Czechoslovak Mathematical Journal

František Šik

Über Fortsetzung additiver und isotoner Funktionale auf geordneten Gruppen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 1, 24–36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100550

Чехословацкий математический журнал, т. 13 (88) 1963 Прага

ÜBER FORTSETZUNG ADDITIVER UND ISOTONER FUNKTIONALE AUF GEORDNETEN GRUPPEN

FRANTIŠEK ŠIK, Brno

(Eingelangt am 29. November 1960)

In dieser Abhandlung, die eine natürliche Fortsetzung der Arbeit [2] darstellt, befassen wir uns mit den Strukturfragen der Menge aller Fortsetzungen eines additiven und isotonen Funktionals f, das auf einer Untergruppe H einer abelschen (teilweise) geordneten Gruppe G definiert ist.

In dieser Arbeit werden nur abelsche Gruppen behandelt; deshalb verstehen wir unter einer Gruppe stets eine abelsche Gruppe; die Gruppenoperation wird additiv geschrieben. Eine Gruppe G heisst *geordnet*, wenn in G eine das Nullelement nicht enthaltende Halbgruppe A' (beziehungsweise $A' = \emptyset$) vorgegeben ist. Wir nennen die Menge $A = A' \cup 0$ eine *Anordnung*[1]) der Gruppe G und die Gruppe G mit dieser Anordnung eine *geordnete Gruppe* (kurz eine *po-Gruppe*); in Zeichen (G, A). Sind A, B Anordnungen einer Gruppe G, $A \subseteq B$, so heisst B eine *Erweiterung* der Anordnung A. Ein *additives und isotones Funktional* F (kurz ein *ai-Funktional*) auf einer *po*-Gruppe (G, A) ist eine homomorphe und isotone Abbildung der *po-Gruppe* (G, A) in die linear geordnete additive Gruppe der reellen Zahlen ($a, b \in G$, $c \in A \Rightarrow F(a + b) = F(a) + F(b)$, $F(c) \geqq 0$). Die Menge aller *ai*-Funktionale auf der *po*-Gruppe (G, A) bezeichnen wir mit $\widetilde{(G, A)}$. Man kann eine beliebige Untergruppe H der *po*-Gruppe (G, A) als eine *po*-Gruppe mit einer Anordnung $H \cap A$ ansehen. Ist f ein *ai*-Funktional auf $(H, H \cap A)$, dann heisst ein *ai*-Funktional F auf (G, A) eine *Fortsetzung* von H auf (G, A) des *ai*-Funktionals f, wenn die partielle Funktion F_H auf H mit f identisch ist.

In der Arbeit werden folgende Fragen gelöst:

1. Es sei ein $y \in G$ gegeben und Ψ sei die Menge aller Fortsetzungen von H auf (G, A) des *ai*-Funktionals f. Wir untersuchen die Struktur der Zahlenmenge $\{F(y) \mid F \in \Psi\}$.

[1]) In der Arbeit [2] wurde schon die Menge A' eine Anordnung genannt. Wir werden meist der oben aufgestellten Definition den Vorzug geben, da sie für Beweisführung häufig besser geeignet ist.

2. Eindeutigkeitsbedingungen der Fortsetzung des ai-Funktionals f und die Bestimmung dieser (eindeutigen) Fortsetzung.

Das zweite Problem hat einige Varianten.

Es handelt sich entweder a) um die Eindeutigkeitsbedingungen der Fortsetzung des ai-Funktionals f von H auf (G, A), oder $b)$ um die Bestimmung der Untermenge M in G, auf der alle Fortsetzungen des ai-Funktionals f von H auf (G, A) zusammenfallen, oder schliesslich c) es handelt sich um die Bestimmung der Menge N solcher Elemente $y \in G$, für die je zwei Fortsetzungen des ai-Funktionals f von H auf die durch die Untergruppe H und das Element y erzeugte Untergruppe $\{H, y\}$ (die sog. „*über* $[H, f]$ *eindeutig bewerteten Elemente*") übereinstimmen.

Solange $\Psi \neq \emptyset$ ist, so ist die Menge $\{F(y) \mid F \in \Psi\}$ ein Intervall (bzw. eine Menge, die nur eine reelle Zahl enthält), die Mengen M, N sind die Untergruppe H enthaltende Untergruppen. Die eindeutige, aus den Fragen a)b) folgende Fortsetzung des ai-Funktionals f ist durch die in der Definition 3 eingeführte Funktion $s(y)$ realisiert. Schliesslich sei F ein ai-Funktional auf (G, A) und N die Menge, die sub c) bezüglich einer Untergruppe H in G und des ai-Funktionals F_H auf $(H, H \cap A)$ beschrieben ist. Wenn wir mit $\bar{H}$ die Untergruppe N bezeichnen, dann ist die in solcher Weise definierte Operation eine Abschliessungsoperation, d.h. es gilt $\bar{H} \supseteq H$; $\bar{H} = \bar{\bar{H}}$; $H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow \bar{H}_1 \subseteq \bar{H}_2$.

Mit einer ähnlichen Problematik beschäftigte sich W. NEF [1] auf geordneten Vektorräumen. In der vorliegenden Arbeit ist die in [1] benützte Methode vereinfacht und für die Anwendung auf geordneten Gruppen verallgemeinert und die Resultate sind in einer Richtung verbreitet und vertieft (Hilfssatz 2.3, Satz 3.5).

1. Ein für allemal bedeutet (G, A) eine abelsche po-Gruppe, H eine ihrer Untergruppen, f ein ai-Funktional auf $(H, H \cap A)$, E eine Erweiterung der Anordnung A der Gruppe G, für die $f \in \widetilde{(H, H \cap E)}$ gilt, Q die Menge aller Erweiterungen E, die ausser der schon aufgestellten Bedingung

$$(\alpha) \qquad f \in \widetilde{(H, H \cap E)},$$

noch die folgende Bedingung erfüllen:

(β) zu jedem Elemente $y \in G$ existieren Elemente $x, z \in H$ und eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft $x \succ ny \succ z$ (bezüglich E).

Es sei bemerkt, dass wir die Relationen $x - y \in A$ bzw. $x - y \in E$ auch in der Form $x \geqq y$ bzw. $x \succ y$ ausdrücken wollen.

Jedem Elemente $y \in G$ und jeder Erweiterung E der Anordnung A (E muss nicht notwendig die Bedingung (β) erfüllen) ordnen wir zwei Mengen reeller Zahlen $R(y, E)$ und $S(y, E)$ gemäß den folgenden Definitionen zu (ϱ, σ bedeuten reelle und m, n natürliche Zahlen).

Definition 1 $R(y, E) = \{\varrho \mid$ es existiert ein $x \in H$ und ein n mit $x \succ ny$, $\varrho \geqq (1/n) f(x)\}$;

$S(y, E) = \{\sigma \mid$ es existiert ein $z \in H$ und ein m mit $my \succ z$, $\sigma \leqq (1/m) f(z)\}$.

Es ist klar, dass die Menge $R(y, E)$ entweder leer oder ein von oben unbeschränktes Intervall, die Menge $S(y, E)$ entweder leer oder ein von unten unbeschränktes Intervall ist.

Hilfssatz 1.1. *Der Durchschnitt $R(y, E) \cap S(y, E)$ enthält höchstens ein Element.*

Beweis. Es sei $\tau \in R(y, E) \cap S(y, E)$. Für geeignet ausgewählte Elemente $x, z \in H$ und geeignete natürliche Zahlen m, n gilt $x \succ ny$, $my \succ z$, $(1/n) f(x) \leqq \tau \leqq (1/m) f(z)$. Daher folgt

$$nz \prec mny \prec mx\,, \tag{1.1}$$

$$f(mx) \leqq mn\tau \leqq f(nz)\,. \tag{1.2}$$

Die aus (1.1) folgende Relation $f(nz) \leqq f(mx)$ liefert vermöge (1.2) $mn\tau = f(mx) = f(nz)$, d.h. $\tau = (1/n) \,.\, f(x) = (1/m) \,.\, f(z)$. Haben die Symbole τ', x', z', n', m' eine analoge Bedeutung wie τ, x, z, n, m, dann gilt unter Voraussetzung $\tau \leqq \tau'$

$$\frac{1}{n} f(x) = \tau \leqq \tau' = \frac{1}{m'} f(z')\,. \tag{1.3}$$

Die Relationen $x \succ ny$, $m'y \succ z'$ haben $m'x \succ m'ny \succ nz'$ zur Folge und daher ergibt sich

$$\frac{1}{n} f(x) \geqq \frac{1}{m'} f(z')\,. \tag{1.4}$$

Aus (1.4) und (1.3) folgt $\tau = \tau'$.

Hilfssatz 1.2. $\varrho \in R(y, E)$, $\sigma \in S(y, E) \Rightarrow \varrho \geqq \sigma$.

Evident aus Definition 1.

Hilfssatz 1.3. *Ist $E \in Q$, dann gilt $R(y, E) \neq \emptyset \neq S(y, E)$; die erste Menge ist von unten, die zweite von oben beschränkt.*

Das folgt aus Definition 1 und Hilfssatz 1.2.

Hilfssatz 1.4. *Es seien y, y_1, y_2 Elemente der Gruppe G, n eine natürliche Zahl. Dann gilt:*

1. $R(y_1 + y_2, E) \supseteq R(y_1, E) + R(y_2, E)$, 2. $S(y_1 + y_2, E) \supseteq S(y_1, E) + S(y_2, E)$, 3. $R(-y, E) = -S(y, E)$, 4. $R(ny, E) = nR(y, E)$, $S(ny, E) = nS(y, E)$, $R(-ny, E) = -nS(y, E)$, $S(-ny, E) = -nR(y, E)$.

Anmerkung. Ist T eine Zahlenmenge ($\neq \emptyset$ oder $= \emptyset$), so definieren wir $\emptyset + T = T + \emptyset = \emptyset$.

Beweis. 1. Ist eine der Mengen $R(y_i, E)$ leer, so gilt die Behauptung (siehe Anmerkung). Ist $\varrho_i \in R(y_i, E)$, dann gilt für ein $x_i \in H$ und ein natürliches n_i:

$$x_i \succ n_i y_i\,, \quad \varrho_i \geqq \frac{1}{n_i} f(x_i)\,.$$

Daher folgt

$$n_2 x_1 + n_1 x_2 \succ n_1 n_2 (y_1 + y_2)\,, \quad \varrho_1 + \varrho_2 \geqq \frac{1}{n_1 n_2} f(n_2 x_1 + n_1 x_2)\,,$$

so dass

$$\varrho_1 + \varrho_2 \in R(y_1 + y_2, E)$$

gilt.

3. Der Fall der leeren Mengen ist trivial. Ist $\varrho \in R(-y, E)$, dann existiert ein $x \in H$ und ein natürliches n mit $\varrho \geqq (1/n) \cdot f(x)$, $x \succ -ny$. Daraus ergibt sich $-\varrho \leqq \leqq (1/n) \cdot f(-x)$, $-x \prec ny$, $-x \in H$ und somit $-\varrho \in S(y, E)$, $\varrho \in -S(y, E)$, d.h. $R(-y, E) \subseteq -S(y, E)$. Umgekehrt: $-\varrho \in S(y, E) \Rightarrow$ für ein $x \in H$ und ein natürliches n ist $-\varrho \leqq (1/n) \cdot f(x)$, $x \prec ny \Rightarrow \varrho \geqq (1/n) \cdot f(-x)$, $-x \in H$, $-x \succ n(-y) \Rightarrow \Rightarrow \varrho \in R(-y, E)$.

2. Folgt aus 1 und 3.

4. Ist eine der Mengen $R(ny, E)$, $R(y, E)$ leer, so ist leer auch die andere. Ist umgekehrt $\varrho \in R(ny, E)$, dann existieren ein $x \in H$ und ein $m > 0$ mit $x \succ mny$, $\varrho \geqq \geqq (1/m) \cdot f(x)$. Daher folgt $\varrho/n \geqq (1/mn) \cdot f(x)$, $\varrho/n \in R(y, E)$, d.h. $R(ny, E) \subseteq \subseteq nR(y, E)$. Beweis der umgekehrten Implikation: $\varrho \in nR(y, E) \Rightarrow \varrho/n \in R(y, E) \Rightarrow \Rightarrow$ es existieren ein $x \in H$ und ein $m > 0$ mit $x \succ my$, $\varrho/n \geqq (1/m) \cdot f(x) \Rightarrow \varrho \geqq \geqq (1/m) \cdot f(nx)$. Gleichzeitig gilt $nx \in H$, $nx \succ m(ny)$ und damit $\varrho \in R(ny, E)$, d.h. $nR(y, E) \subseteq R(ny, E)$.

Übrige Relationen folgen aus 4 und 3.

Definition 2. $r(y, E) = \inf R(y, E)$, $s(y, E) = \sup S(y, E)$.

Die oben definierten Grössen sind endlich, wenn $E \in Q$ gilt (Hilfssatz 1.3).

Hilfssatz 1.5. 1. $r(y_1 + y_2, E) \leqq r(y_1, E) + r(y_2, E)$, 2. $s(y_1 + y_2, E) \geqq s(y_1, E) + + s(y_2, E)$; 3. $r(-y, E) = -s(y, E)$; 4. $r(ny, E) = nr(y, E)$, $s(ny, E) = ns(y, E)$, $r(-ny, E) = -ns(y, E)$, $s(-ny, E) = -nr(y, E)$ (*n bedeutet eine beliebige natürliche Zahl*); 5. $r(y, E) \geqq s(y, E)$; 6. $y \in H \Rightarrow r(y, E) = f(y) = s(y, E)$; 7. $r(0, E) = = 0 = s(0, E)$.

Anmerkung. Die Relationen gelten jedenfalls (r und s endlich oder unendlich) mit Ausnahme der Relationen 1 und 2, die keinen Sinn haben, wenn die rechte Seite die Form $\infty + (-\infty)$ oder $-\infty + \infty$ annimmt.

Beweis von 1 bis 4 folgt unmittelbar aus Hilfssatz 1.4, von 5 aus Hilfssatz 1.2. Für den Beweis zu 6 braucht man zu bemerken, dass $y \in H$ $f(y) \in R(y, E) \cap S(y, E)$ zur Folge hat. 7. ist ein Spezialfall von 6.

Hilfssatz 1.6. $y_1 \geqq y_2 \Rightarrow R(y_1, E) \subseteq R(y_2, E),\ S(y_1, E) \supseteq S(y_2, E)$.

Beweis. Ist $R(y_1, E) = \emptyset$ oder $S(y_2, E) = \emptyset$, dann sind die Beziehungen gültig. Ist $\varrho \in R(y_1, E)$, dann gilt $\varrho \geqq (1/n) . f(x), x \succ ny_1$ für ein $x \in H$ und ein natürliches n. Da $x \succ ny_2$ gilt, so erhalten wir $\varrho \in R(y_2, E)$. Die zweite Behauptung ergibt sich aus der ersten mit Rücksicht auf Hilfssatz 1.4.3.

Eine unmittelbare Folgerung der vorangehenden Behauptung ist

Hilfssatz 1.7. *Die Funktionen $r(y, E)$, $s(y, E)$ sind isoton.*

2. Der folgende Satz beweist, dass (α), (β) hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Fortsetzung des auf der Untergruppe H definierten *ai*-Funktionals f sind. Mit Rücksicht darauf, dass im nachfolgenden Satze nicht $f \neq 0$ vorausgesetzt wird, ist der Satz stärker als der 3.1 aus [2].

Satz 2.1. *Ist $E \in Q$, $y_0 \in G$, ψ eine (endliche) relle Zahl, $s(y_0, E) \leqq \psi \leqq r(y_0, E)$, dann existiert eine Fortsetzung F von H auf (G, E) des ai-Funktionals f mit $F(y_0) = \psi$.*

Beweis. Definieren wir für ein beliebiges Element $x + ny_0$ der Untergruppe $H_0 = \{H, y_0\}$ ($x \in H$, n eine ganze Zahl) $F_0(x + ny_0) = f(x) + n\psi$, so ist F_0 eine (eventuell) mehrdeutige und offenbar additive auf H_0 definierte Funktion. F_0 ist isoton bezüglich E: $x + ny_0 \succ 0 \Rightarrow x \succ -ny_0 \Rightarrow f(x) \in R(-ny_0, E) \Rightarrow f(x) \geqq r(-ny_0, E)$. Für $n > 0$ gilt nach Hilfssatz 1.5 $f(x) \geqq r(-ny_0, E) = -ns(y_0, E) \geqq -n\psi$; für $n \leqq 0$ ergibt sich $f(x) \geqq r(-ny_0, E) = -nr(y_0, E) \geqq -n\psi$. Jedenfalls ist also $F_0(x + n_0 y) = f(x) + n\psi \geqq 0$.

Für Beweis der Eindeutigkeit der Funktion F_0 sei bemerkt, dass die Gleichung $x + ny_0 = 0$ einerseits $x + ny_0 \succ 0$ und damit

$$F_0(x + ny_0) \geqq 0\,, \tag{2.1}$$

anderseits $x + ny_0 \prec 0$ und also

$$F_0(x + ny_0) \leqq 0 \tag{2.2}$$

liefert. Zufolge (2.1) und (2.2) erhalten wir $F_0(x + ny_0) = 0$. Ist nun $x + ny_0 = x' + n'y_0$, dann ist $(x - x') + (n - n')\, y_0 = 0$, woraus $0 = F_0[(x - x') + (n - n')\, y_0] = f(x - x') + (n - n')\, \psi, f(x) + n\psi = f(x') + n'\psi$, d.h. $F_0(x + ny_0) = F_0(x' + n'y_0)$ folgt. Mit Hilfe der transfiniten Konstruktion kann man in üblicher Weise die Definition der Funktion F_0 auf die ganze *po*-Gruppe (G, E) fortsetzen.

Wir ordnen Elemente aus G in eine transfinite Folge vom Typ ϱ, so dass Elemente aus H vor allen anderen stehen, wobei y_0 das erste von diesen ist. Wir wählen eine Ordnungszahl σ, $\sigma < \varrho$ und setzen voraus, dass für jedes α, $\alpha < \sigma$, jede Untergruppe H_α und *ai*-Funktionale F_α auf $(H_\alpha, E \cap H_\alpha)$ schon konstruiert sind, so dass für jedes $\beta < \alpha$ $H_\alpha \supseteq H_\beta$ gilt und F_α eine Fortsetzung jedes *ai*-Funktionals F_β von H_β auf $(H_\alpha, E \cap H_\alpha)$ ist. Ist σ eine Limeszahl, bezeichnen wir mit $H_\sigma = \bigcup_{\alpha<\sigma} H_\alpha$ und für

$y \in H_\alpha$ definieren wir $F_\sigma(y) = F_\alpha(y)$. Offenbar gilt $H_\sigma \supseteq H_\alpha$ und F_σ ist eine Fortsetzung jedes F_α von H_α auf $(H_\sigma, E \cap H_\sigma)$. Ist σ isoliert, so wählen wir das erste Element y_σ, y_σ non $\in H_{\sigma-1}$. Mit H_σ bezeichnen wir die Untergruppe $\{H_{\sigma-1}, y_\sigma\}$, wählen eine (endliche) reelle Zahl ψ_σ, so dass $s(y_\sigma, E) \leqq \psi_\sigma \leqq r(y_\sigma, E)$ gilt und mit Hilfe der oben angegebenen Konstruktion bilden wir eine Fortsetzung F_σ des ai-Funktionals $F_{\sigma-1}$ von $H_{\sigma-1}$ auf $(H_\sigma, E \cap H_\sigma)$. So ist die Konstruktion erbracht und der Beweis vollendet.

Definition 3. Ist $Q \neq \emptyset$, so definieren wir $r(y) = \sup_{E \in Q} r(y, E)$, $s(y) = \inf_{E \in Q} s(y, E)$.

Die oben definierten Funktionen können als Werte auch ∞, $-\infty$ annehmen. Es gilt offenbar $-\infty < r(y)$, $s(y) < \infty$, $s(y) \leqq r(y)$ (Hilfssatz 1.5.5).

Satz 2.2. *Ist F eine Fortsetzung von H auf (G, A) des ai-Funktionals f, $f \neq 0$, dann gilt $s(y) \leqq F(y) \leqq r(y)$ für jedes $y \in G$.*

Beweis. Aus [2], Satz 3.4, folgt die Existenz einer Erweiterung E der Anordnung A der Gruppe G, die die Bedingungen (α), (β) erfüllt und für die $F \in \widetilde{(G, E)}$ gilt. Es ist also $E \in Q$. Für ein beliebig ausgewähltes Element $y \in G$ gilt:

$$\sigma \in S(y, E) \Rightarrow \sigma \leqq \frac{1}{n} f(x)\,, \quad x \prec ny \text{ für ein } x \in H \text{ und ein natürliches } n \Rightarrow \sigma \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n} f(x) = \frac{1}{n} F(x) \leqq F(y) \Rightarrow s(y, E) \leqq F(y)\,. \text{ Aus Hilfssatz 1.5.3 folgt } F(y) \leqq$$

$\leqq r(y, E)$ und daher das gesuchte Resultat $s(y) \leqq s(y, E) \leqq F(y) \leqq r(y, E) \leqq r(y)$.

Hilfssatz 2.3. *Ist $Q \neq \emptyset$, $y \in (G, A)$, so existiert eine Folge $\{F_n\}$ von Fortsetzungen von H auf (G, A) des ai-Funktionals f, so dass $F_n(y) \to r(y)$, $n \to \infty$ gilt. Eine ähnliche Behauptung gilt auch für $s(y)$.*

Beweis. Es existiert eine Folge $\{E_n\}$ von Erweiterungen der Anordnung A der Gruppe G mit den Eigenschaften $E_n \in Q$. $r(y, E_n) \to r(y)$, $n \to \infty$. Die Grössen $r(y, E_n)$ sind endlich und deshalb existiert nach Satz 2.1 eine Fortsetzung F_n von H auf (G, A) des ai-Funktionals f mit $F_n(y) = r(y, E_n)$. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 2.4. *Ist $Q \neq \emptyset$ und gilt für ein Element $y \in (G, A)$ und eine reelle Zahl η $s(y) < \eta < r(y)$, dann existiert eine Fortsetzung F von H auf (G, A) des ai-Funktionals f mit $F(y) = \eta$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 2.3 existieren Fortsetzungen F_1, F_2 von H auf (G, A) des ai-Funktionals f mit $F_1(y) < \eta < F_2(y)$. Wählen wir reelle Zahlen λ, μ, so dass $\lambda F_1(y) + \mu F_2(y) = \eta$, $\lambda + \mu = 1$ gilt (solche λ, μ existieren offenbar), dann ist $F = \lambda F_1 + \mu F_2$ die gesuchte Fortsetzung von H auf (G, A) des ai-Funktionals f. F ist nämlich offenbar additiv, $F(y) = \eta$ und für jedes $x \in H$ gilt $F(x) = \lambda F_1(x) + \mu F_2(x) = (\lambda + \mu) f(x) = f(x)$. Ist $z \in A$, dann gilt $F(z) = \lambda F_1(z) + \mu F_2(z) \geqq 0$, denn jede der Zahlen $F_1(z)$, $F_2(z)$, λ, μ ist nichtnegativ. Wir beweisen z.B. $1 \geqq \lambda \geqq 0$: $\lambda F_1(y) + \mu F_2(y) = \eta \Rightarrow \eta = \lambda F_1(y) + (1 - \lambda) F_2(y) = -\lambda[F_2(y) - F_1(y)] + F_2(y) \Rightarrow 1 \geqq \lambda = F_2(y) - F_1(y) \geqq 0$. Daraus folgt gleich $1 \geqq \mu \geqq 0$ und der Beweis ist erbracht.

3. Im folgenden bestimmen wir die Menge der Elemente in G, auf den alle Fortsetzungen von H auf G des *ai*-Funktionals f übereinstimmen.

Hilfssatz 3.1. *Ist* $Q \neq \emptyset$, *dann gilt* $r(y) = \inf \bigcap_{E \in Q} R(y, E)$, $s(y) = \sup \bigcap_{E \in Q} S(y, E)$.

Anmerkung. Sup $\emptyset$ bzw. inf $\emptyset$ bedeutet, wie üblich, $-\infty$ bzw. ∞.

Beweis. Es sei $r' = \sup_{E \in Q} r(y, E)$, $\bar{r} = \inf \bigcap_{E \in Q} R(y, E)$. Die Relation $r' = -\infty$ liefert $r' \leqq \bar{r}$. Ist $r' > -\infty$, wählen wir ϱ, $\varrho < r'$; dann gilt $\varrho < r(y, E_1) = \inf R(y, E_1)$ für ein $E_1 \in Q$, also ist $\varrho < \varrho'$, für jedes $\varrho' \in R(y, E_1)$ und daher $\varrho \leqq \bar{r}$. Daraus folgt $r' \leqq \bar{r}$.

Die umgekehrte Ungleichung $r' \geqq \bar{r}$ ist evident, wenn $r' = \infty$. Ist $r' < \infty$, $\varrho > r'$, dann gilt $\varrho > r(y, E) = \inf R(y, E)$ für jedes $E \in Q$, so dass $\varrho \in R(y, E)$ für jedes $E \in Q$, $\varrho \in \bigcap_{E \in Q} R(y, E)$, $\varrho \geqq \bar{r}$ gilt, und daher $r' \geqq \bar{r}$.

Die zweite Beziehung erhalten wir aus der ersten zufolge Hilfssatz 1.4.3 und 1.5.3.

Unter einem *Endlichkeitsbereich* der Funktion r bzw. s verstehen wir die Menge aller $y \in G$, für die $r(y)$ bzw. $s(y)$ endlich sind.

Hilfssatz 3.2. *Es sei* $Q \neq \emptyset$. *Die Endlichkeitsbereiche* $\mathfrak{R}$ *bzw.* $\mathfrak{S}$ *der Funktionen* r *bzw.* s *erfüllen die Bedingungen*: $x, y \in \mathfrak{R}$, $z \in G$, $x \geqq z \Rightarrow x + y \in \mathfrak{R}$, $z \in \mathfrak{R}$; $x, y \in \mathfrak{S}$, $z \in G$, $z \geqq x \Rightarrow x + y \in \mathfrak{S}$, $z \in \mathfrak{S}$. $\mathfrak{R} = -\mathfrak{S}$. *Der Durchschnitt* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ *ist eine konvexe Untergruppe in* (G, A) *und es gilt* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S} \supseteq H$.

Beweis. Infolge des Hilfssatzes 1.4.1 gilt für beliebige $y_1, y_2 \in G$

$$(3.1)\quad \bigcap_{E \in Q} R(y_1 + y_2, E) \supseteq \bigcap_{E \in Q} [R(y_1, E) + R(y_2, E)] \supseteq \bigcap_{E \in Q} R(y_1, E) + \bigcap_{E \in Q} R(y_2, E).$$

Ist $y_1, y_2 \in \mathfrak{R}$, dann ist der Durchschnitt auf der linken Seite a) eine nichtleere Menge, denn beide letzten Durchschnitte rechts sind nach Voraussetzung nichtleer (Hilfssatz 3.1); b) eine von unten beschränkte Menge, denn jede Menge dieses Durchschnittes ist von unten beschränkt. Es gilt also $y_1, y_2 \in \mathfrak{R} \Rightarrow y_1 + y_2 \in \mathfrak{R}$. Ist nun $x \in \mathfrak{R}$, $y \in G$, $y \leqq x$, dann ist $R(x, E) \subseteq R(y, E)$ für jedes $E \in Q$ (nach Hilfssatz 1.6); damit ist $\bigcap_{E \in Q} R(x, E) \subseteq \bigcap_{E \in Q} R(y, E)$. Die Menge $\bigcap_{E \in Q} R(y, E)$ ist offensichtlich nichtleer und von unten beschränkt. Daher folgt $y \in \mathfrak{R}$. Aus Hilfssatz 1.4.3 ergibt sich $\bigcap_{E \in Q} R(-y, E) = -\bigcap_{E \in Q} S(y, E)$ und daraus die Behauptung über $\mathfrak{S}$ und die Relation $\mathfrak{R} = -\mathfrak{S}$. Die letzte Behauptung ist evident.

Hilfssatz 3.3. *Es sei $Q \neq \emptyset$ und n eine natürliche Zahl.*

a) *Ist* $y, y_1, y_2 \in \mathfrak{R}$, *dann gilt* 1. $r(y_1 + y_2) \leqq r(y)_1 + r(y_2)$, 2. $r(ny) = nr(y)$.
b) *Ist* $y, y_1, y_2 \in \mathfrak{S}$, *dann gilt* 1. $s(y_1 + y_2) \geqq s(y_1) + s(y_2)$, 2. $s(ny) = ns(y)$.
c) *Für* $y \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ *gilt* 1. $r(y) \geqq s(y)$, 2. $r(-y) = -s(y)$.
d) *Für* $y \in H$ *gilt*: $r(y) = f(y) = s(y)$; *speziell ist* $r(0) = 0 = s(0)$.
e) $r(y)$ *bzw.* $s(y)$ *sind isotone Funktionen auf* $\mathfrak{R}$ *bzw.* $\mathfrak{S}$.

Beweis. Aus Relationen (3.1) und aus Hilfssatz 3.1 folgt

$$r(y_1 + y_2) = \inf \bigcap_{E \in Q} R(y_1 + y_2, E) \leqq \inf \left[\bigcap_{E \in Q} R(y_1, E) + \bigcap_{E \in Q} R(y_2, E) \right] =$$
$$= \inf \bigcap_{E \in Q} R(y_1, E) + \inf \bigcap_{E \in Q} R(y_2, E) = r(y_1) + r(y_2) .$$

Die übrigbleibenden Formeln erhalten wir mit Hilfe der Hilfssätze 1.4, 1.5, 1.6 und 3.2.

Satz 3.4. *Es sei $Q \neq \emptyset$, $z \in G$, $f \neq 0$. Für zwei beliebige Fortsetzungen F_1, F_2 von H auf (G, A) des ai-Funktionals f gilt $F_1(z) = F_2(z)$ dann und nur dann, wenn $r(z) = s(z)$ ist. Die Menge M aller Elemente $z \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$, für die $r(z) = s(z)$ gilt, ist eine Untergruppe in G, $M \supseteq H$, und die auf M definierte Funktion $F(z) = s(z)$ ist eine Fortsetzung von H auf $(M, M \cap A)$ des ai-Funktionals f.*

Beweis. Stimmen die Funktionen r, s in einem $y \in G$ überein, dann ist $-\infty < r(y) = s(y) < \infty$ und deshalb ist $y \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$. Die Annahme $y_k \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$, $s(y_k) = r(y_k)$ $(k = 1, 2)$ ergibt nach Hilfssatz 3.3 $r(y_1 + y_2) \leqq r(y_1) + r(y_2) = s(y_1) + s(y_2) \leqq s(y_1 + y_2)$, d.h.

$$r(y_1 + y_2) = s(y_1 + y_2) = s(y_1) + s(y_2) . \tag{3.2}$$

Die Relationen $\mathfrak{R} = -\mathfrak{S}$ und $y \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ liefern $-y \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ und damit ist $s(-y) = -r(y) = -s(y) = r(-y)$, $H \subseteq M$. M ist demnach eine H umfassende Untergruppe. Das Funktional $F = s$ ist vermöge (3.2) additiv und zufolge Hilfssatz 3.3 isoton. Ist nun F eine Fortsetzung von H auf (G, A) des ai-Funktionals f, $f \neq 0$, dann gilt für $z \in M$ (Satz 2.2) $s(z) \leqq F(z) \leqq r(z) = s(z)$, also $F(z) = s(z)$. Gehört ein Element $z \in G$ nicht zu M, dann ist $s(z) < r(z)$ und für reelle Zahlen η_1, η_2, $s(z) < \eta_1 < \eta_2 < r(z)$, existieren nach Satz 2.4 Fortsetzungen F_1, F_2 von H auf (G, A) des ai-Funktionals f mit $F_k(z) = \eta_k (k = 1, 2)$.

Die Frage der Eindeutigkeit der Fortsetzung von H auf (G, A) eines von Null verschiedenen ai-Funktionals f löst der folgende Satz.

Satz 3.5. *Ist $f \neq 0$, dann sind folgende Bedingungen auf einer po-Gruppe (G, A) äquivalent:*

1. *Es existiert genau eine Fortsetzung von H auf (G, A) des ai-Funktionals f.*
2. $s(y) = r(y)$ *für jedes* $y \in G$; $Q \neq \emptyset$.

3. *Es ist $Q \neq \emptyset$; zu jedem $E \in Q$, zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ und zu jedem Element $y \in G$ existieren Elemente $x, z \in H$ und eine natürliche Zahl n, so dass $x \succ ny \succ z$ (bezüglich E), $f(x) - f(z) < n\varepsilon$ gilt.*

Beweis. Gilt die Bedingung 1, dann ist nach [2], Satz 3.2, $Q \neq \emptyset$ und nach Satz 3.4 ist $r(y) = s(y)$ für jedes $y \in G$. Gilt 2, so gilt nach Satz 3.4 auch 1. Damit ist $1 \Leftrightarrow 2$ bewiesen.

$2 \Rightarrow 3$: Für jedes $E \in Q$ und jedes $y \in G$ erhalten wir $s(y) \leqq s(y, E) \leqq r(y, E) \leqq \leqq r(y) = s(y)$, d.h. $s(y, E) = r(y, E)$. Es sei ein $y \in G$ und ein $E \in Q$ beliebig ausgewählt. Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in H$ und ein natürliches n, so dass

$$x \succ ny\,, \quad \frac{1}{n} f(x) - r(y, E) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.3}$$

gilt; ferner existiert ein $z \in H$ und ein natürliches m mit den Eigenschaften

$$my \succ z\,, \quad s(y, E) - \frac{1}{m} f(z) < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.4}$$

Aus (3.3) und (3.4) erhalten wir schliesslich $x_0 \succ n_0 y \succ z_0, f(x_0) - f(z_0) < n_0\varepsilon$ und zwar bei der Bezeichnung $x_0 = mx$, $z_0 = nz$, $n_0 = mn$.

$3 \Rightarrow 2$: Es sei ein $E \in Q$ und ein $y \in G$ gegeben. Nach Voraussetzung existieren zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ Elemente $x, z \in H$ und eine natürliche Zahl n mit $x \succ ny \succ z$, $f(x) - f(z) < n\varepsilon$. Es gilt also

$$\frac{1}{n} f(x) \geqq r(y, E)\,, \quad s(y, E) \geqq \frac{1}{n} f(z)$$

und daher

$$r(y, E) - s(y, E) \leqq \frac{1}{n}\left[f(x) - f(z)\right] < \varepsilon\,, \quad \text{d.h.} \quad r(y, E) = s(y, E)$$

für jedes $E \in Q$, woraus die Gleichung $r(y) = s(y)$ für jedes $y \in G$ hervorgeht. Damit ist $3 \Rightarrow 2$ bewiesen.

Anmerkung. Zu Satz 3.5 kann noch eine Bedingung zugefügt werden, die formal einfacher als die Bedingung 3 ist. Wir setzen voraus, dass E die bisherige Bedeutung hat und dass Q^* die Menge aller E ist, die ausser der Bedingung (α) noch der folgenden genügen:

(β^*) Zu jedem $y \in G$ existieren Elemente $x, z \in H$ mit $x \succ y \succ z$ (bezüglich E).

Wenn wir definieren

$$\begin{gathered} R^*(y, E) = \{\varrho \mid \text{es existiert ein } x \in H \text{ mit } x \succ y,\ \varrho \geqq f(x)\}\,, \\ S^*(y, E) = \{\sigma \mid \text{es existiert ein } z \in H \text{ mit } x \succ z,\ \sigma \leqq f(z)\}\,, \\ r^*(y, E) = \inf R^*(y, E)\,, \quad s^*(y, E) = \sup S^*(y, E)\,, \\ r^*(y) = \sup_{E \in Q^*} r^*(y, E)\,, \quad s^*(y) = \inf_{E \in Q^*} s^*(y, E)\,, \end{gathered}$$

so kann eine analoge Theorie zu der vorangehenden entwickelt werden, die sich auf die oben aufgestellten Begriffe bezieht. Die erwähnte weitere Bedingung in Satz 3.5 kann dann folgenderweise formuliert werden:

4. *Es gilt* $Q^* \neq \emptyset$. *Zu jedem* $E \in Q^*$, *zu jeder reellen Zahl* $\varepsilon > 0$ *und zu jedem* $y \in G$ *existieren Elemente* $x, z \in H$ *mit* $x \succ y \succ z, f(x) - f(z) < \varepsilon$.

4. In diesem Absatz befassen wir uns mit der Frage der Eindeutigkeit der Fortsetzung des *ai*-Funktionals f von H auf die Untergruppe $\{H, y\}$ in (G, A), die durch die Untergruppe H und das Element y erzeugt ist.

Satz 4.1. *Ist F eine Fortsetzung von H auf $\{H, y\}$ des ai-Funktionals f, dann ist* $s(y, A) \leqq F(y) \leqq r(y, A)$.

Beweis des Satzes unterscheidet sich unwesentlich von dem Beweise des Satzes 2.2. Es sei $v \in \{H, y\}$. Ist $R(v, A) = \emptyset$, so ist $r(v, A) = \infty$ und es gilt offenbar $F(v) \leqq \leqq r(v, A)$. Ist $R(v, A) \neq \emptyset$, $\varrho \in R(v, A)$, dann ist für ein $x \in H$ und ein natürliches n $x \geqq nv$, $\varrho \geqq (1/n) \cdot f(x) = (1/n) \cdot F(x) \geqq F(v)$; es ist also

$$r(v, A) \geqq F(v) . \tag{4.1}$$

Daher folgt $F(-v) = -F(v) \geqq -r(v, A) = s(-v, A)$, also

$$F(-v) \geqq s(-v, A) . \tag{4.2}$$

Setzt man in (4.1) $v = y$ und in (4.2) $v = -y$, so erhalten wir $s(y, A) \leqq F(y) \leqq \leqq r(y, A)$.

Satz 4.2. *Gilt* $s(y, A) \leqq \eta \leqq r(y, A)$ *für eine (endliche) reelle Zahl* η, *dann existiert eine Fortsetzung F von H auf $\{H, y\}$ des ai-Funktionals f mit* $F(y) = \eta$.

Beweis lässt sich analog zu dem zu Satz 2.1 führen.

Definition 4. Man sagt, dass ein Element $y \in G$ über $[H, f]$ eindeutig bewertet ist, wenn genau eine Fortsetzung von H auf $\{H, y\}$ des *ai*-Funktionals f existiert.

Satz 4.3. *Ein Element $y \in G$ ist dann und nur dann über $[H, f]$ eindeutig bewertet, wenn* $-\infty < s(y, A) = r(y, A) < \infty$ *gilt.*

Beweis der Notwendigkeit. Da eine Erweiterung F existiert und nach Satz 4.1 $s(y, A) \leqq F(y) \leqq r(y, A)$ ist, so ist $s(y, A) < \infty$, $-\infty < r(y, A)$. Ferner ist die Ungleichung $s(y, A) \neq r(y, A)$ mit Rücksicht auf Satz 4.2 ausgeschlossen.

Ist umgekehrt $-\infty < r(y, A) = s(y, A) < \infty$, dann liefert der Satz 4.2 die Existenz und der Satz 4.1 die Eindeutigkeit der Fortsetzung von H auf $\{H, f\}$ des *ai*-Funktionals f.

Satz 4.4. 1. *Die Menge N aller über $[H, f]$ eindeutig bewerteten Elemente ist eine H umfassende Untergruppe in G.*

2. *Die auf N durch die Vorschrift* $F(y) = s(y, A)$ *definierte Funktion F ist eine Fortsetzung von H auf N des ai-Funktionals f.*

3. *Ist F die (eindeutig bestimmte) Fortsetzung von H auf N des ai-Funktionals f und $y \in G$ ein über $[N, F]$ eindeutig bewertetes Element, so ist $y \in N$.*

Beweis. 1. Ist $y_k \in N$ $(k = 1, 2)$, so ist $-\infty < s(y_k, A) = r(y_k, A) < \infty$ und aus Hilfssatz 1.5 folgt dann

$$s(y_1, A) + s(\pm y_2, A) \leqq s(y_1 \pm y_2, A) \leqq r(y_1 \pm y_2, A) \leqq$$
$$\leqq r(y_1, A) + r(\pm y_2, A),$$
$$-\infty < s(y_1 \pm y_2, A) = r(y_1 \pm y_2, A) < \infty$$

und daher $y_1 \pm y_2 \in N$. Die Relation $N \supseteq H$ ist evident (Hilfssatz 1.5).

2. Die Additivität der Funktion $s(y, A)$ wurde in 1, Isotonie in Hilfssatz 1.7 bewiesen.

3. Ein Element $y \in G$ sei über $[N, F]$ eindeutig bewertet. Es seien mit $r'(y, A)$, $s'(y, A)$ die Grössen aus Definition 2 bezeichnet, die auf die Untergruppe N und auf das *ai*-Funktional F auf N bezogen werden. Nach Voraussetzung gilt dann $-\infty < s'(y, A) = r'(y, A) < \infty$. Es sei $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl.

Es existiert ein $x \in N$ und ein natürliches n, so dass

$$\text{(4.3a. b, c)} \quad x \geqq ny \quad r'(y, A) + \varepsilon > \frac{1}{n} F(x) = \frac{1}{n} r(x, A) \quad r(y, A) \leqq \frac{1}{n} F(x) < \infty$$

gilt. Es existiert ein $z \in H$ und ein natürliches m, so dass

$$\text{(4.4a, b, c)} \quad z \leqq my \quad s'(y, A) - \varepsilon < \frac{1}{m} F(z) = \frac{1}{m} s(z, A) \quad s(y, A) \geqq \frac{1}{m} F(z) > -\infty$$

gilt. Es existitiert ein $x_1 \in H$ und ein natürliches n_1, so dass

$$\text{(4.5a, b, c)} \quad x \geqq n_1 x \quad r(x, A) + \varepsilon > \frac{1}{n_1} f(x_1) \quad r(x, A) \leqq \frac{1}{n_1} f(x_1)$$

gilt. Es existiert ein $z_1 \in H$ und ein natürliches m_1, so dass

$$\text{(4.6a, b, c)} \quad z_1 \leqq m_1 z \quad s(z, A) - \varepsilon < \frac{1}{m_1} f(z_1) \quad s(z, A) \geqq \frac{1}{m_1} f(z_1)$$

gilt. Zufolge (4.5b), (4.3b) ist

$$f(x_1) < nn_1 r'(y, A) + n_1(n + 1)\,\varepsilon,$$

aus (4.6b), (4.4b) folgt

$$f(z_1) > mm_1 s'(y, A) - m_1(m + 1)\,\varepsilon.$$

Daraus ergibt sich

$$\text{(4.7)} \qquad mm_1 f(x_1) - nn_1 f(z_1) < m_1 n_1[m(n + 1) + n(m + 1)]\,\varepsilon.$$

Aus (4.3b, c) (4.5c) ergibt sich

$$r(y, A) \leqq \frac{1}{n} F(x) = \frac{1}{n} s(x, A) \leqq \frac{1}{nn_1} f(x_1),$$

aus (4.4b, c), (4.6c) erhalten wir

$$s(y, A) \geqq \frac{1}{m} F(z) = \frac{1}{m} s(z, A) \geqq \frac{1}{mm_1} f(z_1) .$$

Aus diesen Relationen und aus (4.7) folgt schliesslich

$$nn_1mm_1[r(y, A) - s(y, A)] \leqq mm_1 f(x_1) - nn_1 f(z_1) <$$
$$< m_1n_1[m(n + 1) + n(m + 1)] \varepsilon ;$$

$$0 \leqq r(y, A) - s(y, A) \leqq \frac{1}{mn} [m(n + 1) + n(m + 1)] \varepsilon =$$
$$= \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{m}\right)\right] \varepsilon \leqq 4\varepsilon .$$

Die Zahl $\varepsilon > 0$ wurde willkürlich ausgewählt, so dass $-\infty < s(y, A) = r(y, A) < \infty$ gilt. Aus Satz 4.3 folgt dann $y \in N$.

Literaturverzeichnis

[1] *W. Nef:* Über die Fortsetzung monotoner Linearformen. Math. Zeitschr. *66* (1956), 129—142.

[2] *F. Šik:* Über additive und isotone Funktionale auf geordneten Gruppen. Czechoslovak Math. Journal *12 (87)* (1962), 611—621.

ПРОДОЛЖЕНИЕ АДДИТИВНЫХ И ИЗОТОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

ФРАНТИШЕК ШИК (František Šik), Брно

Работа посвящена вопросу о строении множества всех продолжений аддитивного и изотонного функционала, определенного на подгруппе абелевой (частично) упорядоченной группы. Под аддитивным и изотонным функционалом (короче *ai-функционалом*) на упорядоченной группе (G, A) мы понимаем гомоморфное и изотонное отображение упорядоченной группы (G, A) в линейно упорядоченную аддитивную группу действительных чисел. Если f есть ai-функционал на подгруппе $(H, H \cap A)$, то ai-функционал F на (G, A) называется *продолжением* из H на (G, A) ai-функционала f, если частичная функция F_H на H тождественна с f.

В работе решаются следующие проблемы:

1. Возьмем элемент $y \in G$ и обозначим через Ψ множество всех продолжений из H на (G, A) ai-функционала f. Исследуется строение числового множества $\{F(y) \mid F \in \Psi\}$.

2. Условия однозначности продолжения ai-функционала f и нахождение этого (однозначного) продолжения.

Имеется несколько вариантов второй проблемы:

Речь идет или а) об условиях однозначности продолжения ai-функционала f из H на (G, A), или б) о нахождении подмножества M в G, на котором совпадают все продолжения ai-функционала f из H на (G, A), или, наконец, речь идет в) о нахождении множества N таких элементов $y \in G$, что совпадают каждые два продолжения ai-функционала f из H на подгруппу $\{H, y\}$, образованную подгруппой H и элементом y (т. наз. „элементы с однозначной расценкой над $[H, f]$").

Поскольку $\Psi \neq 0$, множество $\{F(y) \mid F \in \Psi\}$ является интервалом (соответственно одноточечным множеством) с концевыми точками $s(y)$, $r(y)$, где $s(y)$, $r(y)$ – введенные в определении 3 функции. (Теорема 2.2 и 2.4.) Множество M – подгруппа, содержащая подгруппу H. Однозначное продолжение ai-функционала f, вытекающее из вопросов а), б), является функцией $s(y)$. (Теорема 3.4 и 3.5.) Пусть, наконец, F есть ai-функционал на (G, A), а N – множество, описанное под в) относительно какой-либо подгруппы H в G и относительно ai-функционала F_H на $(H, H \cap A)$. Множество N является подгруппой, содержащей подгруппу H. Если обозначить $\overline{H} = N$, то определенная таким образом операция является операцией замыкания, т. е. имеет место $\overline{H} \supseteq H$; $\overline{\overline{H}} = \overline{H}$; $H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow \overline{H}_1 \subseteq \overline{H}_2$. (Теорема 4.4.) Подобно тому, как и при решении проблемы 1, мы находим, что числовое множество $\{F(y) \mid F \in \Psi'\}$, где Ψ' – множество всех продолжений из H на $\{H, y\}$ ai-функционала f, является интервалом с концами $s(y, A)$, $r(y, A)$, где функции $s(y, A)$, $r(y, A)$ были введены в определении 2. (Теорема 4.1 и 4.2.) Необходимое и достаточное условие существования указанного продолжения имеет вид: $-\infty < s(y, A) = r(y, A) < \infty$.