Czechoslovak Mathematical Journal

Bohumil Cenkl

La normale d’une surface dans l’espace à connexion projective

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 4, 582–606

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100542`

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962 Прага

LA NORMALE D'UNE SURFACE DANS L'ESPACE A CONNEXION PROJECTIVE

BOHUMIL CENKL, Praha

(Reçu le 28 novembre 1960)

En un point donné, on peut associer à la surface des droites invariantes — droites canoniques généralisées de l'espace projectif (directrice de Wilczynski, axe de Green). A côté de ces droites on trouve, dans le présent travail, les normales et des quadriques qui dépendent essentiellement du tenseur de courbure.

Dans l'espace à trois dimensions, on associe à chaque point d'une surface le faisceau canonique de droites projectivement invariantes. Il existe toute une série de définitions de ces droites canoniques, qui sont équivalentes dans l'espace projectif pour une certaine de ces droites. Une des plus cohérentes de ces définitions des droites canoniques est la suivante qui découle immédiatement des travaux [7] et [8]. Choisissons dans le plan τ tangent à la surface π au point A un autre point $B \neq A$. Si, et seulement si, $t = [AB]$ est une tangente de Darboux, alors il existe une homographie perspective $\boldsymbol{H}$ de centre B, et qui transforme la surface π en une surface π' ayant avec π au point A un contact du troisième ordre [8]. Les points X qui sont doubles à l'homographie $\boldsymbol{H}$ remplissent un plan β qui est le plan polaire du point B par rapport à la quadrique de Lie — l'homographie $\boldsymbol{H}$ est involutoire. Pour chaque position admissible du point B (sur la tangente de Darboux) nous avons quatre tangentes aux courbes de contact élévé des surfaces π et π'. Une de ces tangentes est toujours la tangente de Darboux $t = [AB]$, une autre la tangente de Segre t', conjugée à t. Les deux tangentes de contact élevé a, b, dépendent du choix du point B; on a toujours $(t, t', a, b) = -1$. Soient t_1, t_2 deux tangentes de Darboux différentes de t, désignons par t'_1, t'_2 les tangentes de Segre différentes de t'. Nous avons alors: Si a et b sont des tangentes asymptotiques, alors le point B se trouve forcément sur l'arrête de Green de seconde espèce; nous obtenons donc l'arrête de Green de première espèce comme la droite d'intersection des trois plans doubles de l'homographie $\boldsymbol{H}$ (trois homographies suivant le choix du point B sur la tangente de Darboux); avec la condition correspondante imposée aux droites a, b. D'une manière analogue, si a et b sont des tangentes conjuguées, nous obtenons la directrice de Wilczyński. Si l'on a $(t'_1, t'_2, a, b) = -1$, nous obtenons la normale de Fubini, et si $(t_1, t_2, a, b) = -1$, le point B doit être situé sur axe de Čech de seconde espèce.

Quelques unes des définitions des droites canoniques peuvent être généralisées au cas d'une surface dans un espace à connexion projective, d'autres ne peuvent pas être généralisées du tout, il y en a aussi qui demandent des calculs très difficiles du point de vue technique. Citons à titre d'exemple la généralisation de la directrice de Wilczynski [6] d'après une définition et d'après une autre citée dans ce travail. Il y a encore d'autres généralisations des droites canoniques (V. HLAVATÝ, J. KANITANI, G. LAPTEV) aux hypersurfaces dans l'espace n-dimensionnel à connexion projective. Dans le présent travail, je me suis borné à l'espace à trois dimensions à connexion projective, avec le but de montrer d'une part les différences qui existent entre les définitions des formes géométriques dans un espace „droit" et dans un espace à connexion, et, d'autre part, d'étudier les droites invariantes (normales) et les quadriques invariantes qui ne sont pas généralisations d'objects géométriques connus des espaces spéciaux (projectifs, etc.)

1. Nous allons étudier les propriétés locales d'une surface dans l'espace à trois dimensions à connexion projective. Par une telle surface nous entendrons une sous-variété P^3_{02} de la variété P^3_{03} de König au sens de [4]. La variété $P^3_{03}(P^3_{02})$ est définie de la façon suivante: Soit donné un domaine paramétrique à 3(2) dimensions. A chaque point (ξ) du domaine Ω soit associé un espace projectif $P_3(\xi)$ à trois dimensions et à chaque arc $\gamma \subset \Omega$ joignaut deux points $({}^1\xi)$, $({}^2\xi)$ du domaine Ω on associe une homographie $\boldsymbol{P}_\gamma : P_3({}^1\xi) \to P_3({}^2\xi)$. Les résultats du présent travail ne dépendent pas du fait que P^3_{02} est une sous-variété de la variété P^3_{03}. Nous pouvons donc parler d'une surface à connexion projective en entendant par cela une variété P^3_{02}. Lorsque nous parlons, dans la suite, d'une courbe sur la surface, il faut entendre par cela son développement dans l'espace local correspondant et d'une manière analogue nous nous exprimerons aussi au sujet des autres êtres géométriques associés à la surface au point considéré. Les propositions correspondantes peuvent toutefois être comprises au sens de [5]. En chaque point de l'espace local, choisissons un repère A_0, A_1, A_2, A_3 de telle façon que l'ensemble des homographies $\boldsymbol{P}_\gamma$ qui déterminent la connexion de la surface considérée π soit donné par le système des équations (nous choisissons un repère asymptotique [4]):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A_0 &= \omega_0^0 A_0 + \mathrm{d}u\, A_1 + \mathrm{d}v\, A_2\,, \\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \beta\,\mathrm{d}u\, A_2 + (1-h)\,\mathrm{d}v\, A_3\,, \\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_2^0 A_0 + \gamma\,\mathrm{d}v\, A_1 + \omega_2^2 A_2 + (1+h)\,\mathrm{d}u\, A_3\,, \\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_3^0 A_0 + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

où

$$\omega_k^i = a_k^i\,\mathrm{d}u + b_k^i\,\mathrm{d}v\,, \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)\,,$$
$$\omega_0^0 + \omega_1' + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0\,, \quad [\mathrm{d}u, \mathrm{d}v] \neq 0\,.$$

Les changements admissibles des paramètres et de la base sont

$$u = u(\bar{u})\,, \quad v = v(\bar{v})\,, \quad \left(r = u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}}, \quad s = v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right). \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad A_0 &= \alpha_0^0 \bar{A}_0\,,\\
A_1 &= \alpha_1^0 \bar{A}_0 + r^{-1}\alpha_0^0 \bar{A}_1\,,\\
A_2 &= \alpha_2^0 \bar{A}_0 + s^{-1}\alpha_0^0 \bar{A}_2\,,\\
A_3 &= \alpha_3^0 \bar{A}_0 + \alpha_3^1 \bar{A}_1 + \alpha_3^2 \bar{A}_2 + r^{-1}s^{-1}\alpha_0^0 \bar{A}_3\,,\\
(\alpha_0^0)^4 &= r^2 s^2\,,\\
\alpha_1^0 &= (1-h)\, v'\alpha_3^2\,,\\
\alpha_2^0 &= (1+h)\, u'\alpha_3^1\,.
\end{aligned}
$$

Ensuite, nous écrivons

$$
(4)\qquad a = a_0^0 - a_1^1 - a_2^2 + a_3^3\,,\quad b = b_0^0 - b_1^1 - b_2^2 + b_3^3\,.
$$

Sur la surface π soit donnée une courbe c tangente à l'asymptotique $u = \text{const}$ au point A_0. Aux points de la courbe c, considérons les tangentes aux asymptotiques $v = \text{const}$. Pour la surface réglée ainsi engendrée, on peut trouver une quadrique une des demi-quadriques de laquelle a avec la surface réglée un contact droit du second ordre. Si l'invariant de Smith-Mehmke du contact de la courbe c avec l'asymptotique $u = \text{const}$ est égal à $1 + \nu = (\beta + v'')/\beta$, nous obtenons l'équation de la quadrique en question (nous la désignons par $Q_u(\nu)$) sous la forme [6].

$$
(1+h)\,x^1x^2 - x^0x^3 + \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)x^1x^3 = \frac{1}{2(1+h)}\left(\overline{1+h}\,a_3^1 - a_2^0 + \nu\beta\gamma\right)(x^3)^2\,.
$$

Si nous remplaçons l'asymptotique $u = \text{const}$ par l'asymptotique $v = \text{const}$, nous obtenons l'équation de la quadrique $Q_v(\nu)$, définie d'une façon analogue,

$$
(1-h)\,x^1x^2 - x^0x^3 + \frac{1}{2}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)x^2x^3 = \frac{1}{2(1-h)}\left(\overline{1-h}\,b_3^2 - b_1^0 + \nu\beta\gamma\right)(x^3)^2.
$$

Par la quadrique de Darboux $Q(\nu, \lambda)$ nous entendons alors la quadrique $Q_v(\nu) + \lambda Q_u(\nu) = 0$ dont l'équation est

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad (1 + h + \lambda - h\lambda)\,x^1x^2 - (1+\lambda)\,x^0x^3 + \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)x^1x^3 &+ {}\\
+ \frac{1}{2}\lambda\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)x^2x^3 = \Big\{a_3^1 + \lambda b_3^2 - \frac{a_2^0}{1+h} &- {}\\
- \frac{\lambda b_1^0}{1-h} + \nu\beta\gamma\left(\frac{1}{1+h} + \frac{\lambda}{1-h}\right)\Big\}&(x^3)^2\,.
\end{aligned}
$$

Parmi les quadriques $Q(\nu, \lambda)$ il y en a une singulière, pour $\lambda = (h+1)/(h-1)$, elle se compose du plan $x^3 = 0$ et du plan

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad \frac{2h}{1-h}\,x^0 + \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)x^1 + \frac{1}{2}\,\frac{h+1}{h-1}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)x^2 &- {}\\
- \frac{1}{2}\Big\{a_3^1 + \frac{h+1}{h-1}\,b_3^2 - \frac{a_2^0}{h+1} + \frac{h+1}{(h-1)^2}\,b_1^0 &+ {}\\
+ \nu\beta\gamma\left(\frac{1}{1+h} - \frac{h+1}{(h-1)^2}\right)\Big\}\,x^3 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Nous écrivons, pour simplifier

$$(7) \qquad K = -\frac{1}{2}\left\{a_3^1 + \frac{h+1}{h-1}b_3^2 - \frac{a_2^0}{h+1} + \frac{h+1}{(h-1)^2}b_1^0 + \right.$$
$$\left. + \nu\beta\gamma\left(\frac{1}{1+h} - \frac{h+1}{(h-1)^2}\right)\right\}.$$

Nous dénoterons les equations $x^3 = 0$ et (6) par Π_1 et $\Pi_2(\nu)$ respectivement. Fixons pour l'instant la valeur de ν, choisie d'ailleurs arbitrairement, nous obtenons un système à deux paramètres de plans $\Pi_2(\nu) = \Pi_2(\nu; u, v)$. Nous allons étudier les caractéristiques du système à un paramètre de plans $\Pi_2(\nu)$ pour $v =$ const ou $u =$ $=$ const, respectivement. Il est facile de voir que l'on a

$$(8) \quad \mathrm{d}\Pi_2(\nu) = x^0\left\{\mathrm{d}\frac{2h}{1-h} - \frac{2h}{1-h}(a_0^0\,\mathrm{d}u + b_0^0\,\mathrm{d}v) - \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)\mathrm{d}u - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{h+1}{h-1}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)\mathrm{d}v\right\} + x^1\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right) - \frac{2h}{1-h}(a_1^0\,\mathrm{d}u + b_1^0\,\mathrm{d}v) - \right.$$
$$- \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)(a_1^1\,\mathrm{d}u + b_1^1\,\mathrm{d}v) - \frac{1}{2}\beta\frac{h+1}{h-1}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)\mathrm{d}u -$$
$$\left. - K(1-h)\,\mathrm{d}v\right\} + x^2\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\left[\frac{h+1}{h-1}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)\right] - \frac{2h}{1-h}(a_2^0\,\mathrm{d}u + b_2^0\,\mathrm{d}v) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)\gamma\,\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\frac{h+1}{h-1}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)(a_2^2\,\mathrm{d}u + b_2^2\,\mathrm{d}v) - K(1+h)\,\mathrm{d}u\right\} +$$
$$+ x^3\left\{\mathrm{d}K - \frac{2h}{1-h}(a_3^0\,\mathrm{d}u + b_3^0\,\mathrm{d}v) - \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)(a_3^1\,\mathrm{d}u + b_3^1\,\mathrm{d}v) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{h+1}{h-1}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)(a_3^2\,\mathrm{d}u + b_3^2\,\mathrm{d}v) - K(a_3^3\,\mathrm{d}u + b_3^3\,\mathrm{d}v)\right\}.$$

L'équation (8) peut être écrite sous une forme plus concise

$$(9) \qquad \mathrm{d}\Pi_2(\nu) = M(\nu)\,\mathrm{d}u + N(\nu)\,\mathrm{d}v\,.$$

Nous obtenons deux caractéristiques. D'une part la caractéristique du système $\mathrm{d}v = 0$, comme la droite d'intersection de deux plans aux équations

$$(10) \qquad M(\nu) = 0\,, \quad \Pi_2(\nu) = 0\,,$$

d'autre part la caractéristique du système $\mathrm{d}u = 0$, déterminée par les équations

$$(11) \qquad N(\nu) = 0\,, \quad \Pi_2(\nu) = 0\,.$$

Ces deux caractéristiques se coupent, dans le cas général, en un point donné comme le point d'intersection de trois plans

$$(12) \qquad \Pi_2(\nu) = 0\,, \quad M(\nu) = 0\,, \quad N(\nu) = 0\,.$$

Faisons maintenant varier v (u et v restant fixes); les points (12) décrivent alors une courbe $\tau(v)$. Il est facile de montrer que le point A_0 de la surface se trouve sur la tangente à cette courbe. Donc, $\tau(v)$ est une droite qui passe par A_0 et, en général, ne se trouve pas dans le plan tangent à la surface π en ce point A_0. Nous appellerons cette droite *première pseudonormale de la surface à connexion projective.* Spécialisons maintenant le repère de telle manière que le point A_3 se trouve sur la pseudonormale. Cela signifie que, v étant arbitraire mais fixe, nous choisissons A_3 dans les trois plans $\Pi_2(v) = 0$, $M(v) = 0$, $N(v) = 0$. Il faut donc que l'on ait

$$(13) \qquad -\frac{2h}{1-h}a_3^0 - \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)a_3^1 - \frac{1}{2}\frac{h+1}{h-1}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)a_3^2 = 0\,,$$

$$-\frac{2h}{1-h}b_3^0 - \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)b_3^1 - \frac{1}{2}\frac{h+1}{h-1}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)b_3^2 = 0\,,$$

$$a_3^1 + \frac{h+1}{h-1}b_3^2 - \frac{a_2^0}{h+1} + \frac{h+1}{(h-1)^2}b_1^0 + v\beta\gamma\left(\frac{1}{1+h} - \frac{h+1}{(h-1)^2}\right) = 0\,.$$

Parmi les quadriques de Darboux $Q(v, \lambda)$ il y a une appelée quadrique de Lie principale [6]: $Q(0, 1)$. Si nous exigeons que le point A_3 soit situé sur la quadrique $Q(0, 1)$, nous aurons nécessairement

$$(14) \qquad a_3^1 + b_3^2 - \frac{a_2^0}{1+h} - \frac{b_1^0}{1-h} = 0\,.$$

Mais alors v sera déterminé par l'équation (13_3). En tant que droite polaire à la première pseudonormale par rapport à la quadrique de Darboux singulière $Q(v, (h+1) : : (h-1))$, nous obtenons manifestement la droite d'intersection du plan $\Pi_2(v) = 0$ avec le plan $x^3 = 0$, donc la droite

$$(15) \quad x^3 = \frac{2h}{1-h}x^0 + \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)x^1 + \frac{1}{2}\frac{h+1}{h-1}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)x^2 = 0\,.$$

Nous appellerons cette droite *seconde normale de la surface à connexion projective.* Les droites polaires à la première pseudonormale par rapport aux quadriques $Q(v, \lambda)$ forment le faisceau

$$(16) \quad x^3 = -(1+\lambda)\,x^0 + \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)x^1 + \frac{1}{2}\lambda\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)x^2 = 0$$

dont (15) fait partie pour $\lambda = (h+1)/(h-1)$. Pour $\lambda = \infty$ (ou bien $\lambda = 0$) la droite (16) coupe l'asymptotique $[A_0A_1]$ (ou $[A_0A_2]$ respectivement) au point A_1 (ou A_2).

2. Considérons maintenant une surface π sans torsion, c'est-à-dire avec $h = 0$. Le plan $\Pi_2(v)$ ne dépend donc pas de v et passe par l'origine. Nous écrivons donc tout simplement Π_2 au lieu de $\Pi_2(v)$ et, d'une façon analogue, M, N. Au lieu de (8) nous obtenons ainsi les équations

$$\Pi_2 \equiv ax^1 - bx^2 - (a_3^1 - b_3^2 - a_2^0 + b_1^0)\, x^3 = 0\,, \tag{17}$$
$$K = -\tfrac{1}{2}(a_3^1 - b_3^2 - a_2^0 + b_1^0)\,,$$
$$2M \equiv -ax^0 + \{a_u - aa_1^1 + \beta b\}\, x^1 + \{-b_u + ba_2^2 + a_3^1 - b_3^2 - a_2^0 + b_1^0\}\, x^2 + \{(a_2^0 - b_1^0 - a_3^1 + b_3^2)_u - aa_3^1 + ba_3^2 + a_3^3(a_3^1 - b_3^2 - a_2^0 + b_1^0)\}\, x^3 = 0\,,$$
$$2N \equiv bx^0 + \{a_v - ab_1^1 + a_3^1 - b_3^2 - a_2^0 + b_1^0\}\, x^1 + \{-b_v - a\gamma + bb_2^2\}\, x^2 + \{(a_2^0 - b_1^0 - a_3^1 + b_3^2)_v - ab_3^1 + bb_3^2 + b_3^3(a_3^1 - b_3^2 - a_2^0 + b_1^0)\}\, x^3 = 0\,.$$

Les plans $\Pi_2 = M = N = 0$ ne forment pas, en général, un faisceau, ils se coupent en un point différent du point du plan tangent à la surface au point A_0. La droite p joignant le point d'intersection P des plans $\Pi_2 = M = N = 0$ avec le point A_0 sera appelée *première normale de la surface à connexion projective sans torsion*. La normale p est située dans le plan $\Pi_2 = 0$. Mais si nous considérons le système à un paramètre de plans $\Pi_2 = 0$ suivant la courbe c, donnée par l'équation

$$a\,\mathrm{d}u - b\,\mathrm{d}v = 0\,, \tag{18}$$

nous voyons que: La normale de la surface à connexion projective sans torsion est la caractéristique du système à un paramètre de plans $\Pi_2 = 0$ suivant la courbe c donnée par l'équation (18). Dans l'espace sans torsion, nous avons donc la forme linéaire invariante (ce qui est facile à vérifier par un calcul direct)

$$F_0 = a\,\mathrm{d}u - b\,\mathrm{d}v\,. \tag{19}$$

La signification géometrique de l'annulation de cette forme vient d'être spécifiée.

Nous pouvons maintenant choisir le repère de telle façon que le point A_3 soit identique au point P. Pour cela, il faut et il suffit que l'on iat:

$$a_3^1 - a_2^0 - b_3^2 + b_1^0 = 0\,, \quad aa_3^1 - ba_3^2 = 0\,, \quad ab_3^1 - bb_3^2 = 0\,. \tag{20}$$

Nous avons donc un nouveau repère canonique (le repère canonique est déterminé également dans [3]) sur la surface à connexion projective sans torsion: le point A_3 est identique au point P. Les droites polaires à la normale par rapport aux quadriques $Q(v, \lambda)$ sont données par les équations

$$x^3 = (1 + \lambda)\, x^0 - \tfrac{1}{2}ax^1 - \tfrac{1}{2}\lambda bx^2 = 0\,. \tag{21}$$

Pour $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, nous obtenons de nouveau les points A_2, A_1, comme points d'intersection de la droite (21) avec les asymptotiques correspondantes. Pour le choix de la seconde normale nous avons maintenant une très grande liberté. Pour fixer les idées, nous appellerons *seconde normale de la surface à connexion projective sans torsion* la droite polaire à la première normale par rapport à la quadrique de Lie principale $Q(0, 1)$, donc la droite donnée par les équations

$$x^3 = 4x^0 - ax^1 - bx^2 = 0\,. \tag{22}$$

Voici les changements des paramètres et des bases locales, admissibles lors du choix du repère canonique:

$$(23)\qquad A_0 = \alpha_0^0 \bar{A}_0\,,\quad A_1 = r^{-1}\alpha_0^0 \bar{A}_1\,,\quad A_2 = s^{-1}\alpha_0^0 \bar{A}_2\,,\quad A_3 = r^{-1}s^{-1}\alpha_0^0 \bar{A}_3\,,$$
$$u = u(\bar{u})\,,\quad v = v(\bar{v})\,,\quad (\alpha_0^0)^4 = r^2 s^2\,.$$

Si nous passons des paramètres asymptotique u, v aux paramètres nouveaux $\bar{u}$, $\bar{v}$, vérifiant les relations

$$(2')\qquad \mathrm{d}\bar{u} = a\,\mathrm{d}u\,,\quad \mathrm{d}\bar{v} = b\,\mathrm{d}v\,,$$

nous obtenons avec les conditions (20) *le repère canonique principal* sur la surface π. Les changements admissibles des bases sont maintenant

$$(23')\quad \bar{A}_0 = \sqrt{(ab)}\,A_0\,,\quad \bar{A}_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}A_1\,,\quad \bar{A}_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}A_2\,,\quad \bar{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{(ab)}}A_3\,.$$

Les paramètres $\bar{u}$, $\bar{v}$, introduits par l'équation (2'), seront appelés arcs asymptotiques.

3. Dès à présent, nous n'exigerons plus que l'on ait $h = 0$. Sur la surface π, soit donné un repère dual

$$E^0 = [A_1A_2A_3]\,,\quad E^1 = -[A_0A_2A_3]\,,\quad E^2 = [A_0A_1A_3]\,,\quad E^3 = -[A_0A_1A_2]$$

et le repère correspondant

$$(24)\qquad F^3 = E^3\,,\quad F^2 = -(1+h)\,E^2\,,\quad F^1 = -(1-h)\,E^1\,,\quad F^0 = E^0\,.$$

La connexion sur la surface π^*, duale à la surface π, est alors donnée par les équations

$$(25)\qquad \mathrm{d}F^3 = -(a_3^3\,\mathrm{d}u + b_3^3\,\mathrm{d}v)\,F^3 + \mathrm{d}u\,F^2 + \mathrm{d}v\,F^1\,,$$
$$\mathrm{d}F^2 = (1+h)(a_3^2\,\mathrm{d}u + b_3^2\,\mathrm{d}v)\,F^3 + \left\{\left(\frac{h_u}{1+h} - a_2^2\right)\mathrm{d}u + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{h_v}{1+h} - b_2^2\right)\mathrm{d}v\right\}F^2 - \frac{1+h}{1-h}\beta\,\mathrm{d}u\,F^1 + (1+h)\,\mathrm{d}v\,F^0\,,$$
$$\mathrm{d}F^1 = (1-h)(a_3^1\,\mathrm{d}u + b_3^1\,\mathrm{d}v)\,F^3 - \frac{1-h}{1+h}\gamma\,\mathrm{d}v\,F^2 - \left\{\left(\frac{h_u}{1-h} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + a_1^1\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{h_v}{1-h} + b_1^1\right)\mathrm{d}v\right\}F^1 + (1-h)\,\mathrm{d}u\,F^0\,,$$
$$\mathrm{d}F^0 = -(a_3^0\,\mathrm{d}u + b_3^0\,\mathrm{d}v)\,F^3 + \frac{1}{1+h}(a_2^0\,\mathrm{d}u + b_2^0\,\mathrm{d}v)\,F^2 +$$
$$+ \frac{1}{1-h}(a_1^0\,\mathrm{d}u + b_1^0\,\mathrm{d}v)\,F^1 - (a_0^0\,\mathrm{d}u + b_0^0\,\mathrm{d}v)\,F^0\,.$$

A la dualisation, nous avons donc une substitution des expressions particulières. A la quadrique $Q(v, \lambda)$ correspond dans l'espace dual la quadrique duale $Q^*(\bar{v}, \lambda)$

dont l'équation en coordonnées ponctuelles est

$$(26)\quad (1 + \lambda)\, x^1x^2 - \frac{1 - h + \lambda + h\lambda}{1 - h^2}\, x^0x^3 + \frac{1}{2(1 + h)}\left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right) x^1x^3 + \\ + \frac{\lambda}{2(1 - h)}\left(b - \frac{h_v}{1 - h}\right) x^2x^3 = \frac{1}{2(1 + \lambda)}\left(a_{00}a_{12} - 2a_{01}a_{02}\right)(x^3)^2 ,$$

$$a_{00} = a_3^1 + \lambda b_3^2 - \frac{a_2^0}{1 + h} - \frac{\lambda b_1^0}{1 - h} - \bar{v}\beta\gamma\left(\frac{1}{1 - h} + \frac{\lambda}{1 + h}\right),$$

$$a_{01} = \frac{\lambda}{2(1 - h)}\left(b - \frac{h_v}{1 - h}\right), \quad a_{02} = \frac{1}{2(1 + h)}\left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right),$$

$$a_{12} = \frac{1 - h + \lambda + h\lambda}{1 - h^2} .$$

Parmi les quadriques $Q^*(\bar{v}, \lambda)$, il y en a une singulière, pour $\lambda = (h - 1)/(h + 1)$. La quadrique $Q^*(\bar{v}, (h - 1)/(h + 1))$ est composée de deux plans

$$(27)\quad 4hx^1 - \left(b - \frac{h_v}{1 - h}\right) x^3 = 0 , \quad 4hx^2 + \left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right) x^3 = 0 .$$

Si nous avons $h \neq 0$, c'est-à-dire si nous excluons les surfaces à connexion projective sans torsion (nous dirons que nous admettons les surfaces à connexion projective avec torsion, si $h \neq 0$), les équations (27) déterminent une droite, que nous appellerons *première normale de la surface à connexion projective* (avec torsion). Il est aisé de faire voir que la première normale et la première pseudonormale sont deux droites différentes. En effet, si le repère est choisi de telle façon que le point A_3 soit situé sur la pseudonormale, l'équation (13) est vérifié; si le point A_3 se trouve sur la quadrique de Lie principale, alors (13) et (14) sont vérifiées. Pour que les deux droites, la normale et la pseudonormale, coïncident, il faudrait que les équations

$$(28)\quad a + \frac{h_u}{1 + h} = 0 , \quad b - \frac{h_v}{1 - h} = 0$$

découlent des équations (13), ou bien (13) et (14), ce qui n'est pas vrai en général. La normale et la pseudonormale déterminent donc un plan que nous appellerons *plan canonique*. La quadrique $Q^*(v, (h - 1)/(h + 1))$ est évidemment duale de la quadrique $Q(v, (h + 1)/(h - 1))$. Le point $\Pi^*(v) = 0$, dual du plan $\Pi_2(v) = 0$, sera désigné par $K(\bar{v})$; il se trouve sur la première normale et ses coordonnées sont

(29)

$$\bar{x}^0 = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1 + h}\, a_2^0 - \frac{1}{1 + h}\, b_1^0 - a_3^1 + \frac{1 - h}{1 + h}\, b_3^2 + \bar{v}\beta\gamma\left(\frac{1}{1 - h} - \frac{1 - h}{(1 + h)^2}\right)\right\},$$

$$\bar{x}^1 = -\frac{1}{2(1 + h)}\left(b - \frac{h_v}{1 - h}\right), \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{2(1 + h)}\left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right), \quad \bar{x}^3 = -\frac{2h}{1 + h} .$$

Si nous choisissons maintenant le point A_3 sur la première normale identique à $K(\bar{v})$, nous devons avoir (28) et

$$\bar{x}^0 = 0\,. \tag{30}$$

Pour que le point $K(\bar{v})$ soit un point de la quadrique de Lie principale, il faut que la condition (14) soit vérifiée; mais alors $\bar{v}$ est déterminé par l'équation (30). Le repère que nous obtenons ainsi sera appelé *repère semicanonique* de la surface à connexion projective avec torsion, tant que (14) n'est pas vérifié. Et si $A_3 \equiv K(\bar{v})$ sur la quadrique de Lie principale, le repère en question sera dit *repère canonique*. Maintenant nous emploierons le repère semicanonique. Pour le point d'intersection des trois plans $\Pi_2(v) = 0$, $M(v) = 0$, $N(v) = 0$, nous obtenons, comme forme duale, un plan; la droite d'intersection de ce plan avec le plan tangent à la surface sera appelée *seconde pseudonormale de la surface à connexion projective*. Son équation est

$$x^3 = (a_3^1 b_3^2 - a_3^2 b_3^1)\, x^0 - (a_3^0 b_3^2 - a_3^2 b_3^0)\, x^1 + (a_3^1 b_3^0 - a_3^0 b_3^1)\, x^2 = 0\,. \tag{31}$$

La seconde normale, rapportée au repère canonique, a l'équation

$$x^0 = x^3 = 0\,. \tag{32}$$

Choisissons maintenant v de telle façon que le plan $\Pi_2(v) = 0$ passe par le point $K(\bar{v})$, c'est-à-dire que l'on ait (13_3). Le point donné par les équations

$$x^0 = 0,\ a_1^0 x^1 + a_2^0 x^2 + a_3^0 x^3 = 0,\ b_1^0 x^1 + b_2^0 x^2 + b_3^0 x^3 = 0 \tag{33}$$

est un point de la première pseudonormale de la surface. L'équation du plan canonique est alors

$$(a_1^0 b_3^0 - b_1^0 a_3^0)\, x^1 + (a_2^0 b_3^0 - a_3^0 b_2^0)\, x^2 = 0\,. \tag{34}$$

Il existe évidemment tout un faisceau de droites situées dans le plan (34) et passant par le point A_0; on les appelle droites canoniques. Toutes ces droites sont associées d'une manière invariante à la surface au point considéré. Il leur correspond un faisceau de droites dans le plan tangent à la surface au point A_3, son sommet est le point

$$W = \{0,\ a_3^0 b_3^1 - a_3^1 b_3^0,\ a_3^2 b_3^0 - a_3^0 b_3^2,\ 0\} \tag{35}$$

qui, en général, n'est pas un point du plan canonique. Nous avons maintenant deux formes invariantes

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \mathrm{d}u^2\, \mathrm{d}v^2 \{(a_1^0 b_3^0 - b_1^0 a_3^0)\, \mathrm{d}u + (a_2^0 b_3^0 - a_3^0 b_2^0)\, \mathrm{d}v\}\,, \\ \Phi_2 &= \mathrm{d}u^2\, \mathrm{d}v^2 \{(a_3^2 b_3^0 - a_3^0 b_3^2)\, \mathrm{d}u - (a_3^1 b_3^0 - a_3^0 b_3^1)\, \mathrm{d}v\}\,, \end{aligned} \tag{36}$$

dont l'annulation donne d'une part les équations des asymptotiques, chacune comptée deux fois, et d'autre part, une couche de courbes. Les tangentes aux courbes de ces couches, passant par le point A_0 de la surface, sont: pour $\Phi_1 = 0$ une droite située dans le plan canonique, pour $\Phi_2 = 0$ une droite passant par le point W. A présent, nous allons trouver les droites du faisceau harmonique, pour lesquelles les surfaces développables de la congruence engendrée par l'une d'entre elles découpent sur la surface π un réseau semiconjugué.[1]) Une droite de la congruence c'est une droite joignant le point A_0 au point $\lambda AA_1 + \lambda BA_2 + A_3$ (où λ est le paramètre du faisceau canonique) et

$$(37) \qquad A = \frac{a_2^0 b_3^0 - a_3^0 b_2^0}{a_1^0 b_2^0 - a_2^0 b_1^0}\,, \quad B = \frac{a_3^0 b_1^0 - a_1^0 b_3^0}{a_1^0 b_2^0 - a_2^0 b_1^2}\,.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\{A_0 + t(\lambda AA_1 + \lambda BA_2 + A_3)\} = (\omega_0^0 + t\lambda A\omega_1^0 + t\lambda B\omega_2^0)\, A_0 + \\ + (\mathrm{d}t + K)(\lambda AA_1 + \lambda BA_2 + A_3) + (\mathrm{d}u + t\lambda\, \mathrm{d}A + t\lambda A\omega_1^1 + \\ + t\lambda B\gamma\, \mathrm{d}v - K\lambda A + t\omega_3^1)\, A_1 + (\mathrm{d}v + t\lambda\, \mathrm{d}B + t\lambda A\beta\, \mathrm{d}u + \\ + t\lambda B\omega_2^2 - K\lambda B + t\omega_3^2)\, A_2 + \{(1 - h)\, \mathrm{d}v\, t\lambda A + \\ + (t + h)\, t\lambda B\, \mathrm{d}u - t\omega_3^3 - K\}\, A_3\,. \end{aligned}$$

L'équation des courbes découpées sur la surface π par les surfaces développables de la congruence est

$$(38) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}u\{\lambda\, \mathrm{d}B + \lambda A\beta\, \mathrm{d}u + \lambda B\omega_2^2 + \omega_3^2 - (1 - h)\, \mathrm{d}v\, \lambda^2 AB - \\ - (1 + h)\, \lambda^2 B^2\, \mathrm{d}u - \omega_3^3 \lambda B\} - \mathrm{d}v\{\lambda\, \mathrm{d}A + \lambda\omega_1^1 A + \lambda B\gamma\, \mathrm{d}v + \\ + \omega_3^1 - \lambda^2 A^2(1 - h)\, \mathrm{d}v - \lambda^2 AB(1 + h)\, \mathrm{d}u - \omega_3^3 \lambda A\} = 0\,. \end{aligned}$$

Ecrivons pour l'instant cette équations sous la forme $a\, \mathrm{d}u^2 + b\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + c\, \mathrm{d}v^2 = 0$. Les deux couches de courbes déterminées par cette équation sont $k\, \mathrm{d}u + l\, \mathrm{d}v = 0$, $m\, \mathrm{d}u + n\, \mathrm{d}v = 0$, où $km = a$, $kn + lm = b$, $ln = c$. Pour que ces deux couches forment un réseau semiconjugué, il faut que l'on ait $(1 - h)\, ml + (1 + h)\, kn = 0$. Après une modification facile, nous obtenons cette condition scus la forme

$$(39) \qquad b^2(1 - h)(1 + h) + 4h^2 ac = 0\,.$$

Si nous substituons de (38), nous trouvons que (39) est une équation du troisième degré en λ, son terme absolu étant différent de zéro. Il existe donc dans le faisceau canonique trois droites qui forment une congruence semiconjuguée à la surface π. Le coefficient de λ^3 est

$$(40) \qquad \begin{aligned} 4h^2\{(1 + h)\, B^2(A_v + Ab_1^1 + B\gamma - b_3^3 A) + (1 - h)\, A^2(B_u + A\beta + \\ + Ba_2^2 - Ba_3^3)\} + (1 - h)(1 + h)\, 4hAB(B_v + Bb_2^2 - \\ - Bb_3^3 - A_u - Aa_1^1 - Aa_3^3)\,, \end{aligned}$$

ce qui est, en général, différent de zéro.

4. Ayons ensuite, sur la surface π, un repère tel, que les équations différentielles de son mouvement soient (1), mais supposons que $h = 0$, c'est-à-dire que nous ayons une surface π sans torsion. Nous appelons courbes géodésiques de l'espace à connexion projective les courbes dont le développement dans l'espace local au point consi-

[1]) Par „réseau semiconjugué" nous entendrons un tel réseau, que les tangentes aux courbes d'une couche suivant une courbe de l'autre couche sont des droites génératrices de la surface développable, mais non simultanément si l'on échange les deux couches.

déré est une droite [1]. Appelons pseudogéodésiques les courbes $v = \varphi(u)$ sur la surface π à connexion projective sans torsion, pour lesquelles l'intégrale $\int \Phi(u, \varphi(u))\,\mathrm{d}u$ prend sa valeur extrême, si nous prenons pour $\Phi(u, v)$ la forme invariante de la surface π. Soit d'abord $\Phi = a\,\mathrm{d}u \pm b\,\mathrm{d}v$. On voit que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $v = \varphi(u)$ soit une courbe pseudogéodésique est que l'on ait

(41) $$a_v \mp b_u = 0\,.$$

Or, si (41) a lieu, alors toute courbe de la surface π passant par le point A_0 est une courbe pseudogéodésique.

En tant qu'extrémales de l'integrale

(42) $$\int (2ab\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v)^{\frac{1}{2}} = \int (2abv')^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u$$

nous obtenons les courbes pseudogéodésiques que nous désignerons par g_1. L'équation différentielle des courbes g_1 (équation d'Euler-Lagrange), c'est, évidemment l'équation

(43) $$abv'' = (ab)_u v' - (ab)_v v'^2\,.$$

Le plan osculateur de la courbe $v = \varphi(u)$ au point A_0 (si nous écrivons $v' = m = \mathrm{d}v/\mathrm{d}u$, $v'' = n = \mathrm{d}^2v/\mathrm{d}u^2$)

$$[A_0, A_1 + mA_2, (\beta + m\overline{a_2^2 - a_1^1} + m^2\overline{b_2^2 - b_1^1} - m^3\gamma + n)\,A_2 + 2mA_3]$$

a, en coordonnées locales, l'équation

(44) $$\{\beta + m(a_2^2 - a_1^1) + m^2(b_2^2 - b_1^1) - m^3\gamma + n\}\,x^3 + 2m^2x^1 - 2mx^2 = 0\,.$$

Par chaque point de l'espace local passent trois plans qui sont plans osculateurs des courbes g_1. Nous obtenons l'équation d'un tel plan osculateur sous la forme

(45) $$m^3\gamma x^3 + m^2\left\{\left(\frac{\partial \log ab}{\partial v} + b_1^1 - b_2^2\right)x^3 - 2x^1\right\} - \\ - m\left\{\left(\frac{\partial \log ab}{\partial u} + a_2^2 - a_1^1\right)x^3 - 2x^2\right\} - \beta x^3 = 0\,.$$

Les plans (45) (m étant un paramètre) enveloppent un cône du troisième degré. Parmi les plans (45) tangents au cône en question, il y a trois plans stationnaires. Différentions deux fois de suite l'équation (45) par rapport à m. Nous obtenons

(46) $$3\gamma m^2x^3 - 2m\left\{\left(b_2^2 - b_1^1 - \frac{\partial \log ab}{\partial v}\right)x^3 + 2x^1\right\} + \\ + \left\{\left(a_1^1 - a_2^2 - \frac{\partial \log ab}{\partial u}\right)x^3 + 2x^2\right\} = 0\,.$$

$$6\gamma mx^3 - 2\left\{\left(b_2^2 - b_1^1 - \frac{\partial \log ab}{\partial v}\right)x^3 + 2x^1\right\} = 0\,.$$

Si nous éliminons x^1, x^2, x^3 des équations (45), (46), nous obtenons

(47) $$\beta = m^3\gamma\,,$$

ce qui signifie que les pseudogéodésiques dont les plans osculateurs jouissent des propriétés demandées ont au point A_0 des tangentes identiques aux tangentes de Segre en ce point. Les trois plans stationnaires (45), dont le parametre doit vérifier la condition (47) ont une droite commune; nous obtenons son équation en substituant de (47) dans (45) sous la forme

$$(48)\quad x^1 = \frac{1}{2}\left(b^1_1 - b^2_2 + \frac{\partial \log ab}{\partial v}\right)x^3, \quad x^2 = \frac{1}{2}\left(a^2_2 - a^1_1 + \frac{\partial \log ab}{\partial u}\right)x^3 .$$

Nous avons ainsi les équations d'une droite que nous appellerons *normale* $n(0)$ *de la surface* π *à connexion projective sans torsion.*

Nous appellerons pseudogéodésiques g_2 de la surface π les extrémales de l'intégrale

$$(49)\qquad \int (k_1a^2\,\mathrm{d}u^2 - k_2b^2\,\mathrm{d}v^2)^{\frac{1}{2}} = \int (k_1a^2 - k_2b^2v'^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u$$

où k_1, k_2 sont deux constantes différentes de zéro. (La signification de l'intégrale (49) dans le cas où $k_1 = 0 \neq k_2$, ou $k_1 \neq 0 = k_2$ a été déjà donnée.) L'équation différentielle des courbes pseudogéodésiques g_2 est

$$(50)\qquad k_1k_2a^2b^2v'' = -k_1^2a^3a_v + k_1k_2ab(ba_u - 2ab_u)\,v' + \\ + k_1k_2ab(2ba_v - ab_v)\,v'^2 + k_2^2b^3b_uv'^3 .$$

L'équation du plan osculateur de la courbe g_2 est

$$(51)\qquad \Big\{\beta + m(a^2_2 - a^1_1) + m^2(b^2_2 - b^1_1) - m^3\gamma + \frac{1}{k_1k_2a^2b^2}\,(-k_1^2a^3a_v + \\ + k_1k_2ab\,\overline{ba_u - 2ab_u}\,m + k_1k_2abm^2\,\overline{2ba_v - ab_v} + k_2^2b^3b_um^3)\Big\}\,x^3 + \\ + 2m^2x^1 - 2mx^2 = 0 .$$

Parmi les plans (51) qui enveloppent, tout comme dans le cas précédent, un cône du troisième ordre, il existe trois plans stationnaires, situés dans un seul faisceau. Le paramètre de ces trois plans osculateurs stationnaires s'obtient par élimination de x^1, x^2, x^3 de l'équation (51) et de deux autres que l'on obtient en différentiant (51) par rapport au paramètre m. Il faut donc que la condition suivante soit satisfaite

$$(52)\qquad (\beta - m^3\gamma)\,k_1k_2a^2b^2 - k_1^2a^3a_v + k_2^2b^3b_um^3 = 0 ,$$

si (51) doit être l'équation des plans osculateurs stationnaires. La droite d'intersection de ces trois plans, c'est la droite

$$(53)\qquad x^1 = \frac{1}{2}\left\{b^1_1 - b^2_2 + \frac{\partial \log ab}{\partial v} - 3\,\frac{\partial \log a}{\partial v}\right\}x^3 , \\ x^2 = \frac{1}{2}\left\{a^2_2 - a^1_1 + \frac{\partial \log ab}{\partial u} - 3\,\frac{\partial \log b}{\partial u}\right\}x^3 ,$$

que nous appellerons *normale* $n(+3)$ *de la surface* π *à connexion projective sans torsion*. On peut voir que la normale $n(+3)$ ne dépend pas des constantes k_1, k_2.

En tant qu'extrémales de l'intégrale

$$(54) \qquad \int \frac{ab \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}{k_1 a \, \mathrm{d}u + k_2 b \, \mathrm{d}v} = \int \frac{abv'}{k_1 a + k_2 bv'} \, \mathrm{d}u \,,$$

on obtient les pseudogéodésiques g_3 de la surface π. L'équation d'Euler-Lagrange est donc

$$(55) \qquad \begin{aligned} 2k_1k_2a^2b^2v'' = k_1^2a^3b_u + v'\{2ba_u - ab_u\}\, abk_1k_2 + \\ + v'^2\{ba_v - 2ab_v\}\, abk_1k_2 - k_2^2b^3a_vv'^3 \,. \end{aligned}$$

On peut voir de nouveau que par tout point de l'espace local passent trois plans osculateurs des courbes pseudogéodésiques g_3

$$(56) \qquad \begin{aligned} \Big[\beta + m(a_2^2 - a_1^1) + m^2(b_2^2 - b_1^1) - m^3\gamma + \frac{1}{2k_1k_2a^2b^2}\{k_1^2a^3b_u + \\ + v'(2ba_u - ab_u)\, abk_1k_2 + v'^2(ba_v - 2ab_v)\, abk_1k_2 - \\ - k_2^2b^3a_vv'^3\}\Big]\, x^3 + 2m^2x^1 - 2mx^2 = 0 \,, \end{aligned}$$

enveloppant un cône du troisième ordre. D'une façon tout à fait analogue aux deux cas précédents nous obtenons trois plans stationnaires (56), le paramètre m étant donné par l'équation

$$2(\beta - m^3\gamma)\, k_1k_2a^2b^2 + k_1^2a^3b_u - k_2^2b^3a_vm^3 = 0 \,.$$

L'axe du faisceau engendré par les trois plans stationnaires est la droite

$$(57) \qquad \begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{2}\left\{b_1^1 - b_2^2 + \frac{\partial \log ab}{\partial v} - \frac{3}{2}\frac{\partial \log a}{\partial v}\right\} x^3 \,, \\ x^2 &= \frac{1}{2}\left\{a_2^2 - a_1^1 + \frac{\partial \log ab}{\partial u} - \frac{3}{2}\frac{\partial \log b}{\partial u}\right\} x^3 \,, \end{aligned}$$

que nous appellerons *normale* $n(+\frac{3}{2})$ *de la surface* π *à connexion projective sans torsion*. Nous voyons immédiatement que *les normales* $n(0)$, $n(3)$, $n(\frac{3}{2})$ *se trouvent dans un même plan*. Nous obtenons donc ainsi, en général, tout un faisceau de normales invariantes $n(\lambda)$ de la surface π à connexion projective sans torsion. L'équation de la normale $n(\lambda)$ est

$$(58) \qquad \begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{2}\left\{b_1^1 - b_2^2 + \frac{\partial \log ab}{\partial v} - \lambda\frac{\partial \log a}{\partial v}\right\} x^3 \,, \\ x^2 &= \frac{1}{2}\left\{a_2^2 - a_1^1 + \frac{\partial \log ab}{\partial u} - \lambda\frac{\partial \log b}{\partial u}\right\} x^3 \,. \end{aligned}$$

Choisissons maintenant le repère sur la surface d'une telle façon que A_3 soit un point de la normale $n(\lambda)$. Il faut donc que la condition

$$(59) \quad b_1^1 - b_2^2 + \frac{\partial \log ab}{\partial v} - \lambda\frac{\partial \log a}{\partial v} = a_2^2 - a_1^1 + \frac{\partial \log ab}{\partial u} - \lambda\frac{\partial \log b}{\partial u} = 0$$

soit vérifiée. Considérons maintenant la congruence des normales $n(\lambda)$ de la surface π. L'équation des surface développables de cette congruence est $a_3^2\,du^2 + (b_3^2 - a_3^1)\,du\,dv - b_3^1\,dv^2 = 0$. Pour que ces surfaces développables découpent sur la surface π un réseau conjugué, il faut que $a_3^1 - b_3^2 = 0$ soit une conséquence des équations (59), ce qui n'a pas lieu en général. Il n'existe donc dans le faisceau des normales $n(\lambda)$ aucune droite telle que la congruence de ces droites découpe sur la surface π un réseau conjugué. Choisissons maintenant A_3 sur la normale de la surface à connexion projective sans torsion; on aura donc (20). La normale en question (c'est la droite $[A_0, A_3]$) et les normales $n(\lambda)$ déterminent alors un système à deux paramètres de droites

$$(60)\qquad x^1 = \frac{\xi}{2}\left(b_1^1 - b_2^2 + \frac{\partial \log ab}{\partial v} - \eta\,\frac{\partial \log a}{\partial v}\right)x^3\,,$$

$$x^2 = \frac{\xi}{2}\left(a_2^2 - a_1^1 + \frac{\partial \log ab}{\partial u} - \eta\,\frac{\partial \log b}{\partial u}\right)x^3\,.$$

Pour toute paire de nombres réels ξ, η nous obtenons une droite que nous appellerons *normale $n(\xi, \eta)$ de la surface π à connexion projective sans torsion.* On peut voir que parmi les normales $n(\xi, \eta)$ il n'y a aucune droite telle que la congruence engendrée par ces droites découpe par ses surfaces développables sur la surface π un réseau conjugué. Rapportée au repère que nous avons ainsi choisi, la quadrique $Q(v, \lambda)$ a maintenant l'équation

$$(61)\qquad (1 + \lambda)(x^1x^2 - x^0x^3) + \tfrac{1}{2}ax^1x^3 + \tfrac{1}{2}\lambda bx^2x^3 = \frac{1 + \lambda}{2}(b_3^2 - b_1^0 + v\beta\gamma)(x^3)^2\,.$$

L'équation de la droite polaire à la normale $n(\xi, \eta)$ par rapport à la quadrique de Darboux (61) est

$$(62)\qquad x^3 = -(1 + \lambda)x^0 + \left\{\frac{\xi}{2}(1 + \lambda)\left(a_2^2 - a_1^1 + \frac{\partial \log ab}{\partial u} - \eta\,\frac{\partial \log b}{\partial u}\right) + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2}a\right\}x^1 + \left\{\frac{\xi}{2}(1 + \lambda)\left(b_1^1 - b_2^2 + \frac{\partial \log ab}{\partial v} - \eta\,\frac{\partial \log a}{\partial v}\right) + \tfrac{1}{2}\lambda b\right\}x^2 = 0\,.$$

La droite polaire à la normale $n(\xi, \eta)$ par rapport à la quadrique de Darboux singulière $(\lambda = -1)$ sera évidemment la droite d'intersection des deux plans dont se compose cette quadrique singulière. Ecrivons pour l'instant, pour abréger, au lieu des équations (60) le équations $x^1 = Ax^3 = (U + \eta V)\,x^3$; $x^2 = Bx^3 = (M + \eta N)\,x^3$. Nous obtenons ainsi deux sommets de deux faisceaux des secondes normales $n(\xi, \eta)$, polaires par rapport à la quadrique $Q(v, \lambda)$ aux normales $n(\xi, \eta)$. Pour ξ variable nous obtenons le point $R(\lambda, \eta) = [1/(1 + \lambda)(\tfrac{1}{2}\lambda b - \tfrac{1}{2}a(A/B)),\ -A/B, 1, 0]$. Si nous faisons varier le paramètre η, les secondes normales $n(\xi, \eta)$ forment un faisceau de sommet

$$L(\lambda, \xi) = \left[-\frac{V}{N(1 + \lambda)}\{(1 + \lambda)M + \tfrac{1}{2}a\} + U + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{1 + \lambda}b\,,\ -\frac{V}{N},\ 1, 0\right].$$

Pour les quadriques $Q(v, \lambda)$ différentes, λ étant variable, le point

$$K(\xi, \eta) = \left[A + B\frac{b}{a} + \frac{1}{2}b, \frac{b}{a}, 1, 0\right]$$

est le sommet du faisceau des secondes normales $n(\xi, \eta)$.

5. Nous allons étudier maintenant les courbes sur la surface π qui ont dans le point correspondant de la surface un contact du troisième ordre avec la quadrique osculatrice de la surface π en ce point. L'équation de la quadrique au point A_0 de la surface π est

(63) $$x^0x^3 - x^1x^2 - c_{13}x^1x^3 - c_{23}x^2x^3 = \tfrac{1}{2}c_{33}(x^3)^2 .$$

Lorsque $h = 0$, alors les courbes de contact élevé au point A_0 touchent les tangentes aux courbes de Darboux passant par ce point [3]. Or, si $h \neq 0$ sur la surface π, alors il existe sur la surface π des courbes passant par le point A_0, ayant une tangente donnée d'avance et déterminées par l'équation

(64) $$hv'' + (h - 2)\beta + (2a + \overline{a_2^2 - a_1^1}h - 6c_{13})v' + \\ + (2b + \overline{b_2^2 - b_1^1}h - 6c_{23})v'^2 - (2 + h)\gamma v'^3 = 0 .$$

Le plan osculateur de la courbe donnée par l'équation (64) est

(65) $$\{\beta + \gamma m^3 + (3c_{23} - b)m^2 + (3c_{13} - a)m\}x^3 + hm^2x^1 - hmx^2 = 0 .$$

On peut de nouveau voir que par tout point de l'espace local du point correspondant A_0 il passe trois plans qui sont plans osculateurs des courbes (64). Les plans (65) enveloppent donc un cône du troisième degré. Parmi ces plans il y en a trois stationnaires pour les valeurs de m données par l'équation

(66) $$\beta + \gamma m^3 = 0 ,$$

et qui passent donc par les tangentes de Darboux au point A_0 de la surface π. Les trois plans stationnaires se coupent en une droite, à savoir

(67) $$x^1 = -\frac{1}{h}(3c_{13} - a)x^3 , \quad x^2 = \frac{1}{h}(3c_{23} - b)x^3 .$$

Nous obtenons ainsi *la normale $N_1(c_{13}, c_{23})$ de la surface π à connexion projective avec torsion, correspondant à la quadrique osculatrice* (63) *de la surface π au point A_0*. Ces normales forment un système à deux paramètres. Si le repère sur la surface est choisi de telle façon que $[A_0A_3]$ soit la première normale de la surface à connexion projective avec torsion, alors (28) a lieu. La normale $N_1(c_{13}, c_{23})$ coïncide avec la droite $[A_0A_3]$ si et seulement si

(68) $$c_{13} = -\frac{1}{3}\frac{h_u}{1 + h}, \quad c_{23} = \frac{1}{3}\frac{h_v}{1 - h} .$$

Cela détermine en même temps géométriquement un faisceau à un paramètre dans le faisceau à trois paramètres de quadriques osculatrices. Les quadriques de ce faisceau à un paramètre seront appelées quadriques osculatrices correspondant à la première normale de la surface à connexion projective avec torsion. Si nous choisissons maintenant A_3 sur une des ∞^1 quadriques osculatrices mentionnées, nous pouvons écrire son équation comme suit:

$$x^0x^3 - x^1x^2 + \frac{1}{3}\frac{h_u}{1+h}x^1x^3 + \frac{1}{3}\frac{h_v}{h-1}x^2x^3 = 0\,. \tag{69}$$

Parmi les quadriques (63), il existe un système à un paramètre de quadriques dont l'équation est

$$x^0x^3 - x^1x^2 = k(x^3)^2\,, \tag{70}$$

k étant le paramètre. La quadrique du faisceau (70) qui passe par le point A_3 a l'équation

$$x^0x^3 - x^1x^2 = 0\,. \tag{71}$$

Les quadriques du faisceau en question sont appelées quadriques essentielles de Darboux de la surface π à connexion projective. D'une façon géométrique, on peut les caractériser comme ceci: Par le point A_0 de la surface π faisons passer une droite p qui ne soit pas situé dans le plan tangent. Soit R_1 la surface réglée engendrée par les tangentes aux asymptotiques $v =$ const suivant une asymptotique $u =$ const. Soit R_2 la surface réglée engendrée par les tangentes aux asymptotiques $u =$ const suivant une asymptotique $v =$ const. Soit r_1 la droite de la surface R_1 qui passe par le point A_0 de la surface π, et d'une manière analogue, soit r_2 la droite de la surface R_2 qui passe par le point A_0 de la surface π. Les surfaces réglées R_1, R_2 sont, bien entendu, non-développables. Le plan τ_1 (resp. τ_2) déterminé par les droites p_1, r_1 (ou p_2, r_2 resp.) est donc le plan tangent à la surface R_1 (ou R_2) au point P_1 (ou P_2 resp.) sur la droite r_1 (ou r_2 resp.). La droite q joignant les points P_1 et P_2 sera appelée *droite associée à la droite p*. La quadrique (70) est alors, comme il est facile de voir (en faisant $[A_0A_3] = p$), la quadrique pour laquelle les droites p, q sont conjuguées polaires, p étant une droite quelconque passant par le point A_0 de la surface π et q la droite associée à p. Dans l'espace projectif, toutes deux droites associées p, q sont conjuguées polaires par rapport à la quadrique de Lie. Si nous choisissons le repère de telle manière que $[A_0A_3] = p$, alors $A_1 = P_1$, $A_2 = P_2$. Nous avons alors à nouveau une spécialisation caractéristique du repère ($a_2^1 = b_1^2 = 0$, $a_1^2 = \beta$, $b_2^1 = \gamma$). La normale $N_1(0, 0)$ correspondant aux quadriques essentielles de Darboux est la droite déterminée par les équations

$$x^1 = \frac{a}{h}x^3\,, \quad x^2 = -\frac{b}{h}x^3\,. \tag{72}$$

La normale $N_1(c_{13}, c_{23})$ et la première normale de la surface à connexion projective avec torsion déterminent (dans le cas où (69) n'est pas vérifié) le plan

$$(3c_{23} - b)\,x^1 + (3c_{13} - a)\,x^2 = 0\,. \tag{73}$$

La droite d'intersection de (73) avec le plan tangent est une droite qui est, dans le cas de $c_{13} = c_{23} = 0$, tangente à la courbe de la couche

$$(74) \qquad (1 - h)\, h_u \,\mathrm{d}u + (1 + h)\, h_v \,\mathrm{d}v = 0\,,^2)$$

qui passe par le point A_0 de la surface π. La seconde normale $N_1(c_{13}, c_{23})$, conjuguée polaire à $N_1(c_{13}, c_{23})$ par rapport à la quadrique (63), est

$$x^3 = 0,\; hx^0 - (3c_{23} + hc_{13} - b)\, x^1 + (3c_{13} - hc_{23} - a)\, x^2 = 0\,.$$

6. Nous connaissons ainsi toute une série de quadriques associées d'une façon invariante à la surface, au point considéré. A ces quadriques, nous allons ajouter encore une autre, et qui représente en principe une généralisation de la quadriques de Lie que l'on a étudié dans [3]. Soit donnée, sur la surface π, une courbe γ passant par le point A_0 et qui ne touche en ce point aucune des courbes asymptotiques. Contruisons maintenant suivant γ les tangentes aux asymptotiques u = const. Nous obtenons ainsi une surface réglée R_1; d'une manière analogue, les tangentes aux asymptotiques v = const dans les points de la courbe γ forment une autre surface réglée R_2. Cherchons deux quadriques Q_1 et Q_2 telles qu'une de leurs demi-quadriques ait un contact droit du second ordre avec la surface réglée R_1, R_2 dans la droite $[A_0A_2]$, $[A_0A_1]$. Soit donc

$$(75) \qquad (X, X) \equiv c_{ij}x^ix^j = 0\,, \quad c_{ij} = c_{ji}\,,$$

la quadrique Q_1. La courbe γ est donnée par l'équation

$$(76) \qquad v = v(u)\,(u = u(v))\,;$$

nous écrivons de nouveau $v' = \mathrm{d}v/\mathrm{d}u$, $u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}v$. Pour que la droite $[A_0A_2]$ soit située sur la quadrique Q_1, il faut et il suffit que l'on ait

$$(77) \qquad (A_0A_0) = (A_0A_2) = (A_2A_2) = 0\,.$$

En différentiant par rapport à u, nous obtenons

$$(78) \qquad \begin{gathered}(A_0A_1) = 0\,, \quad (A_1A_2) + (1 + h)(A_0A_3) = 0\,,\\ \gamma v'(A_1A_2) + (1 + h)(A_2A_3) = 0\,.\end{gathered}$$

Ensuite

$$(79) \qquad \begin{gathered}(A_1A_1) + v'(A_1A_2) + (1 - h)\, v'(A_0A_3) = 0\,,\\ \{h_u + h_v v' + (1 + h)(a_0^0 + b_0^0 v' + a_3^3 + b_3^3 v')\}(A_0A_3) + \{a_1^1 + b_1^1 v' + a_2^2 +\\ + b_2^2 v'\}(A_1A_2) + \gamma v'(A_1A_1) + 2(1 + h)(A_1A_3) + 2v'(A_2A_3) = 0\,,\\ (1 + h)(a_2^0 + b_2^0 v')(A_0A_3) + \gamma^2 v'^2 (A_1A_1) + \{\gamma v'(a_1^1 + b_1^1 v' + a_2^2 + b_2^2 v') +\\ + \gamma_u v' + \gamma_v v'^2 + \gamma v'' + (1 + h)(a_3^1 + b_3^1 v')\}(A_1A_2) + 2(1 + h)\,\gamma v'(A_1A_3) +\\ + \{h_u + h_v v' + (1 - h)\, v'^2 \gamma + (1 + h)(a_3^3 + b_3^3 v') + (1 + h)(a_2^2 + b_2^2 v')\}(A_2A_3) +\\ + (1 + h)^2 (A_3A_3) = 0\,.\end{gathered}$$

---

[2]) Il s'agit, à vrai dire, de la couche $a\,\mathrm{d}u - b\,\mathrm{d}v = 0$; mais nous calculons en repère semicanonique de sorte que (28) a lieu.

Si nous posons $c_{03} = -1$, nous aurons en vertu de (77), (78) et (79)

$$c_{12} = 1 + h\,, \quad c_{00} = c_{01} = c_{02} = c_{22} = 0\,, \quad c_{23} = -\gamma v'\,, \quad c_{11} = -2v'h\,, \tag{80}$$

$$c_{13} = \tfrac{1}{2}\left(a + bv' + \frac{h_u}{1+h} + \frac{h_v}{1+h} v' + 2\gamma v'^2\right),$$

$$c_{33} = -\frac{1}{1+h}\left\{\gamma v'(a_0^0 + b_0^0 v' - a_2^2 - b_2^2 v') - a_2^0 - b_2^0 v' + 2\gamma^2 v'^3 \frac{1}{1+h} + \right.$$
$$\left. + \gamma_u v' + \gamma_v v'^2 + \gamma v'' + (1+h)(a_3^1 + b_3^1 v') - \gamma^2 v'^3 \frac{1-h}{1+h}\right\}.$$

Si nous choisissons le repère de telle façon que A_3 se trouve sur la quadrique Q_1, l'équation de la quadrique Q_1 en ce repère local devient

$$(1+h)\,x^1x^2 - x^0x^3 - v'h(x^1)^2 - \gamma v' x^2x^3 + \tfrac{1}{2}\left(a + bv' + \frac{h_u}{1+h} + \right. \tag{81}$$
$$\left. + \frac{h_v}{1+h} v' + 2\gamma v'^2\right) x^1x^3 = 0\,.$$

Si $a\,\mathrm{d}u - b\,\mathrm{d}v = 0$ est l'équation de la courbe que γ touche au point A_0, (81) devient

$$(1+h)\,x^1x^2 - x^0x^3 - \frac{a}{b} h(x^1)^2 - \gamma \frac{a}{b} x^2x^3 + \left(\frac{a}{2} + \gamma \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{2}\frac{h_u}{1+h} + \right. \tag{82}$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{h_v}{1+h}\frac{a}{b}\right) x^1x^3 - \frac{1}{2(1+h)}\left\{\gamma \frac{a}{b}\left(a_0^0 + b_0^0 \frac{a}{b} - a_2^2 - b_2^2 \frac{a}{b}\right) - \right.$$
$$- a_2^0 - b_2^0 \frac{a}{b} + 2\gamma^2 \frac{a^3}{b^3}\frac{1}{1+h} + \gamma_u \frac{a}{b} + \gamma_v \frac{a^2}{b^2} + \gamma v'' +$$
$$\left. + (1+h)\left(a_3^1 + b_3^1 \frac{a}{b}\right) - \gamma^2 \frac{a^3}{b^3}\frac{1-h}{1+h}\right\}(x^3)^2 = 0\,.$$

Les quadriques (82) dépendent d'un paramètre v''. Or, si nous supposons que la courbe γ touche la courbe $a\,\mathrm{d}u - b\,\mathrm{d}v = 0$ au point A_0 et que γ soit la courbe de la surface π qui ait, au point considéré, un contact du troisième ordre avec la quadrique osculatrice de Darboux correspondante, alors le paramètre v'' de notre quadrique sera déterminé par l'équation (64) et nous n'aurons qu'une seule quadrique invariante Q_1. En échangeant les courbes asymptotiques, nous obtenons la quadrique Q_2 qui est évidemment aussi la seule quadrique invariante qui jouisse des propriétés demandées. Son équation sera (le repère étant choisi convenablement)

$$(1+h)\,x^1x^2 - x^0x^3 - \frac{b}{a} h(x^1)^2 - \beta \frac{a}{b} x^2x^3 + \tag{83}$$
$$+ \left(b + \beta \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{h_v}{1+h} + \frac{1}{2}\frac{h_u}{1+h}\frac{b}{a}\right) x^1x^3 = 0\,.$$

7. Les droites (normales) invariantes étudiées jusqu'à présent ainsi que les quadriques du paragraphe dernier étaient des objets géométriques liés d'une manière invariante à la surface et dépendaient essentiellement de la connexion existant sur la surface considérée. Les droites telles que l'axe de Green et la directrice de Wilczynski représentent une généralisation des notions analogues de l'espace projectif à une surface à connexion projective, s'appuyant sur les définitions de ces droites dans l'espace projectif, données ci-dessous. En vertu des résultats du paragraphe 5, nous savons que la droite p, qui n'est pas située dans le plan tangent τ à la surface π au point considéré A_0, mais qui passe par le point A_0 et la droite q du plan tangent τ, associée à p, sont aussi conjuguées polaires par rapport à la quadrique essentielle de Darboux corespondant à la surface π au point A_0. Les droites p, correspondant aux points de la surface π, forment une congruence Γ_1 et les droites associées q forment une autre congruence Γ_2. Entre les deux congruences Γ_1 et Γ_2 nous avons une correspondance C (à toute droite correspond sa droite polaire par rapport à la quadrique essentielle de Lie). Si C est développable, alors nous appelons p directrice de Wilczynski de la surface π. Mais on peut voir que les propriétés citées ne font pas correspondre à la surface à connexion projective au point considéré une seule droite sans ambiguïté. Soit P un point de la droite p

$$P = x^0 A_0 + x^1 A_1 + x^2 A_2 + x^3 A_3 \,. \tag{84}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P = \{\mathrm{d}x^0 + x^0\omega_0^0 + x^1\omega_1^0 + x^2\omega_2^0 + x^3\omega_3^0\}\, A_0 + \{\mathrm{d}x^1 + x^0\,\mathrm{d}u + x^1\omega_1^1 + \\ + x^2\gamma\,\mathrm{d}v + x^3\omega_1^3\}\, A_1 + \{\mathrm{d}x^2 + x^0\,\mathrm{d}v + x^1\beta\,\mathrm{d}u + x^2\omega_2^2 + x^3\omega_3^2\}\, A_2 + \\ + \{\mathrm{d}x^3 + x^1(1-h)\,\mathrm{d}v + x^2(1+h)\,\mathrm{d}u + x^3\omega_3^3\}\, A_3 \,. \end{aligned}$$

En posant $x^3 = 1$ (et en écrivant $x^0 = x$, $x^1 = y$, $x^2 = z$), nous aurons l'équation des surfaces développables de la congruence Γ_1

$$\begin{aligned} \{y_u + \beta x + a_2^2 y + a_3^2 - y^2(1+h) - y a_3^3\}\,\mathrm{d}u^2 - \{x_v + \\ + \gamma y + b_1^1 x + b_3^1 - x^2(1-h) - x b_3^3\}\,\mathrm{d}v^2 + \{y_v - x_u + y b_2^2 + \\ + b_3^2 - x a_1^1 - a_3^1 + 2xyh + x a_3^3 - y b_3^3\}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0 \,. \end{aligned} \tag{85}$$

Si maintenant la droite p est déterminée par les points $(1, 0, 0, 0)$, $(0, x, y, 1)$, la droite associée sera déterminée par les points $B_1 = xA_0 + A_2$, $B_2 = yA_0 + A_1$. Soit $M = \lambda B_1 + \mu B_2$. Nous cherchons $\mathrm{d}u : \mathrm{d}v$ de façon à avoir $(B_1, B_2, \mathrm{d}M) = 0$. Nous avons évidemment

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M = \{\lambda(\mathrm{d}x + x\omega_0^0 + \omega_2^0 - xy\,\mathrm{d}u + \gamma y\,\mathrm{d}v - x^2\,\mathrm{d}v - x\omega_2^2) + \mu(\mathrm{d}y + \\ + y\omega_0^0 + \omega_1^0 - y^2\,\mathrm{d}u - y\omega_1^1 - xy\,\mathrm{d}v - \beta x\,\mathrm{d}u)\}\, A_0 + \{\mu(1-h)\,\mathrm{d}v + \\ + \lambda(1+h)\,\mathrm{d}u\}\, A_3 + (xA_0 + A_2)(.) + (yA_0 + A_1)(.) \,. \end{aligned}$$

L'équation des surfaces développables de la congruence Γ_2 est donc

$$\begin{aligned} \{y_u + y a_0^0 + a_1^0 - y^2 - y a_1^1 - \beta x\}(1+h)\,\mathrm{d}u^2 - \{x_v + x b_0^0 + b_2^0 - \\ - \gamma y - x b_2^2 - x^2\}(1-h)\,\mathrm{d}v^2 + \{(1+h)(y_v + y b_0^0 + b_1^0 - y b_1^1 - \\ - xy) - (1-h)(x_u + x a_0^0 + a_2^0 - xy - x a_2^2)\}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0 \,. \end{aligned} \tag{86}$$

Nous écrirons les équations (85) et (86) comme

$$a_1\,du^2 + a_2\,du\,dv + a_3\,dv^2 = 0\,, \quad b_1\,du^2 + b_2\,du\,dv + b_3\,dv^2 = 0\,.$$

Pou que $\boldsymbol{C}$ soit une correspondance développable et que (85), (86) soient les équations d'un réseau conjugué sur π, il faut sans doute que l'on ait $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $b_1a_3 - - b_3a_1 = 0$, ce qui est un système d'équations aux dérivées partielles qui, en général, n'a pas de solution. Mais si nous exigeons seulement que $\boldsymbol{C}$ soit une correspondance développable, nous obtenons le système d'équations aux dérivées partielles que voici

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0\,, \quad a_1b_3 - b_1a_3 = 0\,. \tag{87}$$

Par contre, si nous demandons seulement que Γ_1 et Γ_2 découpent sur la surface π par leurs surfaces développables un réseau conjugué, il faut que l'on ait

$$a_2 = 0\,, \quad b_2 = 0\,. \tag{88}$$

Les systèmes (87) et (88) ont chacun une et une seule solution si les conditions initiales sont données. Choisissons donc au point considéré A_0 une droite quelconque p qui ne soit pas située dans le plan tangent qui passe par le point A_0; cela détermine d'une manière univoque les droites p dans le voisinage du point A_0. Il se pose alors tout naturellement la question de savoir si, lorsqu'on choisit pour p au point A_0 la directrice de Wilczynski (définition à l'aide du complexe linéaire [6]), les droites p déterminées par les équations différentielles (87) seront elles-aussi directrices de Wilczynski aux points correspondants. Fixons le repère de telle façon que $[A_0A_3]$ soit la directrice de Wilczynski en A_0; alors on doit avoir [6]

$$\begin{aligned} a_u &= 2(a_3^2 - a_1^0) + a(a_3^3 - a_2^1) - \tfrac{1}{2}a^2 + b\beta\,, \\ b_v &= 2(b_3^1 - b_2^0) + b(b_3^3 - b_1^1) - \tfrac{1}{2}b^2 + a\gamma\,. \end{aligned} \tag{89}$$

Les conditions initiales pour le système (87), ou (88) resp., sont $x^0 = y^0 = 0$. Les surfaces développables des congruences Γ_1, Γ_2 peuvent également être écrites comme

$$a_3^2\,du^2 + (b_3^2 - a_3^1)\,du\,dv - b_3^1\,dv^2 = 0\,,$$

$$(1 + h)\,a_1^0\,du^2 + \{(1 + h)\,b_1^0 - (1 - h)\,a_2^0\}\,du\,dv - (1 - h)\,b_2^0\,dv^2 = 0\,,$$

(si nous prenons $[A_0A_3]$ pour la droite p de la congruence Γ_1, la droite $[A_1A_2]$ sera alors la droite q de la congruence Γ_2).

Pour que dans le voisinage du point A_0 sur la surface π les droites p fussent des directrices de Wilczynski (quand $x^0 = y^0 = 0$ sont les conditions initiales des équations (87)), les conditions (87) devraient être équivalentes aux conditions

$$\begin{gathered} a_3^2\{(1 + h)\,b_1^0 - (1 - h)\,a_2^0\} - (1 + h)\,a_1^0(b_3^2 - a_3^1) = 0\,, \\ a_3^2(1 - h)\,b_2^0 - b_3^1(1 + h)\,a_1^0 = 0 \end{gathered} \tag{90}$$

ce qui n'est pas vrai en général. D'une manière analogue, si nous considérons les équations (88), ce qui signifie que Γ_1, Γ_2 découpent par leurs surfaces développables sur π un réseau conjugué, nous obtenons à partir du système (88) une condition équivalente (compte tenu des conditions initiales)

$$b_3^2 - a_3^1 = 0\,, \quad (1 + h)\,b_1^0 - (1 - h)\,a_2^0 = 0\,, \tag{91}$$

qui n'est pas non plus conséquence de (89). Nous avons donc le résultat: *La directrice de Wilczynski et les congruences Γ_1 déterminées par les équations* (87), *ou* (88) *resp., avec les conditions initiales $x^0 = y^0 = 0$, sont différentes dans le voisinage du point A_0.*

Si nous définissons l'axe de Green comme la droite remplissant la condition de polarité par rapport à la quadrique essentielle de Darboux ainsi que la condition de correspondance entre $[A_0A_3]$ et la droite de jonction des pôles des tangentes asymptotiques par rapport aux sections canoniques ayant un contact du troisième ordre avec la projection de l'asymptotique dans le plan tangent faite d'un point arbitraire de la droite $[A_0A_3]$, nous obtenons la droite

$$\begin{aligned}(92)\qquad &\left[A_0, A_1 \frac{1}{4+h}\left(b_0^0 + b_1^1 - 2b_2^2 + \frac{\partial \log \gamma}{\partial v}\right) + \right.\\ &\left. + A_2 \frac{1}{4-h}\left(a_0^0 + a_2^2 - 2a_1^1 + \frac{\partial \log \beta}{\partial u}\right) + A_3\right]\end{aligned}$$

et la droite polaire par rapport à la quadrique de Darboux (70)

$$\begin{aligned}&\left[A_1 + A_0 \frac{1}{4+h}\left(a_0^0 + a_2^2 - 2a_1^1 + \frac{\partial \log \beta}{\partial u}\right), \right.\\ &\left. A_2 + A_0 \frac{1}{4-h}\left(b_0^0 + b_1^1 - 2b_2^2 + \frac{\partial \log \gamma}{\partial v}\right)\right].\end{aligned}$$

8. Les équations fondamentales de l'espace à trois dimensions P_3 à connexion projective sont

$$(93)\qquad \mathrm{d}A_i = \omega_i^j A_j\,, \quad \omega_i^i = 0 \quad (i, j, k = 0, 1, 2, 3)\,.$$

Les conditions de l'intégrabilité s'écrivent comme

$$\begin{aligned}(94)\qquad [\mathrm{d}\omega^\alpha] &= [\omega^\beta(\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha\omega_0^0)] - \tfrac{1}{2}R^\alpha_{\gamma\varepsilon}[\omega^\gamma\omega^\varepsilon]\,,\\ [\mathrm{d}\omega_j^i] &= [\omega_k^i\omega_j^k] - \tfrac{1}{2}R^i_{j\gamma\varepsilon}[\omega^\gamma\omega^\varepsilon]\,,\\ R^\alpha_{(\gamma\varepsilon)} = R^i_{j(\gamma\varepsilon)} &= 0, \ (\omega^\alpha = \omega_0^\alpha;\ \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = 1, 2, 3)\,.\end{aligned}$$

Pour l'équation de la surface π dans P_3 nous avons

$$(95)\qquad \omega^3 = 0\,.$$

Nous pouvons spécialiser le repère de manière à avoir

$$(96)\qquad \omega_1^3 = \omega^2\,, \quad \omega_2^3 = \omega^1\,.$$

En posant

$$(97)\qquad \omega^1 = \mathrm{d}u\,, \quad \omega^2 = \mathrm{d}v\,,$$

nous obtenons, par différentiation extérieure, les équations quadratiques

$$\begin{aligned}(98)\qquad &[\omega_0^0 - \omega_1^1\,\mathrm{d}u] + [\mathrm{d}v\,\omega_2^1] - R^1_{12}[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0\,,\\ &[\mathrm{d}u\,\omega_1^2] + [\omega_0^0 - \omega_2^2\,\mathrm{d}v] - R^2_{12}[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0\,.\end{aligned}$$

Il découle de (96) que l'on a

$$(99)\quad [\omega_1^2\,\mathrm{d}u] - \tfrac{1}{2}[\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3\,\mathrm{d}v] + (R_{12}^2 - R_{112}^3)[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0\,,$$
$$-\tfrac{1}{2}[\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3\,\mathrm{d}u] + [\omega_2^1\,\mathrm{d}v] + (R_{12}^1 - R_{212}^3)[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0$$

d'où

$$(100)\qquad \omega_1^2 = \beta\,\mathrm{d}u + \left(\varrho + \frac{R_{12}^2 - R_{112}^3}{2}\right)\mathrm{d}v\,,$$
$$-\tfrac{1}{2}(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) = \left(\varrho - \frac{R_{12}^2 - R_{112}^3}{2}\right)\mathrm{d}u + \left(\sigma - \frac{R_{212}^3 - R_{12}^1}{2}\right)\mathrm{d}v\,,$$
$$\omega_2^1 = \left(\sigma + \frac{R_{212}^3 - R_{12}^1}{2}\right)\mathrm{d}u + \gamma\,\mathrm{d}v\,.$$

En vertu du lemme de Cartan, (98) donne

$$(101)\qquad \omega_0^0 - \omega_1^1 = k_1\,\mathrm{d}u - \left(\sigma + \frac{R_{212}^3 - R_{12}^1}{2}\right)\mathrm{d}v\,,$$
$$\omega_0^0 - \omega_2^2 = \left(\frac{R_{112}^3 - R_{12}^2}{2} - \varrho\right)\mathrm{d}u + k_2\,\mathrm{d}v\,.$$

En différentiant extérieurement les équations (100) nous obtenons

$$\delta\left(\varrho + \frac{R_{12}^2 - R_{112}^3}{2}\right) = \left(\varrho + \frac{R_{12}^2 - R_{112}^3}{2}\right)(e_1^1 - e_0^0) + e_1^0 - e_3^2\,,$$
$$\delta\left(\sigma + \frac{R_{212}^3 - R_{12}^1}{2}\right) = \left(\sigma + \frac{R_{212}^3 - R_{12}^1}{2}\right)(e_2^2 - e_0^0) + e_2^0 - e_3^1\,.$$

Nous pouvons donc écrire les équations (100), (101) sous la forme

$$(102)\qquad \omega_1^2 = \beta\,\mathrm{d}u\,,$$
$$-\tfrac{1}{2}(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) = (R_{112}^3 - R_{12}^2)\,\mathrm{d}u + (R_{12}^1 - R_{212}^3)\,\mathrm{d}v\,,$$
$$\omega_2^1 = \gamma\,\mathrm{d}v\,,$$
$$\omega_0^0 - \omega_1^1 = k_1\,\mathrm{d}u - R_{12}^1\,\mathrm{d}v\,,\quad \omega_0^0 - \omega_2^2 = R_{12}^2\,\mathrm{d}u + k_2\,\mathrm{d}v\,.$$

La forme linéaire (19) peut alors être écrite comme

$$(103)\qquad (R_{112}^3 - R_{12}^2)\,\mathrm{d}u + (R_{212}^3 - R_{12}^1)\,\mathrm{d}v = 0\,.$$

Si nous avons

$$(104)\qquad R_{112}^3 - R_{12}^2 = 0\,,\quad R_{212}^3 - R_{12}^1 = 0\,,$$

alors la quadrique singulière de Lie se compose d'un plan tangent compté deux fois et nous n'obtenons pas de normale de la surface à connexion projective, qui a été définie, paragraphe 2, comme caractéristique d'un faisceau à un paramètre de plans (en chaque point de la surface, c'est le plan de la quadrique singulière de Lie qui n'est pas tangent). Si nous avons (104) et l'équation

$$(105)\qquad R_{312}^3 - R_{12}^3 = 0$$

en tout point de l'espace P_3, alors par chaque point passent trois surfaces à „normale indéfinie". Toutes deux de ces trois surfaces ont dans le point commun une tangente asymptotique commune.

Soient maintenant donnés deux espaces à trois dimensions P_3 et $\bar{P}_3$, à connexion projective. Le repère soit donné par les points B_i; dans les équations de son mouvement écrivons $\bar{\omega}_i^k$, $\bar{a}_k^i, \ldots$, au lieu de ω_i^k, $a_k^i, \ldots$. Dans P_3 soit donnée une surface π et dans $\bar{P}_3$ une surface $\bar{\pi}$. Supposons que π et $\bar{\pi}$ soient en correspondance asymptotique

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}\bar{u}\,, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}\bar{v}\,. \tag{106}$$

Soit donnée une homographie $\boldsymbol{H}$,

$$\boldsymbol{H}A_0 = B_0\,, \quad \boldsymbol{H}A_i = k_i^k B_k \tag{107}$$

existant entre les espaces locaux des surfaces π, $\bar{\pi}$ aux points considérés. L'homographie tangente la plus générale de la correspondance (106) est

$$\begin{gathered}\boldsymbol{H}A_0 = B_0\,, \quad \boldsymbol{H}A_1 = k_1^0 B_0 + B_1\,, \quad \boldsymbol{H}A_2 = k_2^0 B_0 + B_2\,,\\ \boldsymbol{H}A_3 = k_3^0 B_0 + k_3^1 B_1 + k_3^2 B_2 + k_3^3 B_3\,.\end{gathered} \tag{108}$$

Nous avons donc

$$\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}A_0 = \mathrm{d}B_0 + \vartheta B_0\,, \quad \vartheta = \omega_0^0 - \bar{\omega}_0^0 + k_1^0\,\mathrm{d}u + k_2^0\,\mathrm{d}v\,.$$

Il est aisé de voir que nous avons (en écrivant $\tau_i^i = \bar{\omega}_i^i - \omega_i^i$)

$$\begin{gathered}\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}^2A_0 = \mathrm{d}^2B_0 + 2\vartheta\,\mathrm{d}B_0 + (.)B_0 + \Phi_1 B_1 + \Phi_2 B_2\,,\\ \Phi_1 = \{\tau_0^0 - \tau_1^1 + (k_3^1 - k_2^0)\,\mathrm{d}v - 2k_1^0\,\mathrm{d}u\}\,\mathrm{d}u + \{(\gamma - \bar{\gamma})\,\mathrm{d}v + (k_3^1 - k_2^0)\,\mathrm{d}u\}\,\mathrm{d}v\,,\\ \Phi_2 = \{(\beta - \bar{\beta})\,\mathrm{d}u + (k_3^2 - k_1^0)\,\mathrm{d}v\}\,\mathrm{d}u + \{\tau_0^0 - \tau_2^2 + (k_3^2 - k_1^0)\,\mathrm{d}u - 2k_2^0\,\mathrm{d}v\}\,\mathrm{d}v\,.\end{gathered} \tag{109}$$

Considérons maintenant les surfaces pour lesquelles on a $[\Phi_2\,\mathrm{d}v] = 0$, ce qui signifie que la droite linéarisante de la tangente à l'asymptotique $[A_0A_1]$ est tangente à l'asymptotique $\mathrm{d}\bar{v} = 0$, c'est-à-dire à $[B_0B_1]$, (la droite linéarisante $[A_0A_1]$ est H-caractéristique). En vertu de (109), nous obtenons alors la condition

$$\beta = \bar{\beta}\,. \tag{110}$$

Si nous supposons que la surface $\bar{\pi}$ est donnée, alors la surface π est déterminée par le système d'équations (95), (96), (97), (102). En différentiant extérieurement ce système, nous arrivons à

$$\begin{gathered}[\omega_1^0 - \omega_3^2\,\mathrm{d}v] + (.) = 0\,,\\ [\omega_2^0 - \omega_3^1\,\mathrm{d}u] + [\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\gamma] + (.) = 0\,,\\ [\omega_1^0 - \omega_3^2\,\mathrm{d}u] + [\omega_2^0 - \omega_3^1\,\mathrm{d}v] + (.) = 0\,,\\ [dk_1 + 2\omega_1^0\,\mathrm{d}u] + [\omega_2^0 - \omega_3^1\,\mathrm{d}v] + (.) = 0\,,\\ [\omega_1^0 - \omega_3^2\,\mathrm{d}u] + [dk_2 + 2\omega_2^0\,\mathrm{d}v] + (.) = 0\,.\end{gathered} \tag{111}$$

Le système est fermé et en involution. Si $\bar{\pi}$ est donnée, alors π dépend de cinq fonctions d'une variable.

Par différentiation extérieure de $(102_{4,5})$ nous obtenons des équations quadratiques qui font voir aisément qu'il est possible de poser

$$(112) \qquad k_1 = k_2 = 0\,.$$

Tâchons de trouver les conditions pour que $[B_0,\ bB_1 + aB_2]$ (où l'on suppose $ab \neq 0$) soit la droite linéarisante de la tangente à l'asymptotique $dv = 0$. En vertu de (109) nous obtenons comme condition nécessaire et suffisante pour les surfaces en question l'équation

$$(113) \qquad a(\bar{a}_0^0 - a_0^0 + a_1^1 - \bar{a}_1^1 - 2k_1^0) + b(\bar{\beta} - \beta) = 0\,.$$

Nous pouvons maintenant choisir l'homographie $\boldsymbol{H}$ de telle façon que (113) soit vérifié, ou bien, si $\boldsymbol{H}$ est déjà déterminée mais telle que

$$(114) \qquad \bar{a}_0^0 - a_0^0 + a_1^1 - \bar{a}_1^1 - 2k_1^0 = 0\,,$$ [3])

n'est pas vérifié, alors la surface π ($\bar{\pi}$ étant donnée) est déterminée par le système des équations (95), (96), (97), (102), avec la condition

$$(115) \qquad \beta = \bar{\beta} - 2\frac{a}{b}k_1^0\,,$$

(nous avons (112) et $a_0^0 - a_1^1 = k_1$, $\bar{a}_0^0 - \bar{a}_1^1 = \bar{k}_1$). Le système est fermé et en involution, sa solution dépend de cinq fonctions d'une variable. Nous avons donc le résultat suivant:

Si la surface $\bar{\pi}$ est donnée, alors la surface π, qui est en correspondance asymptotique avec $\bar{\pi}$ et telle que la droite linéarisante de la tangente à l'asymptotique $dv = 0$ *est H-caractéristique, dépend de cinq fonctions d'une variable. C'est avec le même degré de généralité que π est déterminée si la surface $\bar{\pi}$ est donnée et si nous exigeons que la droite linéarisante de la tangente à l'asymptotique* $dv = 0$ *soit tangente à la courbe* $a\,du - b\,dv = 0$ $(ab \neq 0)$ *au point considéré de la surface, à condition que l'homographie* $\boldsymbol{H}$ *soit fixée de telle façon que* (114) *ne soit pas vérifié.*

Literatura

[1] *E. Cartan:* Lecons sur la théorie des espaces à connexion projective. Paris, 1937.

[2] *B. Cenkl:* Homographies conservant l'élement du troisième ordre d'une surface dans un espace à connexion projective. Чех. мат. ж., *12* (*87*) 1962, 288—293.

[3] *С. П. Фиников:* Проективно-дифференциальная геометрия. ГТТИ, Москва, 1937.

[4] *A. Švec:* L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentialle. Чех. мат. ж. *10* (*85*) 1960, 523—550.

[5] *A. Švec:* K výkladu teorie prostorů s konexí. Časopis pro pěstování matematiky *86*, 1961, 425—432.

[6] *A. Švec:* Sur la géométrie différentielle d'une surface plongée dans un espace à trois dimensions à connexion projective. Чех. мат. ж. *11* (*86*) 1961, 386—397.

[3]) Si (114) est vérifié, alors la droite linéarisante de la tangente à l'asymptotique $dv = 0$ est la tangente à l'asymptotique $du = 0$. Il n'est évidemment pas possible que la droite $[B_0, bB_1 + aB_2]$ soit en même temps la droite linéarisante de la tangente à l'asymptotique $dv = 0$.

[7] *A. Terracini:* Sul significato geometrico della normale proiettiva. R. accad. n. dei Lincei, *III*, 10, 1926, 584—591.

[8] *E. Čech:* Sulle omografie a carrelazioni che conservano l'elemento del terzo ordine di una superficie in S_3, R. accad. n. dei Lincei, *XXXI*, 12, 1922, 496—498.

Резюме

НОРМАЛЬ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

БОГУМИЛ ЦЕНКЛ (Bohumil Cenkl), Прага

Под поверхностью с проективной связностью мы понимаем многообразие P_{02}^3, определенное следующим образом.

Пусть дана двумерная область параметров Ω. Пусть каждой точке (ξ) сопоставлено трехмерное проективное пространство $P_3(\xi)$ (т. наз. локальное пространство). Пусть каждой дуге $\gamma \subset \Omega$, соединяющей точки $(^1\xi)$ и $(^2\xi)$, сопоставлена коллинеация $\boldsymbol{P}_\gamma : P_3(^1\xi) \to P_3(^2\xi)$. Если в каждом локальном пространстве выбрать репер A_0, A_1, A_2, A_3, то связность будет дана уравнениями (1).

Определенной таким образом поверхности с проективной связностью можно в точке сопоставить прямые — т. наз. *нормали* — инвариантные относительно преобразования параметров в области Ω и относительно выбора репера в локальном пространстве. Нетрудно показать, что существует целый ряд таких прямых; исследуется их связь с квадриками, инвариантно сопоставленными с поверхностью в рассматриваемой точке. Выводится инвариантная линейная форма (74) как для поверхности с кручением (т. е. для поверхности, для которой инвариант $M \neq 0$ — см. (1)) так и для поверхности без кручения (19) ($k = 0$), а также поясняется геометрический смысл равенства этой формы нулю. При помощи этой инвариантной формы далее определяются на поверхности без кручения псевдогеодезические линии как кривые $v = \varphi(u)$ (u, v — главные параметры), для которых интеграл $\int \Phi(u, \varphi(u))$ принимает экстремальное значение, конечно если $\Phi(u, v)$ — инвариантная форма рассматриваемой поверхности. Этим псевдогеодезическим линиям поставлены в соответствие прямые в рассматриваемой точке, являющиеся нормалями поверхности. Рассматриваются кривые, для которых выражения (42), (49), (54) экстремальны. Соответствующие им нормали лежат в одной связке (58).

В большинстве случаев исследуемые объекты (нормали и квадрики) существенно зависят от тензора кривизны рассматриваемой поверхности, не являются лишь обобщением геометрических объектов из проективного пространства, так как с обращением тензора кривизны в нуль их определения теряют смысл.

В последней части исследуются некоторые свойства асимптотического соответствия между двумя поверхностями с проективной связностью.