Miloslav Jůza

Le système complet d'invariants d'un monosystème à trois dimensions dans L'espace euclidien à cinq dimensions

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 3, 401–403

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100527`

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

LE SYSTEME COMPLET D'INVARIANTS D'UN MONOSYSTEME A TROIS DIMENSIONS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN A CINQ DIMENSIONS

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 28 juillet 1960)

Dans cet article, on construit le système complet d'invariants d'une variété formée d'un système monoparamétrique de plans dans $\boldsymbol{E}_5$.

Soit donnée, dans l'espace euclidien à cinq dimensions $\boldsymbol{E}_5$, une variété formée d'un système monoparamétrique de plans $[A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)]$ où $\boldsymbol{u}_i(t)\,\boldsymbol{u}_j(t) = \delta_{ij}$. Une telle variété sera appelée *monosystème.*[1]) Supposons que notre monosystème soit *non-développable*, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \qquad [A', \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2] \neq 0\,.$$

Soit $\boldsymbol{A}_4(t)$ l'espace vectoriel $[\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{u}'_1(t), \boldsymbol{u}'_2(t)]$ qui est indépendant du choix des bases $\{\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)\}$ des plans générateurs du monosystème, soit $\boldsymbol{A}_2(t)$ le sous-espace à deux dimensions de l'espace $\boldsymbol{A}_4(t)$, totalement orthogonal à $[\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)]$.

Si nous écrivons maintenant

$$(2) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{u}'_1(t_0) &= a_1\boldsymbol{u}_1(t_0) + b_1\boldsymbol{u}_2(t_0) + \boldsymbol{k}_1\,, \quad \boldsymbol{k}_1 \in \boldsymbol{A}_2(t_0)\,,\\ \boldsymbol{u}'_2(t_0) &= a_2\boldsymbol{u}_1(t_0) + b_2\boldsymbol{u}_2(t_0) + \boldsymbol{k}_2\,, \quad \boldsymbol{k}_2 \in \boldsymbol{A}_2(t_0)\,, \end{aligned}$$

les vecteurs $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ seront déterminés d'une manière univoque. Pour le vecteur

$$(3) \qquad \boldsymbol{v}(t) = \alpha(t)\,\boldsymbol{u}_1(t) + \beta(t)\,\boldsymbol{u}_2(t)$$

nous avons alors

$$(4) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{v}'(t_0) &= (.)\,\boldsymbol{u}_1(t_0) + (.)\,\boldsymbol{u}_2(t_0) + \alpha(t_0)\,\boldsymbol{k}_1 + \beta(t_0)\,\boldsymbol{k}_2 =\\ &= (.)\,\boldsymbol{u}_1(t_0) + (.)\,\boldsymbol{u}_2(t_0) + \boldsymbol{k}\,, \quad \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{A}_2(t_0)\,. \end{aligned}$$

Le vecteur $\boldsymbol{k}$, c'est-à-dire la projection du vecteur $\boldsymbol{v}'(t_0)$ dans l'espace $\boldsymbol{A}_2(t_0)$ est donc déterminé univoquement par les nombres $\alpha(t_0)$, $\beta(t_0)$. Pour la grandeur du vecteur $\boldsymbol{k}$ on a

$$(5) \qquad |\boldsymbol{k}| = \alpha^2(t_0)\,\boldsymbol{k}_1^2 + 2\alpha(t_0)\,\beta(t_0)\,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 + \beta^2(t_0)\,\boldsymbol{k}_2^2\,.$$

---

[1]) Voir [3], [4], [5].

Nous allons nous borner maintenant aux vecteurs $\boldsymbol{v}$ de longueur 1, pour lesquels on a $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Si nous écartons encore le cas où

$$(6) \qquad \boldsymbol{k}_1^2 = \boldsymbol{k}_2^2\,, \quad \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 = 0\,,$$

il existe des vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ tels que $|\boldsymbol{k}|$ pour $\boldsymbol{v}_1$ sera minimum et $|\boldsymbol{k}|$ pour $\boldsymbol{v}_2$ sera maximum, ces vecteurs sont déterminés au sens près et l'on a $\boldsymbol{v}_1'\boldsymbol{v}_2' = 0$. La direction du vecteur $\boldsymbol{v}_1$ sera appelée *direction minimale*, celle du vecteur $\boldsymbol{v}_2$ *direction maximale* du plan générateur $[A(t_0), \boldsymbol{u}_1(t_0), \boldsymbol{u}_2(t_0)]$.

A présent, nous choisissons un système de bases $\{A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)\}$ du monosystème tel que $A(t)$ soit la ligne de striction,[2] $\boldsymbol{u}_1(t)$ un vecteur-unité de direction minimale et $\boldsymbol{u}_2(t)$ un vecteur-unité de direction maximale. Pour le repère mobile de l'espace $\boldsymbol{E}_5$ entier nous prenons $\{A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_5(t)\}$ où $\boldsymbol{u}_3(t)$ est un vecteur-unité de direction de la projection du vecteur $\boldsymbol{u}_1'(t)$ dans l'espace $\boldsymbol{A}_2(t)$, $\boldsymbol{u}_4(t)$ un vecteur-unité de direction de la projection du vecteur $\boldsymbol{u}_2(t)$ dans l'espace $\boldsymbol{A}_2(t)$, $\boldsymbol{u}_5(t)$ est un vecteur-unité orthogonal à tous les vecteurs $\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_4(t)$. Pour le paramètre t nous choisissons l'arc de la ligne de striction, de sorte que nous aurons $|A'(t)| = 1$. Le repère en question n'est pas encore déterminé sans ambiguité, car nous n'avons pas choisi le sens des vecteurs $\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_5(t)$. Néanmoins nous avons

$$(7) \qquad \begin{aligned}
A' &= p_1\boldsymbol{u}_1 + p_2\boldsymbol{u}_2 + \varepsilon(1 - p_1^2 - p_2^2)^{1/2}\,\boldsymbol{u}_5, \quad \varepsilon = \pm 1,\\
\boldsymbol{u}_1' &= q\boldsymbol{u}_2 + c_1\boldsymbol{u}_3,\\
\boldsymbol{u}_2' &= -q\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_4,\\
\boldsymbol{u}_3' &= -c_1\boldsymbol{u}_1 + r\boldsymbol{u}_4 + s_1\boldsymbol{u}_5,\\
\boldsymbol{u}_4' &= -c_2\boldsymbol{u}_2 - r\boldsymbol{u}_3 + s_2\boldsymbol{u}_5,\\
\boldsymbol{u}_5' &= -s_1\boldsymbol{u}_3 - s_2\boldsymbol{u}_4.
\end{aligned}$$

Si nous nous bornons maintenant au cas où $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, nous pouvons orienter les vecteurs $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_5$ de telle façon que nous ayons

$$(8) \qquad p_1 > 0,\ p_2 > 0,\ \varepsilon = 1,\ c_1 > 0,\ c_2 > 0\,.$$

L'orientation du repère sera alors déterminée sans ambiguïté si l'on se donne le sens dans lequel le paramètre t parcourt la ligne de striction; les fonctions

$$(9) \qquad p_1,\ p_2,\ q,\ c_1,\ c_2,\ r,\ s_1,\ s_2$$

seront alors les invariants du monosystème. Remarquons encore que dans nos hypothèses nous avons toujours

$$(10) \qquad p_1 < 1\,, \quad p_2 < 1\,, \quad c_1 < c_2\,.$$

Par contre, il est évident que, étant donné les fonctions (9) vérifiant (8) et (10), le monosystème vérifiant (1) et (6) est par là déterminé à l'aide des équations (7); il est unique à des transformations euclidiennes près.

---

[2]) Voir [4].

Littérature

[1] *E. Čech:* Une méthode nouvelle dans la géometrie projective des surfaces réglées. Čas. pro pěst. mat. a fys., *53* (1924), 31—37 (en tchèque avec un résumé français).

[2] *J. Favard:* Cours de géométrie différentielle locale. Paris 1957.

[3] *M. Jůza:* Sur les variétés représentant une généralisation des surfaces réglées. Чех. мат. журн. *10* (*85*), 1960, 440—456.

[4] *M. Jůza:* Ligne de striction sur une généralisation a plusiers dimensions d'une surface réglée. Чех. мат. журн. *12* (*87*), 1962, 243—250.

[5] *C. Segre:* Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi. Rend. circ. Mat. Palermo, *30* (1910), 87—121.

Резюме

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ИНВАРИАНТОВ МОНОСИСТЕМЫ РАЗМЕРНОСТИ 3 В ПЯТИМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

МИЛОСЛАВ ЮЗА (Miloslav Jůza), Прага

В пятимерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}_5$ возьмем многообразие, образованное однопараметрической системой плоскостей $[A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)]$, $\boldsymbol{u}_i(t)\, \boldsymbol{u}_j(t) = \delta_{ij}$, которое мы будем называть *моносистемой*. Тогда при надлежащем выборе базисов $\{A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)\}$ образующих плоскостей можно, в общем случае, выбрать в пространстве E_5 подвижной репер $\{A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_5(t)\}$ так, чтобы имели место соотношения (7), (8) и (10). Система функций (9) будет тогда полной системой инвариантов моносистемы.