

Boris A. Pasyukov

О змеевидных бикомпактах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 3, 473–476

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100578>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О ЗМЕЕВИДНЫХ БИКОМПАКТАХ

Б. ПАСЫНКОВ, Москва

(Поступило в редакцию 5/VII 1962 г.)

Доказывается, что существует змеевидный бикомпакт S с $\dim S = \text{ind } S = \text{Ind } S = 1$, не являющийся пределом никакого спектра из одномерных полиэдров, и что теорема суммы для размерностей ind и Ind не верна даже в классе змеевидных бикомпактов.

Бикомпакт называется змеевидным, если в любое его открытое покрытие можно вписать такое открытое покрытие $\nu = \{U_1, \dots, U_s\}$, что каждое множество U_i при $1 < i < s$ перескает лишь множества U_{i-1} и U_{i+1} , а множества U_1 и U_s пересекают лишь множества U_2 и U_{s-1} соответственно.

Известно, что любой змеевидный компакт представляется в виде предела обратного спектра (определение см. в [1]) из отрезков. В [2] R. H. ROSEN поставил вопрос о справедливости сформулированного утверждения для произвольного змеевидного бикомпакта. Отвечая на этот вопрос, S. MARDEŠIĆ построил, [3], змеевидный бикомпакт C с $\text{ind } C = 2$, откуда следует, что этот бикомпакт не будет пределом никакого спектра из 1-мерных полиэдров, в частности из отрезков. Этот результат Mardešić'a можно усилить следующим образом:

Теорема 1. *Существует змеевидный бикомпакт S с $\dim S = \text{ind } S = \text{Ind } S = 1$, не являющийся пределом никакого спектра из одномерных полиэдров, в частности из отрезков.*

Вторым результатом статьи является

Теорема 2. *Теорема суммы для размерностей ind и Ind не верна даже в классе змеевидных бикомпактов (будет построен такой змеевидный бикомпакт R с $\text{Ind } R \geq \text{ind } R = 2 > 1$, который представляется в виде суммы двух экземпляров змеевидного бикомпакта S , а для него $\text{ind } S = \text{Ind } S = 1$).¹⁾*

Бикомпакт R дает еще один пример змеевидного (т. е. 1-мерного в смысле \dim) бикомпакта, двумерного в смысле ind и Ind (первый такой пример содержится в [3]).

¹⁾ Это утверждение было опубликовано автором в [4].

Теорема 2 является усилением результата О. В. Локуциевского из заметки [5], в которой опровергается справедливость теоремы суммы для размерностей ind и Ind бикомпактов.

Построение бикомпакта S начнем с построения вспомогательного бикомпакта S' . Через $L = \{x\}$ обозначим трансфинитную прямую (в [6] на стр. 871, этот бикомпакт обозначен через $TA(\omega_1 + 1)$, а в [5] этот бикомпакт обозначен через P). Точки x из L , естественным образом соответствующие трансфинитным числам $\alpha \leq \omega_1$, будем так и обозначать через α . Каждое множество $J_\alpha = \{x : \alpha \leq x \leq \alpha + 1\} \subset L$, $\alpha < \omega_1$, гомеоморфно отрезку $[0, 1]$, поэтому каждую точку $x \in J_\alpha$ будем обозначать соответствующей цифрой с индексом α внизу, например, точка $\alpha + 1$ получит обозначения 1_α и $0_{\alpha+1}$. Отрезок $[0, 1]$ обозначим через $I = \{y\}$; канторово множество, обычным образом лежащее на отрезке I , обозначим через C . Произведение $L \times I = \{(x, y)\}$ обозначим через M ; множества $\alpha \times I$ и $\alpha \times C \subset M$, $\alpha \leq \omega_1$, обозначим соответственно через I_α и C_α .

Бикомпакт S' состоит из суммы:

- (1) отрезков I_α для всех $\alpha \leq \omega_1$;
- (2) отрезков $J'_\alpha = \{(x, y) : 0_\alpha \leq x \leq (\frac{1}{3})_\alpha, y = 0\}$ для всех $\alpha < \omega_1$;
- (3) отрезков $J''_\alpha = \{(x, y) : (\frac{2}{3})_\alpha \leq x \leq 1_\alpha, y = 1\}$ для всех $\alpha < \omega_1$;
- (4) множеств $K_\alpha = \{(x, y) : (\frac{1}{3})_\alpha \leq x \leq (\frac{2}{3})_\alpha, y \in C\}$ для всех $\alpha < \omega_1$;
- (5) всех отрезков $I_\alpha(y_1, y_2)$, $\alpha < \omega_1$, соединяющих такие точки: $((\frac{1}{3})_\alpha, y_1)$ и $((\frac{2}{3})_\alpha, y_2) \in J_\alpha \times I$, что точки y_1 и $y_2 \in I$ являются концами одного из смежных к множеству C интервалов, причем $y_2 > y_1$.²⁾

Бикомпакт S получается из бикомпакта S' склеиванием каждого смежного к канторову совершенному множеству C_{ω_1} интервала и концов этого интервала в точку. Образом отрезка I_{ω_1} после этого склеивания будет вновь отрезок, который мы обозначим через \tilde{I}_{ω_1} . Отображение (склеивание) отрезка I_{ω_1} на отрезок \tilde{I}_{ω_1} обозначим через p . Точке $t \in \tilde{I}_{\omega_1}$ приписываем в качестве координат координаты всех точек из прообраза $p^{-1}(t)$. Ясно, что при этом некоторые точки из \tilde{I}_{ω_1} получают в соответствие континуум пар координат (таких точек на \tilde{I}_{ω_1} счетное множество, мы их будем называть двойными), а некоторые точки из \tilde{I}_{ω_1} получают в соответствие лишь одну пару координат (такие точки мы назовем одинарными).

Покажем, что бикомпакт S является змеевидным.

Обозначим через Π_α и Π'_α отображения бикомпактов S и S' соответственно, являющиеся тождественными на множестве $S'_\alpha = \{(x, y) : x < \alpha\}$, и отождествляющими каждую точку $(x, y) \in S$ или S' при $x \geq \alpha$ с точкой (ω_1, y) .³⁾ Бикомпакты $\Pi_\alpha(S)$ и $\Pi'_\alpha(S')$ обозначим соответственно через X_α и X'_α . При $\beta > \alpha$

²⁾ Отрезок I рассматривается в естественном порядке.

положим отображения $\Pi_\alpha^\beta : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ и $\Pi_\alpha^{\prime\beta} : X'_\beta \rightarrow X'_\alpha$ такими, чтобы выполнялись соотношения $\Pi_\alpha = \Pi_\alpha^\beta \cdot \Pi_\beta$ и $\Pi'_\alpha = \Pi_\alpha^{\prime\beta} \cdot \Pi'_\beta$ (чем отображения Π_α^β и $\Pi_\alpha^{\prime\beta}$ однозначно определяются).

Бикомпакты X_α и отображения Π_α^β , бикомпакты X'_α и отображения $\Pi_\alpha^{\prime\beta}$ образуют трансфинитные вполне упорядоченные спектры $\Sigma = \{X_\alpha, \Pi_\alpha^\beta\}$ и $\Sigma' = \{X'_\alpha, \Pi_\alpha^{\prime\beta}\}$, $\alpha < \omega_1$, проекции которых являются отображениями „на“. Нетрудно видеть, что для каждого предельного числа $\alpha_0 \leq \omega_1$ бикомпакты X_{α_0} и X'_{α_0} являются пределами спектров $\Sigma_{\alpha_0} = \{X_\alpha, \Pi_\alpha^\beta\}$ и $\Sigma'_{\alpha_0} = \{X'_\alpha, \Pi_\alpha^{\prime\beta}\}$, $\alpha < \alpha_0$, соответственно. В частности, бикомпакт S является пределом спектра Σ .

Бикомпакты X_1 и X'_1 являются (что нетрудно усмотреть из построения бикомпактов S и S') змеевидными. Предположим, что все бикомпакты X_α и X'_α при $\alpha < \beta$ являются змеевидными.

(1) Если число β предельное, то по лемме I из [3] (утверждающей, что предел спектра из змеевидных бикомпактов с проекциями „на“ сам является змеевидным бикомпактом) бикомпакты X_β и X'_β будут змеевидными.

(2) Если число β не предельное, то бикомпакт X_β равен сумме змеевидных бикомпактов $X'_{\beta-1}$ ⁴⁾ и $\Pi_\beta(\{(x, y) \in S : x > \beta - 1\} \cup (\beta - 1, 0))$, пересекающихся по концевой⁵⁾ для каждого из этих бикомпактов точке $(\beta - 1, 0)$, т. е. по лемме 2 из [3] бикомпакт X_β будет змеевидным. Аналогичным образом доказывается змеевидность бикомпакта X'_β .

Змеевидность всех бикомпактов X_α , $\alpha < \omega_1$ влечет за собой (по лемме I из [3]) змеевидность бикомпакта S .

В силу змеевидности бикомпакта S имеем равенство $\dim S = 1$. Так как множество $M \setminus I_{\omega_1}$ локально имеет счетную базу, то во всех точках $t_0 \in S \setminus \tilde{I}_{\omega_1}$ выполнено соотношение $\text{ind}_{t_0} S = 1$. Если точка $t_0 = (\omega_1, y_0)$ лежит на отрезке \tilde{I}_{ω_1} , то из построения спектра Σ видно, что в любой окрестности этой точки содержится ее „прямоугольная“ окрестность $Vt_0 = \{(x, y) : x > \alpha_0, y_1 < y < y_2\}$, $y_1 < y_0 < y_2$, где y_1 и y_2 лежат в некоторых смежных к множеству S интервалах, причем $t_0 \neq (\omega_1, y_1)$ и $t_0 \neq (\omega_1, y_2)$. Граница окрестности Vt_0 0-мерна, т. е. вообще $\text{ind} S = 1$. Так как для бикомпактов из их 1-мерности в смысле ind следует их 1-мерность в смысле Ind , то $\dim S = \text{ind} S = \text{Ind} S = 1$.

Покажем теперь, что бикомпакт S не является пределом никакого обратного спектра из 1-мерных полиэдров.

Если выбросить из бикомпакта S : (1) все отрезки $I_\alpha(y_1, y_2)$, за исключением концов этих отрезков, и (2) точки всех интервалов отрезков I_α , $\alpha < \omega_1$, смежных к множествам S_α , то получим бикомпакт, гомеоморфный бикомпакту L из [7] (пример 3), который не является пределом никакого спектра из 1-мерных полиэдров даже с проекциями „в“. По одной теореме из [7] (утверждающей, что лю-

³⁾ Напомним, что для бикомпакта S при различных y_1 и y_2 точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) могут отождествиться с одной и той же точкой отрезка \tilde{I}_{ω_1} .

⁴⁾ Бикомпакт $X'_{\beta-1}$ является змеевидным по индуктивному предположению.

⁵⁾ Определение концевой точки см., например, в [3], стр. 223.

бой подбикомпакт F бикомпакта X , являющегося пределом спектра из n -мерных полиэдров с проекциями „в“, сам является пределом спектра из n -мерных полиэдров с проекциями „в“) можно заключить, что бикомпакт S не будет пределом никакого спектра из 1-мерных полиэдров, и тем более не будет пределом никакого спектра из отрезков. Теорема 1 доказана.

Из двух экземпляров ${}_1S$ и ${}_2S$ бикомпакта S (так гомеоморфно склеивая их по отрезкам ${}_1\tilde{I}_{\omega_1}$ и ${}_2\tilde{I}_{\omega_1}$, чтобы двойные точки отрезка ${}_1\tilde{I}_{\omega_1}$ склеивались с одинарными точками отрезка ${}_2\tilde{I}_{\omega_1}$) как в [5] получаем бикомпакт R с $\dim R = 1$ (по теореме суммы для размерности \dim) и с $\text{Ind } R \geq \text{ind } R = 2$.

Бикомпакт R является змеевидным, ибо для него (аналогично тому, как это было сделано для бикомпакта S) можно построить трансфинитный вполне упорядоченный спектр из змеевидных бикомпактов.⁶⁾

Литература

- [1] П. С. Александров: О понятии пространства в топологии, Усп. мат. н., 2, вып. 1 (17), 1947, 5—57
- [2] R. H. Rosen: Fixed points for multi-valued functions on snake-like continua. Proc. Amer. Math. Soc., 10, 1959, 167—173.
- [3] S. Mardešić: Chainable continua and inverse limits. Glasnik Mat.-Fis. i Astr., 14, N 3, 1959, 219—232.
- [4] Б. А. Пасынков: Об обратных спектрах и размерности. Докл. АН СССР, 138, № 5, 1961, 1013—1015.
- [5] О. В. Локуцкий: О размерности бикомпактов. Докл. АН СССР, 67, № 2, 1949, 217—219.
- [6] П. С. Александров, П. С. Урысон: О компактных топологических пространствах. Труды по топологии и другим областям математики П. С. Урысона, Т. 2, Москва, 1951, 855—963.
- [7] Б. А. Пасынков: О спектрах и размерности топологических пространств. Мат. сб., 57 (99), № 4, 1962, 449—476.

Summary

ON SNAKE-LIKE COMPACT SPACES

B. PASYNKOV, Moscow

The following propositions are proved:

Theorem 1. *There exists a snake-like compact space S , $\dim S = \text{ind } S = \text{Ind } S = 1$, which cannot be expressed as an inverse limit of one-dimensional polyhedra.*

Theorem 2. *The sum theorem for the dimensions ind and Ind does not hold in the class of snake-like spaces; more precisely, there exists a snake-like compact space R such that (i) $\text{ind } R = 2$, (ii) R is a union of two spaces homeomorphic with the space S from Theorem 1.*

⁶⁾ Выражаясь неточно, такой спектр для R „склеивается“ из двух экземпляров спектра S .