Ladislav Procházka

Заметка о структуре фактор-групп абелевых групп без кручения конечного ранга

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 4, 529–535

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100537

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

ЗАМЕТКА О СТРУКТУРЕ ФАКТОР-ГРУПП АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

(Поступило в редакцию 15/X 1960 г.)

В статье доказана теорема, описывающая структуру фактор-групп некоторых абелевых групп без кручения конечного ранга. Для доказательства этой теоремы использована одна из основных теорем из [1].

Под словом группа будем всюду понимать аддитивно записанную абелеву группу с нулевым элементом **O**.

Пусть G – группа без кручения и пусть g – произвольный ненулевой элемент из G; если элемент $g_1 \in G$ удовлетворяет уравнению $nx = mg$, где n $(n \neq 0)$, m – некоторые целые рациональные числа, т. е. $ng_1 = mg$, то будем просто писать $g_1 = (m/n)\, g$. Множество всех рациональных чисел вида m/n $(m, n$ – – целые числа$)$, для которых уравнение $nx = mg$ обладает в группе G решением для определенного элемента $g \in G$, будем обозначать символом $\mathscr{R}(g; G)$. Можно легко убедиться в том, что множество $\mathscr{R}(g; G)$ является подгруппой аддитивной группы рациональных чисел $\mathscr{R}$, порожденной в точности всеми рациональными числами вида $1/p^k$, где p – произвольное (положительное) простое число и k – целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $k \leqq \chi(g; p, G)$ (смотри [2]); здесь символом $\chi(g; p, G)$ обозначаем p-высоту элемента g в группе G, т. е. верхнюю грань множества всех целых неотрицательных чисел α, для которых уравнение $p^\alpha x = g$ обладает в G решением. Если символом $\mathscr{S}(g)$ обозначим наименьшую сервантную подгруппу группы G, содержащую элемент g, то, очевидно, будет в точности

$$\mathscr{S}(g) = E(g_1;\, g_1 \in G,\ g_1 = \varrho g,\, \varrho \in \mathscr{R}(g; G)) = \mathscr{R}(g; G)\, g\,.$$

Ещё напомним (см. [2]), что справедливо следующее утверждение: Если G группа без кручения, $G = G_1 \dotplus G_2$, и если $g = g_1 + g_2$, где $g_i \in G_i$, $g_i \neq \mathbf{O}$ $(i = 1, 2)$, то будет

$$\mathscr{R}(g; G) = \mathscr{R}(g_1; G) \cap \mathscr{R}(g_2; G)\,.$$

Кроме того напомним понятие тотально $\mathfrak{K}$-разложимой группы, введенное в [1]: Группу без кручения G будем называть тотально $\mathfrak{K}$-разложимой, если она является прямой суммой подгрупп ранга 1, $G = \sum_{d,\ \iota \in I} J_\iota$, и притом множество всех типов $typ\, J_\iota$ $(\iota \in I)$ является цепью в частично упорядоченном множестве всех типов групп без кручения ранга 1, т. е. является упорядоченным множеством.

Теперь приведем теорему, которая была доказана в [1].

Вспомогательная теорема. *Пусть H — расщепляемая группа вида $H = A \dotplus Q$, где A — тотально $\mathfrak{R}$-разложимая группа без кручения и Q — периодическая группа. Тогда каждое абелевское расширение G группы H при помощи периодической группы с ограниченными в совокупности порядками элементов является расщепляемой группой вида $G = A' \dotplus P$, где $A \cong A'$ и P — периодическая группа.*

В статье [2] была описана структура фактор-групп некоторых абелевых групп без кручения конечного ранга. Там было, помимо прочего, доказано, что каждая тотально $\mathfrak{R}$-разложимая группа без кручения G конечного ранга $r \geqq 1$ является факторно расщепляемой; это значит, что каждая фактор-группа G/H по произвольной подгруппе H должна быть расщепляемой. Если

$$G/H = \tilde{G} = \tilde{A} \dotplus \tilde{P},$$

где $\tilde{A}$ — группа без кручения и $\tilde{P}$ — периодическая группа, то в [2] неимеется средства, позвляющего описать группу без кручения $\tilde{A}$. В этой статье мы будем заниматься описанием структуры только что определенной группы $\tilde{A}$. Для этой цели мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть G — тотально $\mathfrak{R}$-разложимая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть*

$$G = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \ldots \dotplus J_r \tag{1}$$

какое-то ее тотальное разложение (в подгруппы ранга 1). Если H — произвольная подгруппа ранга $s < r$ группы G, то фактор-группа $\tilde{G} = G/H$ является расщепляемой; притом, если $\tilde{G} = \tilde{A} \dotplus \tilde{P}$ — некоторое прямое разложение группы $\tilde{G}$, где $\tilde{P}$ — периодическая часть группы $\tilde{G}$, то $\tilde{A}$ должна быть тотально $\mathfrak{R}$-разложимой группой без кручения ранга $t = r - s$,

$$\tilde{A} = \tilde{J}_1 \dotplus \tilde{J}_2 \dotplus \ldots \dotplus \tilde{J}_t,$$

и можно определить индексы $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$ $(1 \leqq i_j \leqq r)(j = 1, \ldots, t)$ так, что $\tilde{J}_j \cong J_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, t)$.

Доказательство. Теорему докажем методом полной индукции по рангу r группы G.

Для $r = 1$, очевидно, теорема справедлива.

Итак, пусть $r > 1$ и пусть теорема имеет место для всех групп ранга $r - 1$. В подгруппе H выберем s линейно независимых элементов $y_1, y_2, \ldots, y_s$ и построим подгруппу группы H:

$$U = \{y_1\} \dotplus \{y_2\} \dotplus \ldots \dotplus \{y_s\}. \tag{2}$$

Теперь прежде всего определим структуру фактор-группы $G^* = G/U$.

По предположению группа G является тотально $\mathfrak{K}$-разложимой, следовательно, можно считать группы J_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ из (1) занумерованными уже таким образом, что

$$(3) \qquad typ\ J_1 \geqq typ\ J_2 \geqq \ldots \geqq typ\ J_{r-1} \geqq typ\ J_r\,.$$

Для простоты положим $G' = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \ldots \dotplus J_{r-1}$; тогда в силу (1) имеем

$$(4) \qquad G = G' \dotplus J_r\,.$$

Имея в виду последнее прямое разложение (4), можем выразить каждый элемент y_i $(i = 1, \ldots, s)$ в виде суммы

$$y_i = y'_i + x_i, \quad \text{где} \quad y'_i \in G',\ x_i \in J_r \quad (i = 1, \ldots, s)\,.$$

В дальнейшем будем различать два случая.

а) Пусть $x_i = \mathbf{O}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Тогда будет $y_i = y'_i \in G'$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, или, $U \subseteq G'$. Но это значит, что

$$(5) \qquad G^* = G/U = (G' \dotplus J_r)/U \cong G'/U \dotplus J_r\,.$$

По индуктивному предположению имеем

$$(6) \qquad G'/U = J_1^* \dotplus \ldots \dotplus J_{t-1}^* \dotplus P^*\,,$$

где $J_j^* \cong J_{i_j}(j = 1, \ldots, t - 1)$ и i_j – подходящие индексы, $1 \leqq i_1 < \ldots < i_{t-1} \leqq \leqq r - 1$. Таким образом мы доказали, что для фактор-группы $G^* = G/U$ утверждение нашей теоремы справедливо (см. соотношение (5) и (6)).

б) Пусть среди элементов x_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ существуют ненулевые. Но тогда можно элементы $y_i \in H$ $(i = 1, \ldots, s)$ (от которых мы требуем только их линейную независимость) определить таким образом, чтобы ненулевым был только один элемент x_i $(1 \leqq i \leqq s)$; можно предполагать, что будет в точности $x_1 = x_2 = \ldots = x_{s-1} = \mathbf{O}$, $x_s \neq \mathbf{O}$. Итак, имеем

$$(7) \qquad \begin{cases} y_i = y'_i \in G' \quad (i = 1, \ldots, s - 1)\,, \\ y_s = y'_s + x_s,\ x_s \in J_r,\ x_s \neq \mathbf{O}\,. \end{cases}$$

Символом $\mathscr{S}(y_s)$ обозначим наименьшую сервантную подгруппу группы G, содержащую элемент y_s, и построим подгруппу $K = \{G', \mathscr{S}(y_s)\}$. Так как G' и $\mathscr{S}(y_s)$ – сервантные подгруппы группы G и притом $\mathscr{S}(y_s)$ – группа ранга 1, то или $\mathscr{S}(y_s) \subseteq G'$, или же $G' \cap \mathscr{S}(y_s) = (\mathbf{O})$. Но так как $y_s \notin G'$ (см. (7)), то должен наступить второй случай: $G' \cap \mathscr{S}(y_s) = (\mathbf{O})$. Это значит, что

$$(8) \qquad K = \{G',\ \mathscr{S}(y_s)\} = G' \dotplus \mathscr{S}(y_s)\,.$$

Если положим $U' = \{y_1\} \dotplus \ldots \dotplus \{y_{s-1}\}$, то будет $U' \subseteq G'$, значит, имеет место соотношение

$$(9) \qquad K/U \cong G'/U' \dotplus \mathscr{S}(y_s)/\{y_s\}\,.$$

К группе G' и её подгруппе U' можно применить индуктивное предположение, значит, из изоморфизма (9) следует соотношение

$$(10) \qquad K/U = K^* = J_1^* \dotplus \ldots \dotplus J_t^* \dotplus Q^*,$$

где $J_j^* \cong J_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, t)$, $1 \leqq i_1 < \ldots < i_t \leqq r - 1$, и Q^* – периодическая часть группы $K^* = K/U$. По второй теореме об изоморфизме имеем

$$(11) \qquad G^*/K^* = (G/U)/(K/U) \cong G/K,$$

т. е. группа G^*, структуру которой мы хотим определить, является расширением группы K^* при помощи группы G/K.

Из соотношений (8) и (4) следует, что $G = \{K, J_r\}$, следовательно, по первой теореме об изоморфизме имеем

$$(12) \qquad G/K = \{K, J_r\}/K \cong J_r/(J_r \cap K).$$

Теперь положим $J_r' = J_r \cap K$ и докажем, что $J_r' \neq (\mathbf{O})$ и что имеет место равенство $typ\, J_r' = typ\, J_r$.

Если $J_r' \times (\mathbf{O})$ (это вскоре докажем), то из соотношения $J_r' \subseteq J_r$ следует, что

$$(13) \qquad typ\, J_r' \leqq typ\, J_r.$$

По предположению $y_s = y_s' + x_s$ (см. (7)), где $y_s' \in G'$, $x_s \in J_r$ и $x_s \neq \mathbf{O}$. Если $y_s' = \mathbf{O}$, или $y_s = x_s$, то $\mathscr{R}(y_s; G) = \mathscr{R}(x_s; G)$, итак, в частности будет

$$(14) \qquad \mathscr{R}(y_s; G) \cong \mathscr{R}(x_s; G) \cong \mathscr{R}(x_s; G)\, x_s = J_r.$$

Но если $y_s' \neq \mathbf{O}$, то для сервантной подгруппы $\mathscr{S}(y_s')$ группы G, являющейся также сервантной подгруппой группы G', в силу соотношения (3) будет

$$typ\, \mathscr{S}(y_s') \geqq typ\, J_{r-1} \geqq typ\, J_r,$$

или также

$$typ\, \mathscr{R}(y_s'; G) \geqq typ\, \mathscr{R}(x_s; G).$$

Отсюда следует равенство

$$(15) \qquad typ\, (\mathscr{R}(y_s'; G) \cap \mathscr{R}(x_s; G)) = typ\, \mathscr{R}(x_s; G).$$

Так как $y_s = y_s' + x_s$, где $\mathbf{O} \neq y_s' \in G'$ и $\mathbf{O} \neq x_s \in J_r$, и так имеет место прямое разложение (4), то, в силу сказанного в начале статьи, должно быть

$$(16) \qquad \mathscr{R}(y_s; G) = \mathscr{R}(y_s'; G) \cap \mathscr{R}(x_s; G).$$

Из соотношений (16) и (15) уже следует равенство

$$typ\, \mathscr{R}(y_s; G) = typ\, \mathscr{R}(x_s; G) = typ\, J_r;$$

значит, в этом случае также имеет место изоморфизм (14).

Далее, в каждом случае справедливо включение $\mathscr{R}(y_s; G) \subseteq \mathscr{R}(x_s; G)$ (если $y_s' \neq \mathbf{O}$, то смотри (16)), т. е. имеем

$$(17) \qquad \mathscr{R}(y_s; G)\, x_s \subseteq \mathscr{R}(x_s; G)\, x_s = J_r.$$

Если $\varrho \in \mathscr{R}(y_s; G)$ произвольно, то всегда существует в группе G элемент $\varrho y'_s$ (если $y'_s \neq \mathbf{O}$, то смотри (16)); притом, так как $y'_s \in G'$ и G' — сервантная подгруппа в G', должно быть $\varrho y'_s \in \mathscr{S}(y'_s) \subseteq G' \subseteq K$. Одновременно существует в G элемент ϱx_s (см. (17)), и мы можем писать $\varrho y_s = \varrho y'_s + \varrho x_s$, или же $\varrho x_s = \varrho y_s - \varrho y'_s$. Но так как

$$\varrho y_s \in \mathscr{S}(y_s) \subseteq K, \quad \varrho y'_s \in G' \subseteq K,$$

то должно быть $\varrho x_s = (\varrho y_s - \varrho y'_s) \in K$. Но этим мы доказали соотношение

$$\mathscr{R}(y_s; G)\, x_s \subseteq K. \tag{18}$$

Из формул (17) и (18) следует, что

$$\mathscr{R}(y_s; G)\, x_s \subseteq J_r \cap K = J'_r. \tag{19}$$

Из (14) и (19) прежде всего следует, что, действительно, $J'_r \neq (\mathbf{O})$ и что справедливо неравенство

$$typ\, J_r = typ\, \mathscr{R}(y_s; G)\, x_s \leqq typ\, J'_r. \tag{20}$$

Но в силу (13) и (20) должно быть $J'_r \cong J_r$. Так как $J'_r \subseteq J_r$, то из изоморфизма $J'_r \cong J_r$ легко вывести, что фактор-группа $J_r/J'_r = J_r(J_r \cap K)$ является конечной (смотри [3], конец отдела 42). Отсюда и из соотношений (12) и (13) следует, что группа $G^* = G/U$ является расширением группы $K^* = K/U$ при помощи конечной группы. Воспользовавшись вспомогательной теоремой, можем в силу соотношения (10) писать

$$G/U = G^* = A^* \dotplus P^*,$$

где P^* — периодическая часть группы G^* и

$$A^* \cong J^*_1 \dotplus \ldots \dotplus J^*_t.$$

Если припомним результаты, которые мы получили как в части а), так в части б) этого доказательства, то можем высказать следующее утверждение: В подгруппе H ранга s можно найти свободную подгруппу U того же ранга s так, что

$$G/U = G^* = J^*_1 \dotplus \ldots \dotplus J^*_t \dotplus P^*, \tag{21}$$

где P^* — периодическая часть группы G^* и $t = r - s$; притом существуют индексы $1 \leqq i_1 < \ldots < i_t \leqq r$ такие, что $J^*_j \cong J_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, t)$.

Теперь по второй теореме об изоморфизме имеем

$$G/H \cong (G/U)/(H/U) = G^*/H^*, \tag{22}$$

где полагаем $H^* = H/U$. Так как группа U обладает тем же рангом, как группа H, то, необходимо, фактор-группа $H^* = H/U$ должна быть группой периодической, или же $H^* \subseteq P^*$. Таким образом из (22) и (21) получим соотношение

$$G/H \cong G^*/H^* \cong J^*_1 \dotplus \ldots \dotplus J^*_t \dotplus P^*/H^*,$$

и этим доказано, что фактор-группа G/H обладает всеми требуемыми свойствами.

Этим доказательство теоремы методом полной индукции завершено.

Непосредственным следствием теоремы 1 служит следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — тотально $\mathfrak{K}$-разложимая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть (1) — какое-то ее тотальное разложение. Если H — произвольная сервантная подгруппа группы G ранга $s < r$, то фактор-группа $\tilde{G} = G/H$ также является тотально $\mathfrak{K}$-разложимой группой без кручения ранга $t = r - s$; притом, если*

$$\tilde{G} = \tilde{J}_1 \dotplus \tilde{J}_2 \dotplus \ldots \dotplus \tilde{J}_t$$

— некоторое тотальное разложение группы $\tilde{G}$, то существуют индексы i_j, $1 \leqq i_1 < \ldots < i_t \leqq r$, такие, что $\tilde{J}_j \cong J_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, t)$.

Замечание. Предположение о конечности ранга группы G в предшествующих теоремах является необходимым, так как теорема 1 не будет уже справедливой для свободных групп бесконечного ранга. Для групп без кручения произвольного ранга можно, в силу теорем 1, 2, высказать следующее утверждение:

Пусть G — тотально $\mathfrak{K}$-разложимая группа без кручения и пусть H — — произвольная её подгруппа конечного ранга. Тогда фактор-группа $\tilde{G} = G/H$ расщепляема, и притом, если $\tilde{G} = \tilde{A} \dotplus \tilde{P}$ — некоторое прямое разложение группы $\tilde{G}$, где $\tilde{P}$ — периодическая часть группы $\tilde{G}$, то группа $\tilde{A}$ или будет нулевой, или же будет тотально $\mathfrak{K}$-разложимой группой без кручения.

Литература

[1] *Л. Прохазка:* К проблеме расщепления абелевских расширений расщепляемых абелевых групп. Чех. мат. ж. *11* (*86*), 1961, 365—380.

[2] *Л. Прохазка:* О расщепляемости фактор-групп абелевых групп без кручения конечного ранга. Чех. мат. ж. *11* (*86*), 1961, 521—557.

[3] *L. Fuchs:* Abelian groups. Budapest, 1958.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ÜBER DIE STRUKTUR DER FAKTORGRUPPEN TORSIONSFREIER ABELSCHEN GRUPPEN VON ENDLICHEM RANGE

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

Zuerst bemerken wir, dass das Wort Gruppe immer eine abelsche Gruppe bedeuten wird.

Eine torsionsfreie Gruppe G heisst total $\mathfrak{R}$-reduzibel, wenn sie als eine direkte Summe von Untergruppen vom Range 1 ausgedrückt werden kann, $G = \sum_{\iota \in I}{}_d J_\iota$, $r(J_\iota) = 1$ $(\iota \in I)$, und wenn alle Type *typ* J_ι von Gruppen $J_\iota (\iota \in I)$ eine Kette bilden (hinsichtlich der Halbordnung der Menge aller Typen torsionsfreier Gruppen vom Range 1). In der vorliegenden Arbeit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *G sei eine torsionsfreie total $\mathfrak{R}$-reduzible Gruppe von endlichem Range $r \geqq 1$ und es sei (1) eine ihre totale Zerlegung. Wenn H eine beliebige Untergruppe der Gruppe G vom Range $s < r$ ist, dann ist die Faktorgruppe $\tilde{G} = G/H$ spaltbar; ist dabei $\tilde{G} = \tilde{A} \dotplus \tilde{P}$ eine direkte Summe der Gruppe $\tilde{G}$, wo $\tilde{P}$ die maximale periodische Untergruppe der Gruppe $\tilde{G}$ bedeutet, so ist $\tilde{A}$ eine torsionsfreie total $\mathfrak{R}$-reduzible Gruppe vom Range $t = r - s$,*

$$\tilde{A} = \tilde{J}_1 \dotplus \tilde{J}_2 \dotplus \ldots \dotplus \tilde{J}_t,$$

und man kann solche Indizen $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leqq r$ finden, dass die Relationen $\tilde{J}_j \cong J_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, t)$ gelten.