Czechoslovak Mathematical Journal

Václav Havel

Über die begleitenden Normaldreibeine der Fläche $\mathcal{A}^2_{0,3}$, I

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 3, 327–334

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100572`

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *13* (*88*) ПРАГА 20. IX. 1963 г., No 3

ÜBER DIE BEGLEITENDEN NORMALDREIBEINE DER FLÄCHE $\mathscr{A}^2_{0,3}$, I

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Eingelangt den 28. April 1961)

Mit Hilfe der Methode der scheinbaren Einbettung in affinen Raum werden in diesem Artikel begleitende Normaldreibeine der Fläche des affin zusammenhängenden Raumes hergeleitet: für betreffende Koordinatenachsen werden die asymptotischen Tangenten und die Demoulinsche Gerade gewählt. Es wird die Analyse der einzelnen Möglichkeiten für die Wahl der Normaldreibeine durchgeführt.

EINFÜHRUNG

Wir benützen die in der Arbeit [4c] erläuterte *Methode der scheinbaren Einbettung in affinen Raum.* Im Artikel [5] werden Verallgemeinerungen der Begriffe wie affine Normale, oskulierende Quadrik (Liesche u. Darbouxsche Quadrik) u.s.w. für die Flächen im $\mathscr{A}^3_{0,3}$ eingeführt. Ich schliesse mich zu diesem Thema an und mit soweit möglich folgerichtiger Anwendung der erwähnten Methode untersuche ich das Problem des begleitenden Normaldreibeins der Fläche im $\mathscr{A}^3_{0,3}$ und gewinne solche Dreibeine, die beim Übergang zum gewöhnlichen äquiaffinen Raum in Frenetsches Dreibein ([3b], S. 398) übergehen. Ich benütze nur die einfachsten geometrischen Begriffe: die Tangente, Tangential – u. Schmiegebene, asymptotische Linie u. Demoulinsche Gerade, und ich beschränke mich auf die Flächen mit reellen Asymptotenliniennetz. Die geometrische Bedeutung der Endpunkte von Normaldreibeinen und der affinen Torsion und Krümmung möchte ich im zweiten Teile dieser Arbeit untersuchen. Auch die Untersuchung der Flächen ohne reellen Asymptotenlinien verdient eine besondere Aufmerksamkeit.

1. ZUM BEGRIFF DER FLÄCHE $\mathscr{A}^2_{0,3}$

Die Fläche $\mathscr{A} = \mathscr{A}^2_{0,3}$ kann man nach [4b] als eine elementare zweidimensionale Mannigfaltigkeit ([2b], S. 328–347) auffassen, mit reellen u- und v-Parameterlinien und mit dem System von formalen Gleichungen

$$(R) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{d}M &= \omega_0^1 J_1 + \omega_0^2 J_2 + \omega_0^3 J_3\,, & \boldsymbol{d}J_1 &= \omega_1^1 J_1 + \omega_1^2 J_2 + \omega_1^3 J_3\,,\\ \boldsymbol{d}J_2 &= \omega_2^1 J_1 + \omega_2^2 J_2 + \omega_2^3 J_3\,, & \boldsymbol{d}J_3 &= \omega_3^1 J_1 + \omega_3^2 J_2 + \omega_3^3 J_3\,, \end{aligned}$$

wo $\omega_l^j = a_l^j(u, v)\,\mathrm{d}u + b_l^j(u, v)\,\mathrm{d}v$ $(l = 0, 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ mit passenden Funktionen a_l^j, b_l^j, und wo $M = M(u, v)$, $J_i = J_i(u, v)$ $(i = 1, 2, 3)$ Zentrum und Basisvektoren des affinen Tangentialraumes im Punkte $(u, v) \in \mathscr{A}$, welcher mit $M(u, v)$ identifiziert wird, darstellt. Das betreffende Dreibein bezeichnen wir mit R und die Fläche $\mathscr{A}$ mit dem Dreibein R als $\mathscr{A}(R)$. Das System (R) drückt die Korrespondenz zwischen den Tangentialräumen in konsekutiven Flächenpunkten aus.

Mit dem Symbol $\boldsymbol{d}$ werden wir im wesentlichen gerade so wie mit dem Symbol des Totaldifferentials operieren (obwohl sich es um einen allgemeineren Begriff handelt) und wir werden die weiteren lokalen Berechnungen so führen, als ob wir uns im gewöhnlichen affinen Raum befänden, jedoch mit folgerichtiger Unbeachtung der Integrabilitätsbedingungen; ausdrücklich setzen wir $\boldsymbol{d}u = \mathrm{d}u$, $\boldsymbol{d}v = \mathrm{d}v$, u.s.w. Durch dieses Verfahren leiten wir lokale Resultate her, die sich immer zu den zugehörenden Tangentialräumen in den Flächenpunkten beziehen. Die Rede über die Tangente, Tangentialebene u.s.w. im Flächenpunkte hat im folgenden nur die formale Bedeutung im Sinne der erwähnten Methode. Zu den Einzelheiten und der Begründung dieser Methode verweisen wir auf den Artikel [4c]. Bemerken wir noch, dass die Fläche $\mathscr{A}$ natürlicherweise in den Raum $\mathscr{A}_{3,3}^0$ eingebettet werden kann und dass die weiter untersuchten Eigenschaften von der (im allgemeinen mehrdeutigen) Einbettungsweise im gewissen Sinne unabhängig sind. Das Studium der von der Einbettungsweise abhängingen Flächeneigenschaften bietet ein selbständiges Problem dar.

2. ASYMPTOTISCHE NORMALDREIBEINE

Es sei die Fläche $\mathscr{A}(R)$ gegeben; das begleitende Dreibein R habe den Anfangspunkt M und die Basisvektoren J_1, J_2, J_3. Die Vektoren J_1, J_2 seien in der Tangentialebene der Fläche $\mathscr{A}$ im Punkte M gelegt, d.h. $\boldsymbol{d}M$ sei lineare Kombination von J_1, J_2. Diese Forderung führt zur Bedingung

$$a_0^3 = b_0^3 = 0\,. \tag{1}$$

Fordern wir weiter, der Vektor J_1 bzw. J_2 sei tangential zur v- bzw. u-Parameterlinie durch M. Dies führt zur Bedingung $\boldsymbol{d}M = (a_0^1\,\mathrm{d}u + 0\,\mathrm{d}v)\,J_1 + (0\,\mathrm{d}u + b_0^1\,\mathrm{d}v)\,J_2$, d.h.

$$a_0^2 = b_0^1 = 0\,. \tag{2}$$

Das Annullieren von a_0^1, b_0^2 führt auf degenerierte Fälle, so dass man voraussetzen kann, dass $a_0^1 \neq 0$, $b_0^2 \neq 0$; beim geeigneten Parameterwechsel kann man erzielen, dass in jedem Flächenpunkte

$$a_0^1 = b_0^2 = 1 \tag{3}$$

gilt.

Die Asymptotenlinien der Fläche $\mathscr{A}$ seien durch die lineare Abhängigkeit der zugehörigen Vektoren J_1, J_2, $\boldsymbol{d}^2M$ charakterisiert (es handelt sich gewiss um eine geometrische Eigenschaft: die durch die Vektoren $\boldsymbol{dM}$, $\boldsymbol{d^2M}$ gegebene Schmiegebene im Punkte M zur untersuchten Linie deckt sich mit der Tangentialebene im M zur $\mathscr{A}$). Nach Ausschreibung der Relation bekommen wir $a_1^3\,\mathrm{d}u^2 + (b_1^3 + a_2^3)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + b_2^3\,\mathrm{d}v^2 = 0$.

Im weiteren beschränken wir uns auf den Fall, in welchem das reelle Asymptotenliniennetz existiert, d.h. auf den Fall $(b_1^3 + a_2^3)^2 - 4a_1^3b_2^3 > 0$.

Die Wahl der Asymptotenlinien für Parameterlinien äussert sich in den Bedingungen

$$b_1^3 + a_2^3 \neq 0\,, \quad a_1^3 = b_2^3 = 0\,. \tag{4}$$

Jetzt führen wir die Transformation $J_1^* = J_1$, $J_2^* = J_2$, $J_3^* = \frac{1}{2}(b_1^3 + a_2^3)\,J_3$ durch. Nach der Substitution in (R) bekommen bei gleichzeitiger Geltung von (1), (2), (3), (4)

$$\boldsymbol{dM} = \mathrm{d}u\,J_1 + \mathrm{d}v\,J_2\,, \quad \boldsymbol{dJ}_1 = \omega_1^1 J_1 + \omega_1^2 J_2 + \overset{*}{b}{}_1^3\,\mathrm{d}v\,J_3^*\,,$$
$$\boldsymbol{dJ}_2 = \omega_1^2 J_1 + \omega_2^2 J_2 + \overset{*}{a}{}_2^3\,\mathrm{d}u\,J_3^*\,, \quad \boldsymbol{dJ}_3 = \overset{*}{\omega}{}_1^3 J_1 + \overset{*}{\omega}{}_2^3 J_2 + \overset{*}{\omega}{}_3^3 J_3^*\,,$$

wo $\overset{*}{b}{}_1^3 = 2b_1^3/(b_1^3 + a_2^3)$, $\overset{*}{a}{}_2^3 = 2a_2^3/(b_1^3 + a_2^3)$, $\overset{*}{b}{}_1^3 + \overset{*}{a}{}_2^3 = 2$.

Setzen wir also (Sternchen werden weggelassen)

$$b_1^3 = 1 + h\,, \quad a_2^3 = 1 - h\,, \tag{5}$$

wo h die sog. *affine Flächentorsion* ist, so erhalten wir das System

$$(R_1) \quad \begin{aligned} &\boldsymbol{dM} = \mathrm{d}u\,J_1 + \mathrm{d}v\,J_2\,, \quad \boldsymbol{dJ}_1 = \omega_1^1 J_1 + \omega_1^2 J_2 + (1 + h)\,\mathrm{d}v\,J_3\,, \\ &\boldsymbol{dJ}_2 = \omega_2^1 J_1 + \omega_2^2 J_2 + (1 - h)\,\mathrm{d}u\,J_3\,, \quad \boldsymbol{dJ}_3 = \omega_3^1 J_1 + \omega_3^2 J_2 + \omega_3^3 J_3\,. \end{aligned}$$

Es sei die Fläche $\mathscr{A}(R)$ gegeben, setzen wir die Geltung von (1), (2), (3) voraus und untersuchen wir das Punktetripel $M = (u_0, v_0)$, $M' = (u_0, v_0 + \eta)$, $M'' = (u_0 + \xi, v_0)$, wobei $\xi \to 0$, $\eta \to 0$. Es sei t_u bzw. t_v die Tangente zur u-Linie bzw. v-Linie im Punkte M, t_v' bzw. t_u'' die Tangente zur v-Linie im M' bzw. zur u-Linie im M'' und ϱ_u^η bzw. ϱ_v^ξ die Ebene durch t_u parallel mit t_u'' bzw. die Ebene durch t_v parallel mit t_v' (dabei fordern wir t_u nicht $\| t_u''$, t_v nicht$\|$ t_v'). Ist $b_1^3 \neq 0$, $a_2^3 \neq 0$, so konvergiert die Schnittlinie der Ebenen ϱ_u^η, ϱ_v^ξ mit $\xi \to 0$, $\eta \to 0$ gegen die sog. *Demoulinsche Gerade* bezüglich des gegebenen Parameterliniennetzes. Die Demoulinsche Gerade ist die Schnittlinie der Ebenen ϱ_u, ϱ_v mit den Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \text{d.h.}$$

$$a_2^3x^1 - a_2^1x^3 = 0\,, \quad b_1^3x^2 - b_1^2x^3 = 0\,.$$

Die Demoulinsche Gerade ist also durch den Vektor $(a_2^1/a_2^3,\, b_1^2/b_1^3,\, 1)$ bestimmt.

Zur Begründung dieser Konstruktion bestimmen wir t_u, t''_u, t_v, t'_v durch $J_2(\mathrm{d}v = 0)$, $J_2 + \boldsymbol{d}J_2(\mathrm{d}v = 0)$, $J_1(\mathrm{d}u = 0)$, $J_1 + \boldsymbol{d}J_1(\mathrm{d}u = 0)$. Mit $\xi \to 0$, $\eta \to 0$ konvergiert die Ebene ϱ_u^η bzw. ϱ_v^ξ gegen die durch J_2, $\boldsymbol{d}J_2(\mathrm{d}v = 0)$ bzw. J_1, $\boldsymbol{d}J_1(\mathrm{d}u = 0)$ bestimmte Ebene, d.h. gegen die durch die Punkte $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, (a_2^1, a_2^2, a_2^3) bzw. $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, (b_1^1, b_1^2, b_1^3) gehende Ebene, d.h. gegen die Ebene ϱ_u bzw. ϱ_v. Siehe [3b], S. 431, Übungsaufgabe 1b.

Ist also $b_1^3 \neq 0$, $a_2^3 \neq 0$, so kann man für die untersuchte Fläche die Demoulinsche Gerade als die dritte Koordinatenachse des begleitenden Dreibeins wählen; diese Wahl führt zur Bedingung

$$b_1^2 = a_2^1 = 0\,. \tag{6}$$

Dazu gehört das System der Gleichungen

$$(R_2)\qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{d}M = \mathrm{d}u\, J_1 + \mathrm{d}v\, J_2\,, \quad \boldsymbol{d}J_1 = \omega_1^1 J_1 + a_1^2\, \mathrm{d}u\, J_2 + \omega_1^3 J_3\,,\\ &\boldsymbol{d}J_2 = b_2^1\, \mathrm{d}v\, J_1 + \omega_2^2 J_2 + \omega_2^3 J_3\,, \quad \boldsymbol{d}J_3 = \omega_3^1 J_1 + \omega_3^2 J_2 + \omega_3^3 J_3\,, \end{aligned}$$

wo

$$b_1^3 \neq 0\,, \quad a_2^3 \neq 0\,. \tag{7}$$

Verwenden wir für das Dreibein R alle Bedingungen (1)–(7), so bekommen wir *das asymptotische Normalsystem*

$$(R_a)\qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{d}M = \mathrm{d}u\, J_1 + \mathrm{d}v\, J_2\,, \quad \boldsymbol{d}J_1 = \omega_1^1 J_1 + \beta\, \mathrm{d}u\, J_2 + (1 + h)\, \mathrm{d}v\, J_3\,,\\ &\boldsymbol{d}J_2 = \gamma\, \mathrm{d}v\, J_1 + \omega_2^2 J_2 + (1 - h)\, \mathrm{d}u\, J_3\,, \quad \boldsymbol{d}J_3 = \omega_3^1 J_1 + \omega_3^2 J_2 + \omega_3^3 J_3\,, \end{aligned}$$

wo

$$a_1^2 = \beta\,, \quad b_2^1 = \gamma \tag{8}$$

gesetzt wurde.

Bemerken wir, dass dabei die Bedingung (7) in die Bedingung $h \neq \pm 1$ übergeht. In diesem Artikel verzichten wir auf die Flächen mit der Torsion ± 1.

3. DIE MENGE ALLER ASYMPTOTISCHEN NORMALDREIBEINE

Es sei wieder die Fläche $\mathscr{A}(R_a)$ gegeben und untersuchen wir die Transformation

$$J_1^* = \alpha_1 J_1\,, \quad J_2^* = \alpha_2 J_2\,, \quad J_3^* = \alpha_3 J_3\,, \tag{9}$$

wo α_1, α_2, α_3 geeignete überall von Null verschiedene Funktionen der Argumente u, v sind, mit nachträglicher zulässigen Parameteränderung

$$u = f(\bar{u})\,, \quad v = g(\bar{v})\,. \tag{10}$$

Geht dabei das System (R_a) in das asymptotische Normalsystem wieder, so handelt es sich um die sog. *asymptotische Normaltransformation.*

Führen wir nun die Transformation (9) durch. Die erste Gleichung von (R_a) lassen wir unverändert und durch direkte Rechnung bestimmen wir die Ausdrücke für für $dJ_i^* = d(\alpha_i J_i)$; $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
dJ_1^* &= (\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1\omega_1^1)\, J_1 + \alpha_1\beta\, \mathrm{d}u\, J_2 + \alpha_1(1 + h)\, \mathrm{d}v\, J_3\,, \\
dJ_2^* &= \alpha_2\gamma\, \mathrm{d}v\, J_1 + (\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha\omega_2^2)\, J_2 + \alpha_2(1 - h)\, \mathrm{d}u\, J_3\,, \\
dJ_3^* &= \alpha_3\omega_3^1 J_1 + \alpha_3\omega_3^2 J_2 + (\mathrm{d}\alpha_3 + \alpha_3\omega_3^3)\, J_3\,,
\end{aligned}$$

also nach der Substitution aus (9)

$$\begin{aligned}
dM &= \frac{\mathrm{d}u}{\alpha_1} J_1^* + \frac{\mathrm{d}v}{\alpha_2} J_2^*\,, \\
dJ_1^* &= \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1} + \omega_1^1\right) J_1^* + \frac{\alpha_1\beta}{\alpha_2}\, \mathrm{d}u\, J_1^* + \frac{\alpha_1(1 + h)}{\alpha_3}\, \mathrm{d}v\, J_3^*\,, \\
dJ_2^* &= \frac{\alpha_2\gamma}{\alpha_1}\, \mathrm{d}v\, J_1^* + \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2} + \omega_2^2\right) J_2^* + \frac{\alpha_2(1 - h)}{\alpha_3}\, \mathrm{d}u\, J_3^*\,, \\
dJ_3^* &= \frac{\alpha_3\omega_3^1}{\alpha_1} J_1^* + \frac{\alpha_3\omega_3^2}{\alpha_2} J_2^* + \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_3}{\alpha_3} + \omega_3^3\right) J_3^*\,.
\end{aligned}$$

Weiter führen wir die Substitution (10) durch

$$\begin{aligned}
dM &= \frac{f_{\bar u}}{\alpha_1}\, \mathrm{d}\bar u\, J_1^* + \frac{g_{\bar v}}{\alpha_2}\, \mathrm{d}\bar v\, J_2^*\,, \\
dJ_1^* &= \bar\omega_1^1 J_1^* + \frac{\alpha_1\beta f_{\bar u}}{\alpha_2}\, \mathrm{d}\bar u\, J_2^* + \frac{\alpha_1(1 + h)\, g_{\bar u}}{\alpha_3}\, \mathrm{d}\bar v\, J_3^*\,, \\
dJ_2^* &= \frac{\alpha_2\gamma g_{\bar v}}{\alpha_1}\, \mathrm{d}\bar v\, J_1^* + \bar\omega_2^2 J_2^* + \frac{\alpha_2(1 - h) f_{\bar u}}{\alpha_3}\, \mathrm{d}\bar u\, J_3^*\,, \\
dJ_3^* &= \bar\omega_3^1 J_1^* + \bar\omega_3^2 J_2^* + \bar\omega_3^3 J_3^*\,.
\end{aligned}$$

Aus der Forderung $dM = \mathrm{d}\bar u\, J_1^* + \mathrm{d}\bar v\, J_2^*$ folgt nun $f_{\bar u} = \alpha$, $g_{\bar v} = \alpha_2$, und aus der Forderung

$$\frac{\alpha_1\alpha_2(1 + h)}{\alpha_3} = 1 + \bar h\,, \quad \frac{\alpha_1\alpha_2(1 - h)}{\alpha_3} = 1 - \bar h$$

folgt $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3$. Im Falle $\alpha_1\alpha_2/\alpha_3 \neq 1$ ist nämlich $\bar h = (\alpha_1\alpha_2/\alpha_3)(1 + h) - 1 = 1 - (\alpha_1\alpha_2/\alpha_3)(1 - h)$, und weiter $\alpha_1\alpha_2/\alpha_3 - 1 = 1 - \alpha_1\alpha_2/\alpha_3$, was der Anfangsgleichung widerspricht. Die Betrachtung ist umkehrbar und das gewonnene Resultat lautet nun:

Satz 1. *Die Transformation* (9) *bezüglich der gegebenen Fläche* $\mathscr{A}(R_a)$ *ist asymptotisch normal, wenn und nur wenn* $f_{\bar u} = \alpha_1$, $g_{\bar v} = \alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3$.

Zusatz. *Wählt man in der Bedingung des Satzes* $\alpha_3 = 1$, *so ist* $\alpha_1 = 1/\alpha_2 =$ const. *und die Funktionen* f, g *sind linear.*

Untersuchen wir die Fläche $\mathscr{A}(R)$. Das System (R) heisse *normal*, wenn es vom folgenden Typus ist:

$$(R_n)\quad \begin{aligned} &\boldsymbol{d}M = \omega^1 J_1 + \omega^2 J_2\,, \quad \boldsymbol{d}J_1 = \omega_1^1 J_1 + \beta\omega^1 J_2 + (1 + h)\,\omega^2 J_3\,,\\ &\boldsymbol{d}J_2 = \gamma\omega^2 J_1 + \omega_2^2 J_2 + (1 - h)\,\omega^1 J_3\,, \quad \boldsymbol{d}J_3 = \omega_3^1 J_1 + \omega_3^2 J_2 + \omega_3^3 J_3\,. \end{aligned}$$

Satz 2. a) *Jede zulässige Parameteränderung*

$$u = f(\bar{u}, \bar{v})\,, \quad v = g(\bar{u}, \bar{v}) \tag{11}$$

bezüglich der gegebenen Fläche $\mathscr{A}(R_a)$ führt (R_a) wieder ins Normalsystem über.

b) *Es existiert zulässige Parameteränderung* (11) *bezüglich der gegebenen Fläche $\mathscr{A}(R_n)$, welche das System (R_n) in asymptotisches Normalsystem überführt.*

Die Behauptung a) des Satzes bekommen wir sofort nach der Durchführung der Substitution (11), wo $M(u, v) = M(f, g)$, $J_i(u, v) = J_i(f, g)$ und weiter $\bar{\omega}^1 = f_{\bar{u}}\,\mathrm{d}\bar{u} + f_{\bar{v}}\,\mathrm{d}\bar{v} = \mathrm{d}u$, $\bar{\omega}^2 = g_{\bar{u}}\,\mathrm{d}\bar{u} + g_{\bar{v}}\,\mathrm{d}\bar{v} = \mathrm{d}v$, $\omega_i^j(u, v) = \omega_i^j(f, g) = \bar{\omega}_i^j(\bar{u}, \bar{v})$ für $i, j = 1, 2, 3$.

Zum Beweis der Behauptung b) suchen wir zuerst die Faktoren $1/\alpha_1$, $1/\alpha_2$, welche die Formen ω^1, ω^2 in Totaldifferentiale $\mathrm{d}\bar{u} = \omega^1/\alpha_1$, $\mathrm{d}\bar{v} = \omega^2/\alpha_2$ überführen. Damit ist dann auch die Substitution (11) bestimmt, die das System (R_n) in asymptotisches Normalsystem überführt.

Ist die Fläche $\mathscr{A}(R_n)$ gegeben, so bezeichnen wir die Transformation (9) als *normal*, wenn sie (R_n) wieder ins Normalsystem überführt.

Bemerken wir, dass man in der Behauptung a) des Satzes 2 das Symbol R_a durch R_n ersetzen kann. Durch das Verfahren aus § 3 kann man weiter folgenden Satz beweisen:

Satz 3. *Die Transformation* (9) *bezüglich der gegebenen Fläche $\mathscr{A}(R_n)$ ist gerade dann normal, wenn $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3$.*

Setzen wir dabei in den Ausdrücken für $\boldsymbol{d}M$, $\boldsymbol{d}J_i^* = \boldsymbol{d}(\alpha_i J_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ die neuen Vektoren J_1^*/α_1, J_2^*/α_2, J_3^*/α_3 für J_1, J_2, J_3, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}M &= \overset{*}{\omega}{}^1 J_1^* + \overset{*}{\omega}{}^2 J_2^*\,,\\ \boldsymbol{d}J_1^* &= \overset{*}{\omega}{}_1^1 J_1^* + \frac{(\alpha_1)^2\beta}{\alpha_2}\,\overset{*}{\omega}{}^1 J_2^* + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\,(1 + h)\,\overset{*}{\omega}{}^2 J_3^*\,,\\ \boldsymbol{d}J_2^* &= \frac{(\alpha_2)^2\gamma}{\alpha_1}\,\overset{*}{\omega}{}^2 J_1^* + \overset{*}{\omega}{}_2^2 J_2^* + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\,(1 - h)\,\overset{*}{\omega}{}^1 J_3^*\,,\\ \boldsymbol{d}J_3^* &= \overset{*}{\omega}{}_3^1 J_1^* + \overset{*}{\omega}{}_3^2 J_2^* + \overset{*}{\omega}{}_3^3 J_3^*\,, \end{aligned}$$

so dass die Forderung $(\alpha_1)^2\beta/\alpha_2 = (\alpha_2)^2\gamma/\alpha_1$ durch die Bedingung $\alpha_1 : \alpha_2 = \sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{\beta}$ befriedigt werden kann. Es gilt also

Satz 4. *Zur gegebenen Fläche* $\mathscr{A}(R_n)$, $\beta\gamma \neq 0$, *gibt es die Normaltransformation* (9), *welche das System* (R_n) *ins Normalsystem der Form (Sternchen wurden weggelassen)*

$$(R_n^*) \quad \begin{aligned} &dM = \omega^1 J_1 + \omega^2 J_2, \quad dJ_1 = \omega_1^1 J_1 + K\omega^1 J_2 + (1+h)\,\omega^2 J_3\,, \\ &dJ_2 = K\omega^2 J_1 + \omega_2^2 J_2 + (1-h)\,\omega^1 J_3\,, \quad dJ_3 = \omega_3^1 J_1 + \omega_3^2 J_2 + \omega_3^3 J_3\,, \end{aligned}$$

mit $K \neq 0$ *überführt.*

Wählt man speziell $\alpha_2 = \pm 1/\alpha$, $\operatorname{sg}(\beta/\alpha_2) = \operatorname{sg}(\gamma/\alpha_1)$ in der Bedingung $\alpha_1 : \alpha_2 = \sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{\beta}$, so handelt es sich um eine unimodulare Transformation (9), und nach einfacher Rechnung bekommt man $K = \pm\sqrt{|\beta\gamma|}$. Der Wert $\beta\gamma$ ist bis aufs Zeichen invariant bei unimodularen Transformationen (9); man kann diese Invariante als *Picksche Flächeninvariante* oder auch als *affine Flächenkrümmung* bezeichnen.

Im Wortlaute des Satzes 4 war es möglich, die Voraussetzung $\beta\gamma \neq 0$ o.B.d.A. durch eine stärkere Voraussetzung $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ersetzen; es ist nämlich leicht eine solche Normaltransformation (9) zu bestimmen, welche die ursprünglichen β, γ in $(\alpha_1)^2\beta/\alpha_2 > 0$, $(\alpha_2)^2\gamma/\alpha_1 > 0$ überführt.

5. ÜBERGANG ZUM ÄQUIAFFINEN RAUME

Wir zeigen nun, dass die Forderung der Flächeneinbettung in den äquiaffinen Raum dazu führt, dass Flächendreibein R_n^* in gewöhnliches Frenetsches Flächendreibein übergeht.

Die Fläche $\mathscr{A}(R_a)$ ist im gewöhnlichen affinen Raume gerade dann gelegen, wenn dM, dJ_1, dJ_2, dJ_3 totale Differentiale sind, oder anders ausgedrückt, wenn die Integrabilitätsbedingungen ([5], S. 37) $(a_j^k)_v - (b_j^k)_u = b_j^i a_i^k - a_j^i b_i^k$ für $j = 0, 1, 2, 3$ und $k = 1, 2, 3$ erfüllt sind. Wir gewinnen fortschreitend:

$$(a_0^1)_v - (b_0^1)_u = 0 = b_1^1\,; \quad (a_0^2)_v - (b_0^2)_u = 0 = a_2^2\,;$$

$$(a_0^3)_v - (b_0^3)_u = 0 = a_2^3 - b_1^3, \text{ d.h. } h = 0\,; \quad (a_1^1)_v - (b_1^1)_u = (a_1^1)_v = a_3^1 - \gamma\beta\,;$$

$$(a_1^2)_v - (b_1^2)_u = \beta_v = a_3^2 - \beta b_2^2\,; \quad (a_1^3)_v - (b_1^3)_u = 0 = a_3^3 - a_1^1\,;$$

$$(a_2^1)_v - (b_2^1)_u = \gamma_u = \gamma a_1^1 - b_3^1\,; \quad (a_2^2)_v - (b_2^2)_u = (b_2^2)_u = \gamma\beta - b_3^2\,;$$

$$(a_2^3)_v - (b_2^3)_u = 0 = b_2^2 - b_3^3\,; \quad (a_3^1)_v - (b_3^1)_u = b_3^3 a_3^1 - a_3^2\gamma\,;$$

$$(a_3^2)_v - (b_3^2)_u = b_3^1\beta - a_3^3 b_3^2\,; \quad (a_3^3)_v - (b_3^3) = b_3^2 - a_3^1\,.$$

Davon verwenden wir nun die Gleichungen $h = 0$, $a_1^1 = a_3^3$, $a_2^2 = 0$, $b_1^1 = 0$, $b_2^2 = b_3^3$. Es ist also $\omega_3^3 = \omega_1^1 + \omega_2^2$ und diese letzte Gleichung behält ihre Form auch nach Durchführung willkürlicher Normaltransformation (9) und willkürlicher zulässiger Parameteränderung (11), was man durch leichte Berechnung zeigen kann.

Die äquiaffinen Räume sind im Rahmen der affinen Räume durch die Gleichung $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0$ ([3b], S. 377) charakterisierbar, so dass das System (R_n^*) für die in dem äquiaffinen Raum eingebettete Fläche $\mathscr{A}(R_n^*)$ die Form hat

$$\mathrm{d}M = \omega^1 J_1 + \omega^2 J_2\,, \quad \mathrm{d}J_1 = \omega_1^1 J_1 + K\omega^1 J_2 + \omega^2 J_3\,,$$
$$\mathrm{d}J_2 = K\omega^2 J_1 - \omega_1^1 J_2 + \omega^1 J_3\,, \quad \mathrm{d}J_3 = \omega_3^1 J_1 + \omega_3^2 J_2\,,$$

d.h., R_n^* ist dann das Frenetsche Dreibein im Sinne des Buches [3b], S. 398, (1.8_{h}).

Literatur

[1] *С. П. Фиников:* Проективно-дифференциальная геометрия. Москва-Ленинград 1937.

[2a] *П. К. Рашевский:* Риманова геометрия и тензорный анализ. Москва 1953.

[2b] *P. K. Raschewski:* Riemansche Geometrie und Tensoranalysis. Berlin 1959.

[3a] *J. Favard:* Cours de géométrie différentielle locale. Paris 1957.

[3b] *Ж. Фавар:* Курс локальной дифференциальной геометрии. Москва 1960.

[4a] *A. Švec:* L'élément linéaire projective d'une surface plongée dans l'espace à connexion projective. Чех. мат. журн. *8* (*83*), 1958, 285—291.

[4b] *A. Švec:* L'application des variétés a connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle. Чех. мат. жур. *10* (*85*), 1960, 523—550.

[4c] *A. Švec:* K výkladu teorie prostorů s konexí. Čas. pro pěst. mat. (*86*) 1961, 425—432.

[5] *J. Havelka:* Sur une généralisation de la normale affine. Чех. мат. журн. *13* (*88*), 1963, 240—266.

Резюме

НОРМАЛЬНЫЕ РЕПЕРЫ ПОВЕРХНОСТИ $\mathscr{A}_{0,3}^2$, *I*

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Брно

Методом фиктивного погружения в аффинное пространство [4c] построены нормальные реперы поверхности $\mathscr{A}_{0,3}^2$: координатные оси репера выбраны в асимптотических касательных ив т.н. прямой Демулена сети асимптотик. Исследованы частные случаи набора орт на этих осах. Изучены только поверхности с действительными асимптотиками; геометрический смысл набора орт нормального репера и аффинной кривизны и кручения будет изучен в дальнейшей части работы.