. Par solution de l'équation (1), nous entendrons une solution dans l'intervalle $\langle b, \infty)$, $a \leqq b$. Par solution oscillatoire de l'équation (1), nous entendrons une solution telle qu'il existe une suite $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, pour laquelle $\lim_{i\to\infty} x_i = \infty$, $y(x_i) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots$

Théorème 1. *Soit $f(x)$ une fonction continue et positive, définie dans l'intervalle $\langle a, \infty)$. Soit $n > 1$, $0 < \alpha < 1$.*

a) *Soit n un entier pair. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions de l'équation* (1) *soient oscillatoires est que*

$$\int_t^\infty x^{\alpha(n-1)} f(x)\, \mathrm{d}x = \infty\,, \quad t > a\,. \tag{2}$$

b) *Soit n un entier impair. Alors la condition* (2) *est nécessaire et suffisante pour que toute solution de l'équation* (1) *soit ou bien oscillatoire ou bien telle que $y(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ (y compris) tendent, pour $x \to \infty$, vers zéro d'une façon monotone.*

Démonstration. I. La condition est suffisante. En effet, soit (2) vérifié. Soit

$y(x)$ une solution non-oscillatoire de l'équation (1) et supposons que $y(x) > 0$ pour $x \geqq x_0$, $x_0 \geqq a$. Alors pour $x > x_0$ nous avons $y^{(n)} = -f(x)\, y^\alpha(x) < 0$. Il en résulte qu'il existe un nombre $z_0 \geqq x_0$ tel que les dérivées $y^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ sont monotones sur l'intervalle $\langle z_0, \infty)$. La condition $y(x) > 0$ entraine ensuite que $y^{(n-1)}(x)$ est positive et décroissante dans l'intervalle $\langle z_0, \infty)$ et que $\lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) \geqq 0$ pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Supposons que pour un entier k, $0 \leqq k \leqq n-1$, nous ayons

$$\lim_{x\to\infty} y^{(k)}(x) > 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0\,, \quad j = k+1,\, k+2,\, \ldots,\, n-1\,. \tag{3}$$

Nous en déduisons facilement que pour $j = 0, 1, \ldots, k$, on a

$$y^{(j)}(x) > 0 \text{ pour } x > z_0\,, \quad \lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) > 0\,. \tag{4}$$

Pour $x > z_0$ et pour l'entier s tel que $k < n - 2s < n$ et $k < n - 2s + 1 < n$, on a de même

$$y^{(n-2s+1)}(x) > 0\,, \quad y^{(n-2s)}(x) < 0\,. \tag{5}$$

Dans ces conditions, l'intégration de l'équation (1) et l'intégration successive poursuivie donnent pour $x > x_0$:

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(x) &= \int_x^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\, \mathrm{d}t\,, \\ -\, y^{(n-2)}(x) &= \int_x^\infty (t-x)\, f(t)\, y^\alpha(t)\, \mathrm{d}t\,, \\ &\;\vdots \\ (-1)^{n-k}\, y^{(k+1)}(x) &= \frac{1}{(n-k-2)!} \int_x^\infty (t-x)^{n-k-2} f(t)\, y^\alpha(t)\, \mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Une nouvelle intégration dans l'intervalle $\langle u, v\rangle$, $z_0 < u < v$, donne

$$\begin{gathered} (-1)^{n-k}\, y^{(k)}(v) - (-1)^{n-k}\, y^{(k)}(u) = \\ = \frac{1}{(n-k-2)!} \int_u^v \mathrm{d}x \left[\int_x^v (t-x)^{n-k-2} f(t)\, y^\alpha(t)\, \mathrm{d}t + \int_v^\infty (t-x)^{n-k-2} f(t)\, y^\alpha(t)\, \mathrm{d}t \right]. \end{gathered}$$

Un changement de l'ordre des intégrations conduit alors à

$$\begin{gathered} (-1)^{n-k}\, y^{(k)}(v) - (-1)^{n-k}\, y^{(k)}(u) = \\ = \frac{1}{(n-k-2)!} \left[\int_u^v (t-u)^{n-k-1} f(t)\, y^\alpha(t)\, \mathrm{d}t + \right. \\ \left. + \int_v^\infty \left[(t-u)^{n-k-1} - (t-v)^{n-k-1}\right] f(t)\, y^\alpha(t)\, \mathrm{d}t \right]. \end{gathered}$$

Comme pour $u < v \leqq t$ nous avons

$$(v-u)^{n-k-1} \leqq (t-u)^{n-k-1} - (t-v)^{n-k-1}\,,$$

l'inégalité précédente donne l'inégalité

(7)
$$(-1)^{n-k} y^k(v) - (-1)^{n-k} y^k(u) \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{(n-k-2)!}\left[\int_u^v (t-u)^{n-k-1} f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t + (v-u)^{n-k-1}\int_v^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

Soit $n - k$ un nombre pair non-négatif, alors $n - k - 1$ est impair. D'après (5), nous avons
$$y^{(k+1)}(x) = y^{(n-(n-k-1))}(x) > 0$$
pour $x > z$. Or, cela signifie que $y^{(k)}(x)$ est une fonction positive et croissante sur l'intervalle (z_0, ∞). Il découle alors de l'inégalité (7) que l'on a

(8)
$$y^k(v) > \frac{1}{(n-k-1)!}(v-u)^{n-k-1}\int_v^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Supposons k positif. L'intégration de (8) dans l'intervalle $\langle u, x\rangle$ donne
$$y^{(k-1)}(x) - y^{(k-1)}(u) > \frac{1}{(n-k-1)!}\,.$$
$$\cdot\left\{\left[\frac{(v-u)^{n-k}}{n-k}\int_v^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right]_u^x + \frac{1}{n-k}\int_u^x (v-u)^{n-k} f(v)\, y^\alpha(v)\,\mathrm{d}v\right\}.$$

D'après (4), nous avons $y^{(k-1)}(u) > 0$. De l'inégalité précédente nous obtenons alors

(9)
$$y^{(k-1)}(x) > \frac{1}{(n-k)!}(x-u)^{n-k}\int_x^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

En procédant de la même façon $k - 1$ fois de suite, nous arrivons à l'inégalité

(10)
$$y(x) > \frac{1}{(n-1)!}(x-u)^{n-1}\int_x^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Si $k = 0$, (8) et (10) sont identiques. A partir de (10) nous obtenons
$$f(x)\, y^\alpha(x) > [(n-1)!]^{-\alpha}(x-u)^{\alpha(n-1)} f(x)\left[\int_x^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right]^\alpha,$$
d'où
$$\int_u^v f(x)\, y^\alpha(x)\left[\int_x^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right]^{-\alpha}\mathrm{d}x > [(n-1)!]^{-\alpha}\int_u^v (x-u)^{\alpha(n-1)} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En évaluant le premier membre, nous obtenons l'inégalité
$$(1-\alpha)^{-1}\left\{-\left[\int_v^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right]^{1-\alpha} + \left[\int_u^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right]^{1-\alpha}\right\} > [(n-1)!]^{-\alpha}\,.$$
$$\cdot\int_u^v (x-u)^{\alpha(n-1)} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

d'où pour $v \to \infty$

$$(1 - \alpha)^{-1} \left[\int_u^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\, dt \right]^{1-\alpha} > [(n-1)!]^{-\alpha} \int_u^\infty (x - u)^{\alpha(n-1)} f(x)\, dx = \infty .$$

Or, cela est une contradiction, car nous avons d'après (6)

$$0 < \int_u^\infty f(x)\, y^\alpha(x)\, dx < \infty .$$

Nous venons donc de démontrer que les hypothèses (3) entraînent, dans le cas où $n - k$ est pair, une contradiction.

Supposons maintenant que, les hypothèses (3) étant vérifiées, $n - k$ soit un nombre impair. Alors $n - k - 1$ est pair; il découle de (5) que l'on a $y^{(k+1)}(x) = y^{(n-(n-k-1))}(x) < 0$ pour $x > z_0$. Or, cela signifie, que $y^{(k)}(x)$ est une fonction positive, décroissante dans l'intervalle (z_0, ∞), et que $\lim_{x\to\infty} y^k(x) > 0$. Alors, (7) donne

$$-\lim_{x\to\infty} y^{(k)}(x) + y^{(k)}(u) \geqq [(n-k-1)!]^{-1} \int_u^\infty (t-u)^{n-k-1} f(t)\, y^\alpha(t)\, dt ,$$

d'où

$$y^{(k)}(u) > [(n-k-1)!]^{-1} \int_u^\infty (t-u)^{n-k-1} f(t)\, y^\alpha(t)\, dt , \quad u > z_0 . \tag{11}$$

Supposons k positif. En intégrant la dernière inégalité dans l'intervalle $\langle u, x\rangle$ et en changeant l'ordre des intégrations dans le second membre, nous obtenons

$$\begin{aligned} y^{(k-1)}(x) - y^{(k-1)}(u) &> [(n-k-1)!]^{-1} \int_u^x dx \int_v^\infty (t-v)^{n-k-1} f(t)\, y^\alpha(t)\, dt = \\ &= [(n-k)!]^{-1} \left[\int_u^x (t-u)^{n-k} f(t)\, y^\alpha(t)\, dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^\infty [(t-x)^{n-k} - (t-u)^{n-k}] f(t)\, y^\alpha(t)\, dt \right] . \end{aligned}$$

D'après (4), nous avons $y^{(k-1)}(u) > 0$. Ensuite, pour $u < x < t$ on a $(t-x)^{n-k} - (t-u)^{n-k} \geqq (x-u)^{n-k}$. En vertu de ces relations, la dernière inégalité entraîne

$$y^{(k-1)}(x) > [(n-1)!]^{-1} (x-u)^{n-k} \int_x^\infty f(t)\, y^\alpha(t)\, dt . \tag{12}$$

C'est une inégalité presque identique à (9). En procédant d'une façon analogue au cas de l'inégalité (9), nous pouvons obtenir l'inégalité (10) à partir de (12); il en résulte de nouveau une contradiction. Donc, les hypothèses (3) et l'hypothèse que $n - k$ soit impair, $k > 0$, sont incompatibles.

Il nous reste donc à envisager le cas où $k = 0$ et $n - k = n$ est un entier impair. Comme alors $n - k - 1 = n - 1$ est un entier pair, nous avons d'après (5) l'inégalité $y'(x) = y^{(n-(n-1))}(x) < 0$. Cela signifie que $y(x)$ est une fonction positive et décroissante pour $x > z_0$; sa limite pour $x \to \infty$ est aussi positive. Posons $\lim_{x\to\infty} y(x) = c > 0$. Pour $x > z_0$ nous aurons $0 < c < y(x) < y(z_0)$. Il s'en ensuit

$$0 < c^\alpha f(x) < f(x)\, y^\alpha(x) = -y^{(n)}(x) < y^\alpha(z_0) f(x) .$$

En intégrant cette inégalité n fois et en tenant compte de la condition (3), c'est-à-dire de ce que $\lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0$ pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$, nous obtenons

$$[(n-1)!]^{-1} c^\alpha \int_{z_0}^{\infty} (t - z_0)^{n-1} f(t)\, dt < y(z_0) - c <$$

$$< [(n-1)!]^{-1} y^\alpha(z_0) \int_{z_0}^{\infty} (t - z_0)^{n-1} f(t)\, dt .$$

Comme $\alpha(n-1) < (n-1)$, il résulte de (2)

$$\int_{z_0}^{\infty} (t - z_0)^{n-1} f(t)\, dt = \infty .$$

Or, cela signifie que la dernière inégalité est contradictoire. Il faut donc que l'on ait $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

En somme, nous avons donc démontré ceci: Si (2) a lieu, alors l'équation (1), dans le cas où n est un entier pair, ne peut pas avoir de solutions nonoscillatoires. Dan le cas où (2) est vérifié, n étant un nombre impair, l'équation (1) peut avoir seulement de telles solutions non-oscillatoires qui tendent, avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, d'une façon monotone vers zéro.

II. La condition est nécessaire. Soit

$$\int_{x}^{\infty} t^{\alpha(n-1)} f(t)\, dt < \infty .$$

Alors il existe certainement un nombre $x_0 > a$ tel que

$$[(n-1)!]^{-\alpha} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0)^{\alpha(n-1)} f(t)\, dt < 1 . \tag{13}$$

Considérons maintenant la solution déterminée par les conditions initiales

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-2)}(x_0) = 0 , \quad y^{(n-1)}(x_0) = 1 .$$

Supposons que x_1 soit le premier zéro de cette solution qui succède à x_0. Alors $y(x) > 0$ pour (x_0, x_1). Cela et l'équation (1) impliquent que la fonction $y^{(n-1)}(x)$ décroît sur l'intervalle (x_0, x_1). Comme $y^{(n-1)}(x_0) = 1$, il doit y avoir un nombre $\xi \in (x_0, x_1)$ tel que $y^{(n-1)}(\xi) = 0$, $y^{(n-1)}(x) > 0$ pour $x \in \langle x_0, \xi)$. En effet, s'il n'existait pas de tel ξ, on aurait $y^{(n-1)}(x) > 0$ pour $x \in (x_0, x_1)$, ce qui signifierait que les fonctions $y^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-2$, seraient croissantes sur l'intervalle $\langle x_0, x_1 \rangle$; on ne pourrait donc pas avoir $y(x_1) = 0$.

D'après le théorème de Taylor nous avons pour $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$

$$y(x) = \frac{y^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \frac{(x - x_0)^n}{n!} y^{(n)}(\eta)$$

où $\eta = x_0 + \vartheta(x - x_0)$, $0 < \vartheta < 1$. Nous en déduisons, en tenant compte de l'équation (1), que

$$y(x) = [(n-1)!]^{-1} (x - x_0)^{n-1} - (n!)^{-1} (x - x_0)^n f(\eta)\, y^\alpha(\eta),$$

d'où

$$y(x) \leqq [(n-1)!]^{-1} (x - x_0)^{n-1} \quad \text{pour} \quad x \in \langle x_0, x_1 \rangle .$$

En appliquant cette inégalité à l'équation différentielle (1), nous obtenons

$$- y^{(n)}(x) = f(x)\, y^\alpha(x) \leqq [(n-1)!]^{-\alpha} f(x) (x - x_0)^{\alpha(n-1)} .$$

L'intégration de cette inégalité dans l'intervalle $\langle x_0, \xi \rangle$ donne

$$- y^{(n-1)}(\xi) + y^{(n-1)}(x_0) \leqq [(n-1)!]^{-\alpha} \int_{x_0}^{\xi} (t - x_0)^{\alpha(n-1)} f(t)\, \mathrm{d}t .$$

Comme nous avons $y^{(n-1)}(\xi) = 0$, $y^{(n-1)}(x_0) = 1$, nous voyons, compte tenu de (13), que l'on a

$$1 \leqq [(n-1)!]^{-\alpha} \int_{x_0}^{\xi} (t - x_0)^{\alpha(n-1)} f(t)\, \mathrm{d}t <$$

$$< [(n-1)!]^{-\alpha} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0)^{\alpha(n-1)} f(t)\, \mathrm{d}t < 1 .$$

C'est une contradiction qui montre que $y(x)$ ne peut plus s'annuler au delà de x_0.

Théorème 2. *Soit $f(x)$ une fonction positive continue sur l'intervalle $\langle a, \infty)$. Soit $n > 1$, $\alpha > 1$.*

a) *Soit n un entier pair. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions de l'équation* (1) *soient oscillatoires est que l'on ait*

$$\int_t^{\infty} x^{n-1} f(x)\, \mathrm{d}x = \infty , \quad t > a . \tag{14}$$

b) *Soit n un entier impair. Alors* (14) *est la condition nécessaire et suffisante pour que toute solution de l'équation* (1) *soit ou bien oscillatoire, ou bien telle que $y(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ (y compris) tendent vers zéro d'une manière monotone.*

Démonstration. I. La condition est suffisante. Soit (14) vérifié. Soit $y(x)$ une solution de l'équation (1), soit $y(x) > 0$ pour $x > x_0$, $x_0 > a$. Alors $y^{(n)}(x) = - f(x) \,.$ $.\, y^\alpha(x) < 0$ pour $x > x_0$. Il s'en ensuit qu'il existe un nombre $z_0 \geqq x_0$ tel que pour $x > z_0$ les dérivées $y^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$ sont monotones, $y^{(n-1)}(x) > 0$, $y^{(n-1)}(x)$ décroît et $\lim_{x \to \infty} y^{(j)}(x) \geqq 0$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Supposons que pour un entier k, $0 \leqq k \leqq n - 1$, nous ayons

$$(15) \qquad \lim_{x\to\infty} y^{(k)}(x) > 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0\,, \quad j = k + 1, k + 2, \ldots, n - 1\,.$$

Il en résulte que nous avons pour $x > z_0$

$$(16) \qquad y^{(j)}(x) > 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) > 0\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k\,;$$

pour l'entier s tel que $k < n - 2s < n$, $k < n - 2s + 1 < n$, on a

$$(17) \qquad y^{(n-2s+1)}(x) > 0\,, \quad y^{(n-2s)}(x) < 0\,, \quad x > z_0\,.$$

Ensuite, il résulte de (15) qu'il existe deux nombres $A > 0$ et $x_1 > z_0$ tels que

$$(18) \qquad y^{(k)}(x) > A \quad \text{pour} \quad x \geqq x_1\,.$$

Compte tenu de ce que $y^{(j)}(x) > 0$ pour $x > x_1$ et $j = 0, 1, \ldots, k$, nous obtenons de (18) par intégrations successives l'inégalité

$$y(x) > (k!)^{-1}\, A(x - t)^k\,, \quad x > t \geqq x_1\,.$$

Mais alors

$$(19) \qquad - y^{(n)}(x) = f(x)\, y^\alpha(x) > A^\alpha(k!)^{-\alpha}\,(x - t)^{\alpha k} f(x)\,, \quad x > t \geqq x_1\,.$$

Si $k = n - 1$, nous obtenons par intégration de (19) dans l'intervalle $\langle t, \infty)$, en tenant compte de (14) et le fait que $y^{(n-1)}(x)$ décroît, l'inégalité

$$- \lim_{x\to\infty} y^{(n-1)}(x) + y^{(n-1)}(t) > A^\alpha(k!)^{-\alpha} \int_t^\infty (x - t)^{\alpha(n-1)} f(x)\, \mathrm{d}x = \infty\,,$$

qui constitute une contradiction. Donc k ne peut pas être égal à $n - 1$.

Supposons donc $k < n - 1$. Par intégrations successives de (19) dans l'intervalle $\langle t, \infty)$ et en tenant compte de ce que $\lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0$ pour $j = n - 1, n - 2, \ldots, k + 1$, nous obtenons

$$(20) \qquad (-1)^{n-k-2}\, y^{(k+1)}(t) > A^\alpha(k!)^{-\alpha}\,.$$
$$.\,[1/(\alpha k + 1)(\alpha k + 2)\ldots(\alpha k + n - k - 2)] \int_t^\infty (x - t)^{\alpha k + n - k - 2} f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Si $\alpha k + n - k - 2 \geqq n - 1$, (20) est en contradiction avec (14). Supposons donc $\alpha k + n - k - 2 < n - 1$.

Si $n - k - 2$ est un nombre impair, le nombre $n - k - 1$ sera pair. En vertu de (17) nous aurons alors $y^{(k+1)}(x) = y^{(n-(n-k-1))}(x) < 0$ pour $x > z_0$. Donc $y^{(k)}(x)$ décroît sur l'intervalle $\langle z_0, \infty)$ et $\lim_{x\to\infty} y^{(k)}(x) > 0$. L'intégration de (20) dans l'intervalle $\langle u, \infty)$, $u > x_1$, donne

$$- \lim_{t\to\infty} y^{(k)}(t) + y^{(k)}(u) > [A/k!]^\alpha \prod_{i=1}^{n-k-1} [1/(\alpha k + i)] \int_t^\infty (x - u)^{\alpha k + n - k - 1} f(x)\, \mathrm{d}x = \infty\,,$$

car $\alpha k + n - k - 1 = n - 1 + k(\alpha - 1) > n - 1$. Mais c'est une contradiction.

Soit $n - k - 2$ un entier pair, donc $n - k - 1$ est impair. Par intégration de (20) dans l'intervalle $\langle u, v \rangle$, $x_1 < u < v$, nous obtenons

$$(21) \quad y^{(k)}(v) - y^{(k)}(u) > [A/k!]^\alpha \prod_{i=1}^{n-k-2} [1/(\alpha k + i)] \int_u^v \mathrm{d}t \int_t^\infty (x - t)^{\alpha k + n - k - 2} f(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

A présent, nous allons appliquer le suivant lemme (cf. [3]).

Lemme. *Soit* $0 \leqq \delta < 1 < m$. *Soit* $f(x) \geqq 0$ *pour* $x \geqq a$, *et* $\int_a^\infty x^{m-2+\delta} f(x)\, \mathrm{d}x < \infty$,

$$\int_a^\infty x^{m-1} f(x)\, \mathrm{d}x = \infty \,.$$

Alors pour le nombre $u > a$, *et pour* $N > 0$, *il existe un nombre* $x_2 > u$ *tel que*

$$\int_u^v \mathrm{d}t \int_t^\infty (x - t)^{m-2+\delta} f(x)\, \mathrm{d}x \geqq N(v - x_2)^\delta \,, \quad v > x_2 \,.$$

Dans notre cas, nous avons $m = n$, $\delta = k(\alpha - 1)$. Si nous tenons compte de ce que $y^{(k)}(u) > 0$ et si nous posons

$$D = [A/k!]^\alpha \prod_{i=1}^{n-k-2} [1/(\alpha k + i)]\, N \,,$$

nous obtenons à partir de (21) l'inégalité

$$y^{(k)}(v) > D(v - x_2)^{k(\alpha - 1)} \,, \quad v > x_2 > x_1 \,.$$

En l'intégrant dans l'intervalle $\langle x_2, x \rangle$ k-fois de suite, nous voyons que

$$(22) \qquad y(x) > R(x - x_2)^{\alpha k} \,, \quad x > x_2 \,.$$

Ici, nous avons pris en considération le fait que $y^{(j)}(x_2) > 0$, $j = 0, 1, \ldots, k$, en vertu de (16), et nous avons posé $R = D / \prod_{i=1}^{k} (k(\alpha - 1) + i)$. Il résulte alors de (22) que nous avons

$$- y^{(n)}(x) = f(x)\, y^\alpha(x) > R^\alpha (x - x_2)^{k\alpha^2} f(x) \,, \quad x > x_2 \,.$$

En intégrant cette inégalité comme nous l'avons fait dans le cas de (19), nous obtenons l'inégalité

$$y^{(k+1)}(t) > R^\alpha \prod_{i=1}^{n-k-2} [1/(k\alpha^2 + i)] \int_t^\infty (x - t)^{k\alpha^2 + n - k - 2} f(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

C'est une inégalité ressemblante à (20). Si l'on a $k\alpha^2 + n - k - 2 \geqq n - 1$, cette inégalité même est déjà en contradiction avec (14). Si l'on a $k\alpha^2 + n - k - 2 < < n - 1$, nous répétons notre procédé p fois, jusqu'à ce que nous ayons $k\alpha^{p-1} + + n - k - 2 < n - 1$, mais $k\alpha^p + n - k - 2 \geqq n - 1$. De cette façon, nous obtenons la contradiction en question. Le procédé decrit ci-dessus a un sens seulement si $k > 0$. Si $k = 0$, nous avons à procéder comme suit:

D'après (15) nous avons $\lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, n-1$. En intégrant $(n-1)$ fois l'équation (1) nous obtenons donc

$$y'(x) = 1/(n-2)!\,.\int_x^\infty (t-x)^{n-2} f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad x > a\,.$$

Une nouvelle intégration, dans l'intervalle $\langle x_0, v\rangle$, donne

$$y(v) - y(x_0) = 1/(n-2)!\,.\int_{x_0}^{v} \mathrm{d}x \int_x^\infty (t-x)^{n-2} f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t = 1/(n-2)!\,.$$

$$.\left[\int_{x_0}^{v} \mathrm{d}x \int_x^{v} (t-x)^{n-2} f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{v} \mathrm{d}x \int_v^{\infty} (t-x)^{n-2} f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right],$$

d'où

$$y(v) > 1/(n-1)!\,.\int_{x_0}^{v} (t-x_0)^{n-1} f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Cette inégalité entraîne

$$(v-x_0)^{n-1} f(v)\, y^\alpha(v) > \left[1/(n-1)!\,.\int_{x_0}^{v} (t-x_0)^{n-1} f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right]^\alpha (v-x_0)^{n-1} f(v)\,,$$

d'où par intégration dans l'intervalle $\langle v_1, v_2\rangle$

$$\int_{v_1}^{v_2} \left[1/(n-1)!\,.\int_{x_0}^{v} (t-x_0)^{n-1} f(t)\, y^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right]^{-\alpha} (v-x_0)^{n-1} f(v)\, y^\alpha(v)\,\mathrm{d}v >$$

$$> \int_{v_1}^{v_2} (v-x_0)^{n-1} f(v)\,\mathrm{d}v\,.$$

Une modification facile du premier membre aboutit à

$$[(n-1)!]^\alpha/(1-\alpha)\left\{\left[\int_{x_0}^{v_2} (v-x_0)^{n-1} f(v)\, y^\alpha(v)\,\mathrm{d}v\right]^{1-\alpha} -\right.$$

$$\left. - \left[\int_{x_0}^{v_1} (v-x_0)^{n-1} f(v)\, y^\alpha(v)\,\mathrm{d}v\right]^{1-\alpha}\right\} > \int_{v_1}^{v_2} (v-x_0)^{n-1} f(v)\,\mathrm{d}v\,.$$

Or, ici le premier membre est une fonction bornée de v_2, tandis que le deuxième membre n'est pas borné; c'est une contradiction qui montre que le cas de $k = 0$ est impossible.

Nous avons montré ainsi que les hypothèse (14) et (15) sont incompactibles. Donc, si (14) a lieu, et que l'on ait $y(x) > 0$ pour $x > x_0$, on doit avoir $\lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0$ pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$, et $y^{(n-2s)}(x) < 0$, $y^{(n-2s+1)}(x) > 0$, où $0 < n - 2s < n$, $0 < < n - 2s + 1 < n$. Si n est pair, $n - 1$ est impair, donc $y'(x) = y^{(n-(n-1))}(x) > 0$. Or, cela signifierait que $y(x)$ croît, on aurait donc $\lim_{x\to\infty} y(x) > 0$, mais ce n'est pas possible. Cette contradiction montre que l'équation (1) ne peut pas avoir de solutions non-oscillatoires, lorsque (14) est vérifié.

Si n est impair et (14) a lieu, alors toute solution $y(x)$ de l'équation (1) est ou bien oscillatoire, ou bien non-oscillatoire, mais dans ce cas-ci on a $\lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0$ pour $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

II. La condition est nécessaire. Soit $\int_t^\infty x^{n-1} f(x)\,dx < \infty$. Si n est un entier pair, alors on peut facilement démontrer à l'aide des approximations de Picard l'existence d'une solution $y(x)$ de l'équation intégrale

$$y(x) = 1 - 1/(n-1)!\,.\int_x^\infty (t - x)^{n-1} f(t)\, y^\alpha(t)\,dt\,,$$

satisfaisant aux conditions $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n - 2$. Cette solution est également solution de l'équation (1).

Si n est un entier impair, on peut facilement démontrer l'existence d'une solution $y(x)$ de l'équation intégrale

$$y(x) = \tfrac{1}{2} + (1/(n-1)!) \int_x^\infty (t - x)^{n-1} f(t)\, y^\alpha(t)\,dt$$

vérifiant les conditions $\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n - 1$. Cette solution est également solution de l'équation (1).

Littérature

[1] *F. V. Atkinson*: On second-order non-linear oscillations. Pacific J. Math., *5* (1955), Suppl., 643–647.

[2] *Š. Belohorec*: Oscilatorické riešenia istej nelineárnej rovnice druhého rádu. Matem.-fyz. čas. SAV, *11* (1961).

[3] *J. G. Mikusiński*: On Fite's oscillation theorems. Colloquium Math., *2* (1949), 34–39.

Резюме

КОЛЕБАТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (1)

ИМРИХ ЛИЧКО и МАРКО ШВЕЦ (Imrich Ličko, Marko Švec), Братислава

В работе выводятся необходимые и достаточные условия для колебательности дифференциального уравнения

(1) $$y^{(n)} + f(x)\, y^\alpha = 0\,, \quad \text{где } n > 1 - \text{натуральное число, } \alpha = \frac{p}{q}\,,$$

причем p и q — нечетные и не имеющие общих делителей натуральные числа.

Под решением этого уравнения мы понимаем решение на интервале $\langle b, \infty)$, под колебательным решением подразумевается такое решение $y(x)$, для которого существует последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \infty$ и $y(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $f(x)$ *— непрерывная положительная функция на интервале* $\langle a, \infty)$. *Пусть* $n > 1$, $0 < \alpha < 1$.

а) *Пусть* n *— четное число. Тогда для того, чтобы все решения уравнения* (1) *были колебательными, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_t^{\infty} x^{\alpha(n-1)} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty\,, \quad t > a\,. \tag{2}$$

б) *Пусть* n *— нечетное число. Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы каждое решение уравнения* (1) *было или колебательным или чтобы для больших* x *оно стремилось монотонно (вместе со своими производными до порядка* $n - 1$ *включительно) к нулю, является условие* (2).

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ *— непрерывная положительная функция на интервале* $\langle a, \infty)$. *Пусть* $n > 1$, $\alpha > 1$.

а) *Пусть* n *— четное число. Тогда для того, чтобы все решения уравнения* (1) *были колебательными, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_t^{\infty} x^{n-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty\,, \quad t > a\,. \tag{14}$$

б) *Пусть* n *— нечетное число. Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы каждое решение уравнения* (1) *или было колебательным или стремилось вместе со своими производными до порядка* $n - 1$ *включительно монотонно к нулю, является условие* (14).