Czechoslovak Mathematical Journal

Zbyněk Šidák

Операторы в пространстве непрерывных функций и представление процессов Маркова в компактном пространстве Хаусдорфа

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 1, 37–50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100551

Чехословацкий математический журнал, т. 13 (88) 1963, Прага

ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОВ МАРКОВА В КОМПАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ХАУСДОРФА

ЗБЫНЕК ШИДАК (Zbyněk Šidák), Прага

(Поступило в редакцию 14/XI 1960 г.)

Известная теорема о представлении оператора в пространстве непрерывных функций на компактном пространстве Хаусдорфа дополняется доказательством измеримости представляющей функции множества по второму аргументу и представлением сопряжённого оператора. С помощью того показывается, что вероятности перехода произвольного процесса Маркова можно представить подобными вероятностями в компактном пространстве Хаусдорфа, причём соответствующие операторы процесса отображают непрерывные функции опять в непрерывные.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы будем употреблять следующие обозначения: Множество всех точек s некоторого пространства S, которые обладают свойством V, мы будем обозначать $\{s;\ V(s)\}$. Если мы имеем некоторое отображение, напр. ψ, мы будем обозначать его либо этой одной буквой ψ, либо в случае надобности тоже $\psi(.)$; символ $\psi(\omega)$ будет всегда обозначать значение отображения ψ в точке ω. Характеристическую функцию множества E будем обозначать χ_E, т. е. $\chi_E(s) = 1$ для $s \in E$, $\chi_E(s) = 0$ для $s \notin E$. Если $\tau(.)$ обобщённая мера, то $\tau^+(.)$ её верхняя вариация, $\tau^-(.)$ нижняя вариация, $|\tau|(.)$ полная вариация. В дальнейшем мы будем заниматься функциями $\tau(.,.)$ двух переменных $s \in S$, $E \subset S$ такими, что $\tau(s,.)$ обобщённая мера для любого $s \in S$ и $\tau(., E)$ действительная функция для определённых множеств $E \subset S$. В случае надобности мы будем тоже для обобщённой меры $\tau(s,.)$ употреблять символ τ_s. Чтобы избежать недоразумения, заметим, что $|\tau|(., E)$ функция, которая в точке s принимает значение $|\tau|(s, E) = |\tau_s|(E)$; аналогично для символов $\tau^+(., E)$, $\tau^-(., E)$.

Подобно как в книге Н. Данфорда-Й. Т. Шварца [2] для топологического пространства S пусть $\mathbf{C}(S)$ обозначает пространство всех ограничённых непрерывных функций на S, для произвольного абстрактного пространства X с σ-алгеброй $\mathscr{X}$ пусть $\mathbf{B}(X,\mathscr{X})$ обозначает пространство всех ограничённых функций на X измеримых по отношению к $\mathscr{X}$. Для $f \in \mathbf{C}(S)$ или $\mathbf{B}(X,\mathscr{X})$ мы введём норму $\|f\| = \sup_{s\in S} |f(s)|$ или $\sup_{x\in X} |f(x)|$; потом $\mathbf{C}(S)$ и $\mathbf{B}(X,\mathscr{X})$ являются банаховыми пространствами.

Если S компактное пространство Хаусдорфа, то σ-алгебра $\mathscr{S}$ борелевских множеств наименьшая σ-алгебра, содержащая замкнутые множества в S, σ-алгебра $\mathscr{S}_0$ бэровских множеств наименьшая σ-алгебра содержащая замкнутые G_δ множества в S. Далее $\mathbf{rca}\,(S,\mathscr{S})$ пусть обозначает пространство всех регулярных σ-аддитивных функций множества на $\mathscr{S}$ с конечной вариацией, $\mathbf{rca}\,(S,\mathscr{S}_0)$ пространство всех σ-аддитивных функций множества на $\mathscr{S}_0$ с конечной вариацией (которые, конечно, как бэровские меры должны быть регулярными). Если для $\tau \in \mathbf{rca}\,(S,\mathscr{S})$ или $\mathbf{rca}\,(S,\mathscr{S}_0)$ мы определим норму $\|\tau\| = |\tau|\,(S)$, то оба эти пространства являются банаховыми. Нормы элементов в банаховых пространствах мы будем обозначать $\|\,.\,\|$.

Хорошо известна следующая теорема:

Пусть S компактное пространство Хаусдорфа, $\mathscr{S}$ σ-алгебра его борелевских множеств и T линейный непрерывный оператор в $\mathbf{C}(S)$. Тогда существует функция $\tau(.\,,\ .)$ переменных $s \in S$, $E \in \mathscr{S}$, обладающая следующими свойствами:

(a) $\tau(s,\ .) \in \mathbf{rca}\,(S,\mathscr{S})$ *для всякого* $s \in S$,

(b) $(Tf)\,(s) = \int_S f(s_1)\,\tau(s, \mathrm{d}s_1)$ *для всяких* $f \in \mathbf{C}(S)$, $s \in S$,

(c) $\|T\| = \sup_{s\in S} \|\tau(s,\ .)\|$.

Доказательство этой теоремы для S компактного множества на действительной прямой дал уже Й. Радон [6]. В приведённом общем виде теорема напр. вытекает из теорем доказанных в Р. Г. Бартль-Н. Данфорд-Й. Т. Шварц [1] или в книге Данфорда-Шварца [2], теорема VI. 7. 1.

Однако, для некоторых целей тоже надо знать поведение функции $\tau(.\,, E)$ переменной $s \in S$ при фиксированном $E \in \mathscr{S}$, в частности, если она измерима. На этот вопрос упомянутые работы не дадут ответа.

Первой целью настоящей статьи есть дополнить приведённую известную теорему доказательством измеримости $\tau(.\,, E)$. Дальше находится представление сопряжённого оператора T^*. Наконец, выведённые теоремы использованы к доказательству, что вероятности перехода произвольного процесса Маркова можно представить вероятностями перехода другого процесса Маркова в компактном пространстве Хаусдорфа, причём соответствующие операторы этого нового процесса отображают непрерывные функции опять на непрерывные.

Теорема 1. *Пусть S компактное пространство Хаусдорфа, $\mathscr{S}$ σ-алгебра его борелевских множеств. Если T линейный непрерывный оператор в $\mathbf{C}(S)$ и если функция $\tau(.,.)$ переменных $s \in S$, $E \in \mathscr{S}$ удовлетворяет условиям* (a), (b), (c) *теоремы из введения, то выполняется тоже*

(d) $\tau(., E) \in \mathbf{B}(S, \mathscr{S})$ *для всякого* $E \in \mathscr{S}$.

Доказательство. Прежде всего мы покажем, что для любого открытого $G \in \mathscr{S}$ и для любого $s \in S$

$$\tau^+(s, G) = \sup_f \int_S f(s_1)\, \tau(s, ds_1)\,, \tag{1}$$

где верхняя грань берётся по всем функциям $f \in \mathbf{C}(S)$, для которых $0 \leqq f \leqq 1$ и $f(s) = 0$ для $s \in S - G$. Для таких функций f очевидно $0 \leqq f \leqq \chi_G$ и следовательно

$$\int_S f(s_1)\, \tau(s, ds_1) \leqq \int_S f(s_1)\, \tau^+(s, ds_1) \leqq \int_S \chi_G(s_1)\, \tau^+(s, ds_1) = \tau^+(s, G)\,,$$

откуда тоже

$$\sup_f \int_S f(s_1)\, \tau(s, ds_1) \leqq \tau^+(s, G)\,. \tag{2}$$

Если мы имели бы в (2) при некотором $s \in S$ строгое неравенство, то было бы можно найти $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sup_f \int_S f(s_1)\, \tau(s, ds_1) < \tau^+(s, G) - \varepsilon\,. \tag{3}$$

Возьмём теперь разложение Хана пространства S на положительную часть S^+ и отрицательную часть S^- по отношению к функции множества τ_s. Ввиду регулярности этой функции существует замкнутое множество $F_0 \in \mathscr{S}$ и открытое $G_0 \in \mathscr{S}$ такие, что $F_0 \subset G \cap S^+ \subset G_0$ и $|\tau_s|\,(G_0 - F_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Так как пространство S нормально, то существует функция $f_0 \in \mathbf{C}(S)$ такая, что $0 \leqq f_0 \leqq 1$, $f_0(s) = 1$ для $s \in F_0$, $f_0(s) = 0$ для $s \in S - G_0 \cap G$. Мы имеем теперь прежде всего

$$- \int_{G_0 \cap G - F_0} f_0(s_1)\, \tau(s, ds_1) \leqq \left| \int_{G_0 \cap G - F_0} f_0(s_1)\, \tau(s, ds_1) \right| \leqq \tag{4}$$

$$\leqq \int_{G_0 \cap G - F_0} |f_0(s_1)|\, |\tau_s|\, (ds_1) \leqq |\tau_s|\,(G_0 \cap G - F_0) < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Так как $\tau(s, G \cap S^+ - F_0) \leqq |\tau_s| (G \cap S^+ - F_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$, мы получим с помощью (4) наконец

$$\sup_f \int_S f(s_1)\, \tau(s, ds_1) \geqq \int_S f_0(s_1)\, \tau(s, ds_1) = \tau(s, F_0) + \int_{G_0 \cap G - F_0} f_0(s_1)\, \tau(s, ds_1) >$$
$$> \tau(s, F_0) - \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tau(s, G \cap S^+ - F_0) - \tau(s, G \cap S^+ - F_0) >$$
$$> \tau(s, G \cap S^+) - \tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tau^+(s, G) - \varepsilon\,.$$

Но это противоречит (3) и следовательно выполняется (1).

Аналогичным методом как равенство (1) (или если мы используем (1) для $-\tau$ вместо τ) мы получим

$$\tau^-(s, G) = \sup_f - \int_S f(s_1)\, \tau(s, ds_1)\,. \tag{5}$$

Обозначим теперь $\mathscr{M}$ систему множеств $M \in \mathscr{S}$ таких, что $\tau(., M) \in \mathbf{B}(S, \mathscr{S})$. Так как $|\tau(s, M)| \leqq |\tau_s| (M) \leqq \|T\| < \infty$, функции $\tau(., M)$ ограничены и достаточно показать только их измеримость.

Прежде всего для любого действительного числа c и для произвольного открытого $G \in \mathscr{S}$ из (1) следует

$$\{s;\, \tau^+(s, G) > c\} = \bigcup_f \left\{s;\, \int_S f(s_1)\, \tau(s, ds_1) > c\right\}, \tag{6}$$

где объединение вправо берётся опять по таким же $f \in \mathbf{C}(S)$ как в (1). Так как интеграл в скобках в правой части равен $(Tf)(s)$ согласно свойству (b), и оператор T отображает $f \in \mathbf{C}(S)$ на $Tf \in \mathbf{C}(S)$, то множества в скобках в правой части (6) являются отркытыми. Из этого следует, однако, что тоже левая часть (6) представляет собой открытое множество и поэтому $\tau^+(., G)$ измерима по отношению к $\mathscr{S}$. Аналогично с помощью (5) видно, что и $\tau^-(., G)$, и, следовательно, тоже $\tau(., G) = \tau^+(., G) - \tau^-(., G)$ измеримы. Мы показали этим, что каждое открытое множество $G \in \mathscr{M}$.

Мы будем теперь рассуждать, как в параграфах 4, 5, 6 книги П. Халмоша [5]. Открытые множества образуют структуру, которая содержится в $\mathscr{M}$. Множества вида $M = G_1 - G_2$, $G_1 \supset G_2$, G_1, G_2 открытые, образуют полукольцо и для них

$$\tau(., M) = \tau(., G_1) - \tau(., G_2) \in \mathbf{B}(S, \mathscr{S})\,,$$

следовательно эти множества принадлежат $\mathscr{M}$. Дальше множества вида $M = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, где $E_1, \ldots, E_n$ непересекающиеся множества из вышеупомянутого полукольца, образуют кольцо и для них

$$\tau(., M) = \tau(., \bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} \tau(., E_j) \in \mathbf{B}(S, \mathscr{S})\,,$$

следовательно, эти множества принадлежат $\mathscr{M}$. Это кольцо содержит в е открытые множества, в том числе, конечно, тоже S, и, следовательно, оно является алгеброй. Наконец, пусть M имеет вид $M = \lim M_n$, где $M_1, M_2, \ldots$ монотонная последовательность множеств из $\mathscr{M}$. Тогда

$$\tau(., M) = \lim_n \tau(., M_n) \in \mathbf{B}(S, \mathscr{S}) .$$

Это значит, что $M \in \mathscr{M}$ и поэтому $\mathscr{M}$ монотонный класс. Отсюда следует, что он должен содержать σ-алгебру, порождённую вышеупомянутой алгеброй, но это значит $\mathscr{S} \subset \mathscr{M}$, чем и наше доказательство завершается.

Замечание 1. В случае положительного оператора T из нашего доказательства видно, что функция τ неотрицательна. В самом деле, интегралы $\int_S f(s_1) . \tau(s, ds_1) = (Tf)(s)$ в равенстве (5) потом неотрицательны, что в силу (5) даёт $\tau^-(s, G) \leqq 0$. Но мы всегда имеем $\tau^-(s, G) \geqq 0$, и поэтому $\tau^-(s, G) = 0$. По-видимому из этого следует требуемое утверждение для произвольного множества $E \in \mathscr{S}$ вместо G.

Замечание 2. Равенствами (1) и (6), соотв. (5) мы доказали именно, что для G открытого функции $\tau^+(., G)$ и $\tau^-(., G)$ полунепрерывны снизу. Этот факт для S компактного множества в евклидовом пространстве доказал, по существу, уже Фуяд [4].

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Мы сохраняем далее все предположения и обозначения из § 1 и 2. Пусть $\mathbf{C}^*(S)$ пространство функционалов φ на $\mathbf{C}(S)$, и T^* оператор в $\mathbf{C}^*(S)$, сопряжённый к T. Хорошо известно (напр. Данфорд-Шварц [2], теорема IV. 6. 3), что существует изометрически изоморфное отображение U пространства $\mathbf{C}^*(S)$ на $\mathbf{rca}\,(S, \mathscr{S})$. Оператор T^* в $\mathbf{C}^*(S)$ потом порождает оператор T_1^* в $\mathbf{rca}\,(S, \mathscr{S})$ формулой

$$T_1^* \mu = U T^* U^{-1} \mu \quad \text{для} \quad \mu \in \mathbf{rca}\,(S, \mathscr{S}) .$$

По существу T_1^* можно рассматривать как оператор, сопряженный к T.

Для сокращения, мы обозначим $\mathbf{ca}\,(S, \mathscr{S})$ пространство всех σ-аддитивных функций множества μ на $\mathscr{S}$ с конечной вариацией; с нормой $\|\mu\| = |\mu|\,(S)$ это опять банахово пространство. Определим теперь отображение T^+ формулой

$$(T^+\mu)(E) = \int_S \tau(s, E)\, \mu(ds) \quad \text{для} \quad \mu \in \mathbf{ca}\,(S, \mathscr{S}), \quad E \in \mathscr{S} .$$

Так как в силу теоремы 1 функция $\tau(., E) \in \mathbf{B}(S, \mathscr{S})$, то интеграл в этом определении имеет смысл. Легко видеть, что T^+ линейно и отображает $\mathbf{ca}\,(S, \mathscr{S})$ в себя. Далее

$$|T^+\mu|\,(S) = \sup_{A,B \in \mathscr{S}} \left[\int_S \tau(s, A)\, \mu(ds) - \int_S \tau(s, B)\, \mu(ds) \right] \leqq$$

$$\leqq \sup_{A,B \in \mathscr{S}} \int_S |\tau(s, A) - \tau(s, B)|\, |\mu|\,(ds) \leqq \int_S |\tau_s|\,(S)\, |\mu|\,(ds) \leqq \|T\|\, \|\mu\| ,$$

что значит $\|T^+\mu\| \leqq \|T\| \, \|\mu\|$, и, очевидно, T^+ линейный непрерывный оператор в $\mathbf{ca}(S, \mathscr{S})$ с нормой

$$\|T^+\| \leqq \|T\| . \tag{7}$$

Теорема 2. *Для* $\mu \in \mathbf{rca}(S, \mathscr{S})$ *справедливо*

$$(T_1^*\mu)(E) = (T^+\mu)(E) = \int_S \tau(s, E)\, \mu(\mathrm{d}s) \quad \text{для} \quad E \in \mathscr{S}_0 . \tag{8}$$

На всем $\mathscr{S}$ *потом* $T_1^*\mu$ *равно* (*однозначному*) *регулярному расширению бэровской меры из* (8).

Доказательство. Прежде всего заметим, что для $f \in \mathbf{C}(S)$

$$\int_S f(s)\,(T^+\mu)(\mathrm{d}s) = \int_S \left[\int_S f(s_1)\,\tau(s, \mathrm{d}s_1)\right] \mu(\mathrm{d}s) . \tag{9}$$

Это равенство ясно для простых функций $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$, $E_i \in \mathscr{S}$, и для $f \in \mathbf{C}(S)$ произвольной оно легко докажется обыкновенным предельным переходом.

Обозначим теперь $\varphi = U^{-1}\mu \in \mathbf{C}^*(S)$. Тогда $UT^*\varphi = T_1^*\mu$ и, в силу известной теоремы о представлении функционалов (Данфорд-Шварц [2], IV. 6. 3), получается

$$\int_S \left[\int_S f(s_1)\,\tau(s, \mathrm{d}s_1)\right] \mu(\mathrm{d}s) = \int_S (Tf)(s)\,\mu(\mathrm{d}s) = \varphi(Tf) = \tag{10}$$
$$= (T^*\varphi)(f) = \int_S f(s)\,(T_1^*\mu)(\mathrm{d}s) .$$

Из (9) и (10) теперь вытекает

$$\int_S f(s)\,(T^+\mu)(\mathrm{d}s) = \int_S f(s)\,(T_1^*\mu)(\mathrm{d}s) \quad \text{для} \quad f \in \mathbf{C}(S) , \tag{11}$$

что в силу известных теорем (напр. Халмош [5], § 56) даёт равенство (8).

Второе утверждение теоремы уже ясно из того, что $T_1^*\mu \in \mathbf{rca}(S, \mathscr{S})$.

Следствие. *Если для* $\mu \in \mathbf{rca}(S, \mathscr{S})$ *тоже* $T^+\mu \in \mathbf{rca}(S, \mathscr{S})$, *то* $T_1^*\mu = T^+\mu$.

Теорема 3. $\|T^+\| = \|T_1^*\| = \|T\| = \|T^*\|$.

Доказательство. Если мы имеем произвольные $\nu \in \mathbf{rca}(S, \mathscr{S})$, $\lambda \in \mathbf{ca}(S, \mathscr{S})$ и $\nu(E) = \lambda(E)$ для всякого бэровского $E \in \mathscr{S}_0$, то

$$\|\nu\| = \sup_{f \in \mathbf{C}(S), |f| \leqq 1} \int_S f(s)\,\nu(\mathrm{d}s) = \sup_{f \in \mathbf{C}(S), |f| \leqq 1} \int_S f(s)\,\lambda(\mathrm{d}s) \leqq$$
$$\leqq \sup_{f \in \mathbf{B}(S, \mathscr{S}), |f| \leqq 1} \int_S f(s)\,\lambda(\mathrm{d}s) = \|\lambda\| .$$

В нашем случае это даёт $\|T_1^*\mu\| \leqq \|T^+\mu\| \leqq \|T^+\| \, \|\mu\|$, откуда $\|T_1^*\| \leqq \|T^+\|$. Потому что, однако, $\|T_1^*\| = \|T^*\| = \|T\|$, из неравенства (7) мы получаем утверждение теоремы.

Теорема 4. *Для того, чтобы T^+ отображал* **rca** $(S, \mathscr{S})$ *в себя, достаточно любое из следующих условий:*

(a) *S метрическое пространство,* (b) *S имеет счётный базис,*

(c) *для всякого G открытого функция $|\tau|(.,G)$ полунепрерывна сверху,*

(d) *существует непрерывное отображение z пространства S в себя такое, что $(Tf)(s) = f(z(s))$, то есть $\tau(s, E) = \chi_E(z(s))$. (См. Данфорд-Шварц* [2], VI. 9. 37.)

Доказательство. (a) В этом случае борелевские меры совпадают с бэровскими, так что $T^+\mu$ всегда регулярна.

(b) Потому что S компактное пространство Хаусдорфа со счётным базисом, то оно метризируемо, так что утверждение следует из (a).

(c) Пусть F замкнутое множество и пусть дано $\varepsilon > 0$. Так как сумма конечного числа функций полунепрерывных сверху опять обладает этим свойством, то, в силу нашего предположения и замечания 2, функция $|\tau|(.,G) - |\tau|(.,F) = |\tau|(.,G) - \tau^+(.,S) - \tau^-(.,S) + |\tau|(.,S-F)$ полунепрерывна сверху, коль скоро G открытое. Для G открытого, $G \supset F$, мы обозначим теперь $M_G = \{s; |\tau|(s,G) - |\tau|(s,F) < \varepsilon\}$, и, следовательно, M_G открытое. Так как для любого $s \in S$ функция множества τ_s регулярна, то и $|\tau_s|$ регулярна, и существует такое открытое $G \supset F$, что $|\tau_s|(G) - |\tau_s|(F) < \varepsilon$, и, следовательно, $s \in M_G$. Мы показали этим, что система открытых множеств M_G покрывает S. Но компактность S влечёт за собой существование конечного числа множеств $G_1, \ldots, G_k$ таких, что $S = \bigcup_{i=1}^{k} M_{G_i}$. Пусть $G_0 = \bigcap_{i=1}^{k} G_i$. Тогда G_0 открытое множество и $G_0 \supset F$. Пусть теперь дано произвольное $C \subset G_0 - F$. Если мы имеем какую-либо точку $s \in S$, то она принадлежит некоторому из k множеств M_{G_i}, скажем $M_{G_{i(s)}}$, и, следовательно,

$$|\tau_s(C)| \leqq |\tau_s|(C) \leqq |\tau_s|(G_0 - F) \leqq |\tau_s|(G_{i(s)} - F) < \varepsilon .$$

Из этого вытекает далее $|(T^+\mu)(C)| \leqq \int_S |\tau_s(C)| \, |\mu|(\mathrm{d}s) \leqq \varepsilon \|\mu\|$. Мы показали таким образом, что каждое замкнутое множество F регулярно по отношению к $T^+\mu$. Но так как регулярные множества образуют σ-алгебру (Данфорд-Шварц [2] III. 9. 22), то всякое борелевское множество должно быть регулярным по отношению к мере $T^+\mu$.

(d) В этом случае мы имеем

$$(T^+\mu)(E) = \int_S \chi_E(z(s)) \, \mu(\mathrm{d}s) = \mu(\{s; z(s) \in E\}) = \mu(z^{-1}(E)) .$$

Пусть даны произвольное $\varepsilon > 0$ и открытое множество G. Тогда $z^{-1}(G) = G_0$ тоже открыто. В силу регулярности μ существует замкнутое $F_0 \subset G_0$ так, что для любого $C_0 \subset G_0 - F_0$ справедливо $|\mu(C_0)| < \varepsilon$. Так как непрерывный образ компактного множества опять компактен, то $z(F_0) = F$ компактно, значит и замкнуто. Очевидно $F \subset G$. Если мы имеем теперь какое-либо $C \subset G - F$, то $z^{-1}(C) \subset G_0 - F_0$, и, следовательно, $|(T^+\mu)(C)| = |\mu(z^{-1}(C))| < \varepsilon$. Мы показали этим, что каждое открытое множество G регулярно по отношению к $T^+\mu$, и, так как регулярные множества образуют σ-алгебру, каждое борелевское множество регулярно.

На этом мы заканчиваем доказательство теоремы 4.

Кажется, что в общем случае оператор T^+ не должен отображать $\boldsymbol{rca}(S, \mathscr{S})$ в себя, но мне не удалось этого показать.

4. СУЖЕНИЕ НА БЭРОВСКИЕ МНОЖЕСТВА

Мы сохраняем опять все предположения и обозначения из предыдущих параграфов. Мы знаем, что существует изометрически изоморфное отображение U пространства $\boldsymbol{C}^*(S)$ на $\boldsymbol{rca}(S, \mathscr{S})$. Однако, если мы вместо каждой борелевской обобщённой меры $\mu_1 \in \boldsymbol{rca}(S, \mathscr{S})$ возьмём её бэровское сужение $\mu_0 \in \boldsymbol{rca}(S, \mathscr{S}_0)$, легко показать $\|\mu_0\| = \|\mu_1\|$ (напр. подобными рассуждениями как в доказательстве теоремы 3) и, очевидно,

$$\int_S f(s)\, \mu_0(\mathrm{d}s) = \int_S f(s)\, \mu_1(\mathrm{d}s) \quad \text{для всяких} \quad f \in \boldsymbol{C}(S)\,.$$

Следовательно, существует тоже изометрически изоморфное отображение U_0 пространства $\boldsymbol{C}^*(S)$ на $\boldsymbol{rca}(S, \mathscr{S}_0)$. Аналогично как раньше, оператор T^* в $\boldsymbol{C}^*(S)$ порождает оператор T_0^* в $\boldsymbol{rca}(S, \mathscr{S}_0)$ формулой $T_0^*\mu = U_0 T^* U_0^{-1}\mu$ для $\mu \in \boldsymbol{rca}(S, \mathscr{S}_0)$. Грубо говоря, $\boldsymbol{rca}(S, \mathscr{S}_0)$ можно рассматривать как пространство функционалов на $\boldsymbol{C}(S)$ и T_0^* как оператор сопряжённый к T.

Несомненно, не опасаясь недоразумения, мы можем опять символом $\tau(s, .)$ обозначать бэровские меры, возникшие сужением прежних борелевских мер $\tau(s, .)$.

Теорема 5. *Пусть S компактное пространство Хаусдорфа, $\mathscr{S}_0$ σ-алгебра его бэровских множеств. Если T линейный непрерывный оператор в $\boldsymbol{C}(S)$, то существует функция $\tau(.,.)$ переменных $s \in S$, $E \in \mathscr{S}_0$, обладающая следующими свойствами:*

(a) $\tau(s, .) \in \boldsymbol{rca}(S, \mathscr{S}_0)$ *для всякого* $s \in S$,

(b) $(Tf)(s) = \int_S f(s_1)\, \tau(s, \mathrm{d}s_1)$ *для всяких* $f \in \boldsymbol{C}(S)$, $s \in S$,

(c) $\|T\| = \sup_{s \in S} \|\tau(s, .)\|$.

Из этих свойств вытекает далее

(d) $\tau(., E) \in \boldsymbol{B}(S, \mathscr{S}_0)$ *для всякого* $E \in \mathscr{S}_0$,

(e) $(T_0^*\mu)(E) = \int_S \tau(s, E)\, \mu(\mathrm{d}s)$ *для всяких* $\mu \in \boldsymbol{rca}(S, \mathscr{S}_0)$, $E \in \mathscr{S}_0$.

Доказательство. Свойства (a), (b), (c) очевидны из теоремы приведённой во введении и из наших рассуждений в начале настоящего параграфа.

Чтобы доказать (d), заметим прежде всего, что для любого замкнутого множества $F \in \mathscr{S}_0$ существует убывающая последовательность неотрицательных функций $f_n \in \mathbf{C}(S)$ таких, что $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = \chi_F(s)$ для всякого $s \in S$ (см. Халмош [5], теорема 1 § 55). Из того следует согласно (b)

$$\lim_{n\to\infty} (Tf_n)(s) = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(s_1)\, \tau(s, \mathrm{d}s_1) = \int_S \chi_F(s_1)\, \tau(s, \mathrm{d}s_1) = \tau(s, F)\,.$$

Но так как функции $Tf_n \in \mathbf{C}(S)$ и поэтому они измеримы в смысле Бэра, то их предел $\tau(.\,, F)$ тоже должен быть измерим в смысле Бэра. Однако, замкнутые множества из $\mathscr{S}_0$ образуют структуру, и доказательство заканчивается опять на основе § 4, 5, 6 Халмоша [5] таким же методом как в доказательстве нашей теоремы 1.

Свойство (e) доказывается вполне аналогично как теорема 2. Притом интеграл в (e) имеет смысл, ибо интегрируемая функция $\tau(.\,, E) \in \mathbf{B}(S, \mathscr{S}_0)$ согласно (d).

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОВ МАРКОВА В КОМПАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ХАУСДОРФА

Пусть задано произвольное абстрактное множество X (состояний процесса Маркова) с σ-алгеброй $\mathscr{X}$. Процесс Маркова в пространстве X (всегда подразумевается однородный процесс, т. е. со стационарными вероятностями перехода) есть система случайных величин ξ_t, $t \geqq 0$, со значениями в пространстве X, обладающая хорошо известными свойствами, которые здесь не надо перечислять. Процесс Маркова ξ_t определяет известным способом вероятности перехода $p^{(t)}(x, E)$ из состояния $x \in X$ в множество $E \in \mathscr{X}$ после времени t. Однако, мы можем поступить наоборот, с функциональной точки зрения, подобно как в [7], и определяем тогда:

Системой Маркова в пространстве X с σ-алгеброй $\mathscr{X}$ мы назовём систему функций $p^{(t)}(.\,,.)$ переменных $x \in X$, $E \in \mathscr{X}$, для $t \geqq 0$, удовлетворяющую следующим условиям:

(a) $p^{(t)}(x, .)$ вероятностные меры на $\mathscr{X}$ для всяких $x \in X$, $t \geqq 0$,

(b) $p^{(t)}(.\,, E) \in \mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ для всяких $E \in \mathscr{X}$, $t \geqq 0$,

(c) для любых t_1, $t_2 \geqq 0$ справедливы уравнения перехода

$$p^{(t_1+t_2)}(x, E) = \int_X p^{(t_1)}(x_1, E)\, p^{(t_2)}(x, \mathrm{d}x_1)$$

для всяких $x \in X$, $E \in \mathscr{X}$.

При некоторых предположениях (которые не надо здесь рассматривать) каждый процесс Маркова определяет некоторую систему Маркова, и наоборот, каждая система Маркова определяет некоторый процесс Маркова, если мы только выберём ещё начальное распределение для ξ_0. Но как заметили П. Леви и В. Феллер [3], существуют случайные процессы, которые не являются процессами Маркова, а у которых всё-таки вероятности перехода образуют систему Маркова. В этом смысле понятие системы Маркова более общее чем понятие процесса Маркова. Однако, мы уже не будем дальше задерживаться уточнением этих рассуждений, и удовлетворимся высказанным определением системы Маркова.

Заметим ещё, что вполне несвязным топологическим пространством мы разумеем пространство, которое имеет базис, состоящий из открытых-замкнутых множеств.

Теорема 6. *Пусть* $p^{(t)}(.,.)$, $t \geqq 0$, *система Маркова в произвольном абстрактном пространстве* X *с* σ*-алгеброй* $\mathscr{X}$. *Тогда существует топологическое пространство* S *с* σ*-алгеброй* $\mathscr{S}_0$ *его бэровских множеств и в нём система Маркова* $\tau^{(t)}(.,.)$, $t \geqq 0$, *обладающие следующими свойствами:*

(a) S *вполне несвязное компактное пространство Хаусдорфа,*

(b) $\tau^{(t)}(s,.) \in \mathbf{rca}(S, \mathscr{S}_0)$ *для всяких* $s \in S$, $t \geqq 0$,

(c) *соответствующие операторы Маркова* $T^{(t)}$, $t \geqq 0$, *определённые*

$$(T^{(t)}f)(s) = \int_S f(s_1)\, \tau^{(t)}(s, \mathrm{d}s_1)$$

отображают $f \in \mathbf{C}(S)$ *на* $T^{(t)}f \in \mathbf{C}(S)$,

(d) *для каждого открытого (соотв. замкнутого)* $E \in \mathscr{S}_0$ *функции* $\tau^{(t)}(.,E)$ *полунепрерывны снизу (соотв. сверху), для открытого-замкнутого* $E \in \mathscr{S}_0$ *функции* $\tau^{(t)}(.,E) \in \mathbf{C}(S)$,

(e) *существует отображение* ψ *пространства* X *в* S *и изоморфное отображение* Ψ σ*-алгебры* $\mathscr{X}$ *на алгебру* $\mathscr{S}_a$ *всех открытых-замкнутых множеств в* S *(т. е.* $\Psi(E \cup F) = \Psi(E) \cup \Psi(F)$, $\Psi(E \cap F) = \Psi(E) \cap \Psi(F)$, $\Psi(X - E) = S - \Psi(E)$*) такие, что для всяких* $x \in X$, $E \in \mathscr{X}$, $t \geqq 0$

$$p^{(t)}(x, E) = \tau^{(t)}(\psi(x), \Psi(E)).$$

Доказательство. Мы начнём с известной системы операторов $P^{(t)}$ в пространстве $\mathbf{B}(X, \mathscr{X})$, определённых формулой

$$(12) \qquad P^{(t)}f_0 = \int_X f_0(x)\, p^{(t)}(., \mathrm{d}x) \quad \text{для} \quad f_0 \in \mathbf{B}(X, \mathscr{X}), \quad t \geqq 0.$$

Согласно теореме IV. 6. 20 книги Данфорда-Шварца [2] существует компактное пространство Хаусдорфа S такое, что $\mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ изометрический и алгебраически изоморфный с пространством $\mathbf{C}(S)$. Обозначим Φ соответствующее отображение $f_0 \in \mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ на $f = \Phi f_0 \in \mathbf{C}(S)$. В силу леммы IV. 9. 10 в [2] S вполне несвязно, так что утверждение (a) нашей теоремы справедливо.

Определим теперь отображение $T^{(t)}$, $t \geqq 0$, пространства $\mathbf{C}(S)$ в себя формулой

$$(13) \qquad T^{(t)}f = \Phi P^{(t)} \Phi^{-1} f \quad \text{для} \quad f \in \mathbf{C}(S)\,.$$

Потому что $\|P^{(t)}\| = 1$, мы имеем тоже $\|T^{(t)}\| = 1$ и очевидно $T^{(t)}$ линейные непрерывные операторы в $\mathbf{C}(S)$. Итак, в силу нашей теоремы 5, существуют функции $\tau^{(t)}(.\,,.)$ переменных $s \in S$, $E \in \mathscr{S}_0$ такие, что утверждения (b) и (c) теоремы 6 справедливы.

Так как операторы $T^{(t)}$ положительны, утверждение (d), касающееся E открытого, вытекает из замечания 2. Если мы символом e обозначим функцию тождественно равную 1, легко видеть, что $\Phi e = e$, и поэтому

$$(14) \qquad \tau^{(t)}(.\,, S) = T^{(t)} e = \Phi P^{(t)} \Phi^{-1} e = e\,,$$

так что специально $\tau^{(t)}(.\,, S)$ непрерывные функции. Если $E \in \mathscr{S}_0$ замкнуто, то $S - E$ открыто, и следовательно, функции $\tau^{(t)}(.\,, E) = \tau^{(t)}(.\,, S) - \tau^{(t)}(.\,, S - E)$ полунепрерывны сверху. Утверждение (d) этим доказано.

Утверждение (e) вытекает из следующих рассуждений: Если $\chi_E \in \mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ характеристическая функция множества $E \in \mathscr{X}$, то из доказательства леммы IV. 9. 10 в [2] легко видеть, что $\Phi \chi_E$ характеристическая функция некоторого множества $\Psi(E) \in \mathscr{S}_a$, где Ψ изоморфное отображение $\mathscr{X}$ на $\mathscr{S}_a$. Подставляя в (13), мы приходим к равенству

$$T^{(t)} \Phi \chi_E = \Phi P^{(t)} \Phi^{-1} \Phi \chi_E = \Phi P^{(t)} \chi_E\,,$$

то есть в явном виде

$$\int_S (\Phi \chi_E)(s)\, \tau^{(t)}(.\,, \mathrm{d}s) = \Phi \int_X \chi_E(x)\, p^{(t)}(.\,, \mathrm{d}x)\,,$$

или

$$(15) \qquad \tau^{(t)}(.\,, \Psi(E)) = \Phi p^{(t)}(.\,, E)\,,$$

что есть равенство двух функций определенных на S. Однако, анализируя доказательства теорем IV. 6. 20 или IV. 6. 18 в [2] мы видели бы, что для функции $f_0 \in \mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ её образ Φf_0 строится следующим способом: берётся некоторое отображение ψ пространства X в S и в точках из S вида $\psi(x)$, $x \in X$, определяется Φf_0 естественным способом

$$(16) \qquad (\Phi f_0)(\psi(x)) = f_0(x)$$

для всякого $x \in X$; после того функция Φf_0 расширяется на всё S. Следовательно, если мы в равенство (15) подставим какую-либо точку $\psi(x) \in S$, $x \in X$, то мы, очевидно, получаем

$$\tau^{(t)}(\psi(x), \Psi(E)) = (\Phi p^{(t)}(.\,, E))(\psi(x)) = p^{(t)}(x, E)\,,$$

чем и доказательство утверждения (e) завершается.

Остаётся ещё показать, что $\tau^{(t)}(.,.)$ является на самом деле системой Маркова. Согласно теореме 5, $\tau^{(t)}(., E) \in \mathbf{B}(S, \mathscr{S}_0)$ для всякого $E \in \mathscr{S}_0$, и так как операторы $T^{(t)}$ положительны, в силу замечания 1 за теоремой 1 $\tau^{(t)}(s, .)$ неотрицательные σ-аддитивные меры для всякого $s \in S$. Далее из (14) видно, что $\tau^{(t)}(s, S) = 1$ для всякого $s \in S$, так что $\tau^{(t)}(s, .)$ вероятностные меры. Наконец, уравнения перехода вытекают из равенств

$$T^{(t_1)}(T^{(t_2)}f) = (\Phi P^{(t_1)}\Phi^{-1})(\Phi P^{(t_2)}\Phi^{-1}f) = \Phi P^{(t_1+t_2)}\Phi^{-1}f = T^{(t_1+t_2)}f,$$

справедливых для всех $f \in \mathbf{C}(S)$, $t_1, t_2 \geqq 0$. Переходя к сопряжённым операторам, мы имеем $T^{(t_2)*}T^{(t_1)*} = T^{(t_1+t_2)*}$ и легко видеть (согласно § 4 и с его обозначениями), что тоже $T_0^{(t_2)*}T_0^{(t_1)*} = T_0^{(t_1+t_2)*}$. Беря специально для фиксированного $s \in S$ бэровскую меру $\mu_s \in \mathbf{rca}(S, \mathscr{S}_0)$, определённую $\mu_s(E) = 1$ для $s \in E$, $\mu_s(E) = 0$ для $s \notin E$, мы получим

$$T_0^{(t_2)*}T_0^{(t_1)*}\mu_s = T_0^{(t_1+t_2)*}\mu_s\,. \tag{17}$$

В силу теоремы 5, утверждение (e), если $E \in \mathscr{S}_0$, (17) получает вид

$$\int_S \tau^{(t_2)}(s_2, E) \int_S \tau^{(t_1)}(s_1, \mathrm{d}s_2)\, \mu_s(\mathrm{d}s_1) = \int_S \tau^{(t_1+t_2)}(s_1, E)\, \mu_s(\mathrm{d}s_1)$$

или $\int_S \tau^{(t_2)}(s_2, E)\, \tau^{(t_1)}(s, \mathrm{d}s_2) = \tau^{(t_1+t_2)}(s, E)$. Итак, уравнения перехода показаны и доказательство теоремы 6 окончено.

Замечание 3. Поясним ещё связь пространств X и S и отображений ψ и Ψ. Если $E \subset X$, мы будем в дальнейшем обозначать $\psi(E)$ множество всех точек $\psi(x)$ при x пробегающем E. Скажем, что две точки $x_1, x_2 \in X$ эквивалентны, если любое множество $E \in \mathscr{X}$ либо содержит обе точки либо не содержит ни одну из них. Тогда очевидно, что для каждой $f_0 \in \mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ должно быть $f_0(x_1) = f_0(x_2)$. Из доказательства теорем IV. 6. 20, или же IV. 6. 18 в [2] вытекает, что $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, значит, отображение ψ именно „отождествляет" эквивалентные точки в X. Однако ясно, если x_1, x_2 не эквивалентны, то существует $f_0 \in \mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ такая, что $f_0(x_1) \neq f_0(x_2)$, и следовательно $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$. Итак, если мы отождествляем эквивалентные точки (иначе говоря, если мы берём именно точки $\psi(x)$), то приходим к заключению, что функции из $\mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ различают точки X и в силу следствия IV. 6. 19 в [2] $\psi(X)$ является плотной частью S. Пусть далее E некоторое множество из $\mathscr{X}$, χ_E его характеристическая функция. Из (16) мы имеем

$$(\Phi\chi_E)(\psi(x)) = \chi_E(x) \quad \text{для всякого} \quad x \in X\,, \tag{18}$$

и мы знаем тоже, что $\Phi\chi_E$ характеристическая функция определённого множества $\Psi(E) \in \mathscr{S}_a$. Если $x \in E$, то (18) равно 1, и поэтому $\psi(x) \in \Psi(E)$. Следовательно, $\psi(E) \subset \Psi(E)$, и так как $\Psi(E)$ замкнуто, мы получим тоже $\overline{\psi(E)} \subset \Psi(E)$, где $\overline{\psi(E)}$ замыкание $\psi(E)$ в топологическом пространстве S. Обратно, пусть $s \in \Psi(E)$ и пусть G произвольная открытая окрестность точки s. Так как $\Psi(E)$ открыто, то и $G \cap \Psi(E)$ является открытой окрестностью s. В силу плотности

$\psi(X)$ в S теперь существует точка $x \in X$ такая, что $\psi(x) \in G \cap \Psi(E)$. Но из этого следует, что (18) равно 1, и поэтому $x \in E$. Мы показали этим, что $\psi(E)$ имеет непустое пересечение с G, так что $s \in \overline{\psi(E)}$. Следовательно $\Psi(E) \subset \overline{\psi(E)}$, и, потому что обратное включение мы доказали раньше, мы получаем $\Psi(E) = \overline{\psi(E)}$ для каждого $E \in \mathscr{X}$.

Замечание 4. Очевидно, теорема 6 остаётся справедливой, даже если мы в качестве параметрического множества (т. е. множества значений t) возьмём произвольное множество R на действительной числовой прямой. Теорема 6 является потом частным случаем при $R = [0, \infty)$; другой специализацией при $R = \{0, 1, 2, \ldots\}$ мы получим аналогичную теорему о представлении для дискретных систем Маркова (см. [7]), то есть для цепей Маркова.

Литература

[1] *R. C. Bartle, N. Dunford, J. T. Schwartz:* Weak compactness and vector measures. Canadian J. Math. *7* (1955), 289—305.

[2] *N. Dunford, J. T. Schwartz:* Linear operators I. Interscience Publishers, New York 1958.

[3] *W. Feller:* Non-Markovian processes with the semigroup property. Annals Math. Stat. *30* (1959), 1252—1253.

[4] *A. Fouillade:* Sur les substitutions fonctionnelles linéaires. Bull. Sci. Acad. Roy. Belg. *20* (1934), 282—290.

[5] *P. Halmos:* Measure theory. New York 1950.
Русский перевод: *П. Халмош:* Теория меры. Москва 1953.

[6] *J. Radon:* Über lineare Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen. S.-B. Akad. Wiss. Wien *128* (1919), 1089—1121.

[7] *Z. Šidák:* Integral representations for transition probabilities of Markov chains with a general state space. Czech. Math. J. *12* (*87*), 1962, 492—522.

Summary

OPERATORS IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS AND THE REPRESENTATION OF MARKOV PROCESSES IN A COMPACT HAUSDORFF SPACE

Zbyněk Šidák, Praha

Let S be a compact Hausdorff space, $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}_0$) σ-algebra of its Borel (resp. Baire) sets, X an arbitrary abstract space, $\mathscr{X}$ a σ-algebra of its subsets. Let us denote $\boldsymbol{C}(S)$ the space of all bounded continuous functions on S, $\boldsymbol{B}(X, \mathscr{X})$ the space of all bounded $\mathscr{X}$-measurable functions on X, and in both spaces let us take the norm $\|f\| = \sup |f(x)|$. Further, $\boldsymbol{rca}\,(S, \mathscr{S})$ (resp. $\boldsymbol{rca}\,(S, \mathscr{S}_0)$) denotes the space of all regular Borel (resp. Baire) signed measures of bounded variation, the norm in these spaces being given by the total variation.

The following theorem is well known: If T is a linear continuous operator in $\mathbf{C}(S)$, then there exists a function $\tau(.,\,.)$ of variables $s \in S$, $E \in \mathscr{S}$ having the following properties:

(a) $\tau(s,\,.) \in \boldsymbol{rca}\,(S, \mathscr{S})$ for each $s \in S$,

(b) $(Tf)\,(s) = \int_S f(s_1)\,\tau(s, \mathrm{d}s_1)$ for each $f \in \mathbf{C}(S)$, $s \in S$,

(c) $\|T\| = \sup\limits_{s \in S} \|\tau(s,\,.)\|$.

In the present paper the following property is proved in addition

(d) $\tau(.,\,E) \in \mathbf{B}(S, \mathscr{S})$ for each $E \in \mathscr{S}$.

If T_1^* in $\boldsymbol{rca}\,(S, \mathscr{S})$ is the adjoint operator of T then

$$(T_1^*\mu)\,(E) = \int_S \tau(s, E)\,\mu(\mathrm{d}s) \quad \text{for all} \quad \mu \in \boldsymbol{rca}\,(S, \mathscr{S}),\ E \in \mathscr{S}_0\,,$$

and $(T_1^*\mu)\,(E)$ for $E \in \mathscr{S}$ is obtained as the regular extension of the preceding measure from $\mathscr{S}_0$ to $\mathscr{S}$.

Further, some sufficient conditions are given for $\int_S \tau(s,\,.)\,\mu(\mathrm{d}s) \in \boldsymbol{rca}\,(S, \mathscr{S})$.

If we restrict ourselves to Baire measures $\tau(s,\,.) \in \boldsymbol{rca}\,(S, \mathscr{S}_0)$ then an analogy of (a), (b), (c) is true, and further

(d') $\tau(.,\,E) \in \mathbf{B}(S, \mathscr{S}_0)$ for each $E \in \mathscr{S}_0$.

If T_0^* in $\boldsymbol{rca}\,(S, \mathscr{S}_0)$ is the adjoint operator of T then

$$(T_0^*\mu)\,(E) = \int_S \tau(s, E)\,\mu(\mathrm{d}s) \quad \text{for all} \quad \mu \in \boldsymbol{rca}(S, \mathscr{S}_0),\ E \in \mathscr{S}_0\,.$$

The last section deals with Markov systems in space X with a σ-algebra $\mathscr{X}$, by which we mean a system of functions $p^{(t)}(.,\,.)$ of variables $x \in X$, $E \in \mathscr{X}$, for $t \geqq 0$, where $p^{(t)}(x,\,.)$ is the probability, $p^{(t)}(.,\,E) \in \mathbf{B}(X, \mathscr{X})$ and $p^{(t)}$ satisfy the Chapman-Kolmogorov transition relations. The following theorem is proved: Let $p^{(t)}$ be a Markov system in an arbitrary space X with a σ-algebra $\mathscr{X}$. Then there exists a topological space S with a σ-algebra $\mathscr{S}_0$, and a Markov system $\tau^{(t)}$ in it possessing the following properties:

(a) S is a totally disconnected compact Hausdorff space,

(b) $\tau^{(t)}(s,\,.) \in \boldsymbol{rca}\,(S, \mathscr{S}_0)$ for each $s \in S$, $t \geqq 0$,

(c) corresponding Markov operators $T^{(t)}$, $t \geqq 0$, defined by

$$(T^{(t)}f)\,(s) = \int_S f(s_1)\,\tau^{(t)}(s, \mathrm{d}s_1)\,, \quad \text{map} \quad f \in \mathbf{C}(S) \quad \text{onto} \quad T^{(t)}f \in \mathbf{C}(S)\,,$$

(d) for an open (resp. closed) set $E \in \mathscr{S}_0$ the functions $\tau^{(t)}(.,\,E)$ are lower (resp. upper) semi-continuous,

(e) there is a mapping ψ of the space X into S, and an isomorphic mapping Ψ of the σ-algebra $\mathscr{X}$ onto the algebra $\mathscr{S}_a$ of open-closed sets in S such that

$$p^{(t)}(x, E) = \tau^{(t)}(\psi(x), \Psi(E))$$

for each $x \in X$, $E \in \mathscr{X}$, $t \geqq 0$. $\Psi(E)$ is equal to the closure of $\psi(E)$ in S.