Čestmír Vitner

Дифференциальная геометрия гиперповерхностей в центроевклидовом пространстве E_n^C

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 2, 231–242

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100512

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В ЦЕНТРОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_n^C

ЧЕСТМИР ВИТНЕР (Čestmír Vitner), Прага

(Поступило в редакцию 1/VI 1960 г.)

В работе вводятся основные объекты дифференциальной геометрии гиперповерхностей в центроевклидовом пространстве. Показано, что гиперповерхность однозначно определяется, с точностью до центроевклидовых движений, расстоянием от начала ϱ и первым центроевклидовым тензором a_{ik}. В работе вводится еще второй центроевклидовый тензор $\varrho_i \varrho_k$, и отыскиваются направления, в которых инвариант $1/{}^{\rho}\omega_1$ в точке гиперповерхности принимает экстремальное значение. Далее в работе указана связь между изложенной центроевклидовой теорией и теориями евклидовой и центроаффинной. В конце приводится несколько замечаний о поверхностях в трехмерном пространстве E_3^C.

1. ЦЕНТРОЕВКЛИДОВА ТЕОРИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть мы имеем регулярную гиперповерхность в E_n^C, которая не проходит через начало и касательная гиперплоскость которой ни в какой точке не проходит через начало пространства. Гиперповерхность можно задать параметрически, выразив радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ через параметры ξ^i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}) . \tag{1,1}$$

У векторной функции (1,1) мы будем предполагать существование непрерывных частных производных до третьего порядка включительно. Эти производные мы обозначим сокращенно при помощи индексов: $\partial \boldsymbol{r}/\partial \xi^i = \boldsymbol{r}_i$, $\partial^2 \boldsymbol{r}/\partial \xi^i \, \partial \xi^k = \boldsymbol{r}_{ik}$ и т. д.

Упомянутое условие регулярности говорит, что для векторного произведения $\boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{r}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{r}_{n-1}$ имеет место соотношение

$$|\boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{r}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{r}_{n-1}| \neq 0 . \tag{1,2}$$

Условие, что касательная гиперплоскость не проходит через начало пространства, говорит, что для определителя $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_{n-1}]$ имеет место

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_{n-1}] \neq 0 . \tag{1,3}$$

Обозначив $|\boldsymbol{r}| = \varrho$, можно писать

$$\boldsymbol{r} = \varrho \boldsymbol{a} \tag{1,4}$$

где $\boldsymbol{a}$ — единичный вектор, параллельный радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$ и обращенный в ту же сторону, и, очевидно, $\varrho > 0$. Одновременно с гиперповерхностью $\boldsymbol{r}$ можно, следовательно, рассматривать единичную гиперсферу $\boldsymbol{a}$, параметризация которой $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$, также регулярна. Эту единичную гиперсферу мы будем называть *индикатрисей* гиперповерхности $\boldsymbol{r}$.

Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\xi^1(t), \ldots, \xi^{n-1}(t))$ — кривая на гиперповерхности. (Мы предполагаем, что вектор $\mathrm{d}\xi^i/\mathrm{d}t$ на гиперповерхности отличен от нуля.) Рассмотрим на этой кривой центроевклидову дугу φ (см. [1]). Для нее

$$\mathrm{d}\varphi^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{a} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{a} \,. \tag{1,5}$$

Центроевклидова дуга является ввиду (1.5) обычной евклидовой дугой на кривой $\boldsymbol{a}(\xi^1(t), \ldots, \xi^{n-1}(t))$, которая получается путем проектирования кривой $\boldsymbol{r}(t)$ из центра пространства на индикатрису гиперповерхности.

Формулы (1,5) можно переписать в виде

$$\mathrm{d}\varphi^2 = \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j \,\mathrm{d}\xi^i \,\mathrm{d}\xi^j = a_{ij} \,\mathrm{d}\xi^i \,\mathrm{d}\xi^j \,, \tag{1,6}$$

где a_{ij} — очевидно, составляющие квадратичного, ковариантного, симметричного положительно-определенного тензора на гиперповерхности $\boldsymbol{r}(\xi)$. Этот тензор можно также истолковать как первый евклидов тензор на индикатрисе $\boldsymbol{a}(\xi)$. Тензор a_{ik} мы будем называть *первым центроевклидовым тензором* гиперповерхности $\boldsymbol{r}(\xi)$, а форму $\mathrm{d}\varphi^2$ — *первой центроевклидовой формой* гиперповерхнпсти $\boldsymbol{r}(\xi)$.

При помощи тензора a_{ik} можно дать определение *центроевклидовой длиы и центроевклидовой перпендикулярности* векторов в касательной гиперплоскости.

Рассмотрим теперь, кроме гиперповерхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\xi)$, другую гиперповерхность $\boldsymbol{R}$, которую отнесем к той же системе параметров:

$$\boldsymbol{R} = g(\xi)\, \boldsymbol{r}(\xi) \,, \quad g(\xi) > 0 \,. \tag{1,7}$$

Этим дано отображение поверхностей $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{R}$ друг на друга такое, что точки на тех же полупрямых, проходящих через центр пространства, соответствуют одна другой. В соответственных точках эти две поверхности имеют, очевидно, тот же центроевклидовый тензор — тот же самый, как и их общая индикатриса $\boldsymbol{a}(\xi)$. Поверхности $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{R}$ отличаются, конечно, своим расстоянием от начала пространства.

Дискриминант формы $\mathrm{d}\varphi^2$ обозначим через

$$a = |\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_{n-1}| \,. \tag{1,8}$$

Вектор $\boldsymbol{a}$ является, очевидно, единичным вектором нормали к индикатрисе гиперповерхности; для него имеет место

$$(1,9) \qquad \boldsymbol{a} = \varepsilon \frac{\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_{n-1}}{a},$$

где $\varepsilon = 1$, если вектор $\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_{n-1}$ ориентирован одинаково с вектором $\boldsymbol{a}$, $\varepsilon = -1$ при противоположной ориентации. Из формулы (1,9) получаем непосредственно

$$(1,10) \qquad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_{n-1}) = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}] = \varepsilon a\,.$$

Для ε можно, следовательно, написать

$$(1,11) \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}]\,.$$

Из формулы $\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{a} = 1$ получим последовательным дифференцированием

$$(1,12) \qquad \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_i = 0\,,$$

$$(1,13) \qquad \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = -\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_{ij}\,.$$

Для векторов $\boldsymbol{a}_{ij}$ можно написать в базисе $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}$

$$(1,14) \qquad \boldsymbol{a}_{ij} = \gamma^k_{ij}\boldsymbol{a}_k + b_{ij}\boldsymbol{a}\,,$$

где γ^k_{ij} – символы Христоффеля, b_{ij} – второй основной тензор в евклидовой геометрии на гиперсфере. Если определить вектор $\boldsymbol{a}^k$ соотношением $\boldsymbol{a}^k = \boldsymbol{a}_i a^{ik}$, где a^{ik} дано соотношением $a_{ik}a^{kj} = \delta^j_i$, то получим для γ^k_{ij}

$$(1,15) \qquad \gamma^k_{ij} = \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{a}^k\,.$$

Кроме того имеют место обычные формулы

$$(1,16) \qquad \gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} a^{kl}\left(\frac{\partial a_{jl}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial \xi^l}\right).$$

Для b_{ij} имеет место $b_{ij} = \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{a} = -a_{ij}$. Итак, уравнение (1,14) можно переписать в виде

$$(1,17) \qquad \boldsymbol{a}_{ij} = \gamma^k_{ij}\boldsymbol{a}_k - a_{ij}\boldsymbol{a}\,.$$

Объект γ^k_{ij}, рассматриваемый в связи с гиперповерхностью $\boldsymbol{r}(\xi)$, мы будем ввиду (1,16) называть *центроевклидовой* связностью на гиперповерхности $\boldsymbol{r}(\xi)$.

При помощи связности γ^k_{ij} можно определить тензор кривизны

$$(1,18) \qquad k^i_{jns} = \frac{\partial}{\partial \xi^r}\gamma^i_{sj} - \frac{\partial}{\partial \xi^j}\gamma^i_{sr} - \gamma^i_{lj}\gamma^l_{sr} + \gamma^l_{sj}\gamma^i_{lr}\,,$$

причем для тензора

$$(1,19) \qquad k_{ijrs} = k^l_{ijr}a_{ls}$$

имеет место равенство

$$k_{ijrs} = a_{ir}a_{js} - a_{is}a_{jr} \,. \tag{1,20}$$

Как известно, уравнения (1,20) являются условиями интегрируемости следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных (представляющих собой иную транскрипцию уравнений (1,17))

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} \boldsymbol{a}_j = \gamma^k_{ij}\boldsymbol{a}_k - a_{ij}\boldsymbol{a} \,. \tag{1,21}$$

Отсюда следует (зт. наз. построение Бонне для гиперповерхности), что гиперсфера $\boldsymbol{a}$ однозначно определяется первым евклидовым тензором a_{ik} (удовлетворяющим условию (1,20)) с точностью до евклидовых движений; радиус-вектор $\boldsymbol{a}$ определяется однозначно с точностью до движений центроевклидовых. Из радиуса-вектора $\boldsymbol{a}$ далее получаем гиперповерхность $\boldsymbol{r}$ при помощи соотношения $\boldsymbol{r} = \varrho\boldsymbol{a}$.

Из предыдущих рассуждений непосредственно следует доказательство основной теоремы центроевклидовой теории гиперповерхностией.

Теорема 1,1. *Пусть функции* $\varrho(\xi)$, $a_{ij}(\xi)$ *обладают непрерывными частичыми производными до третьего порядка включительно и удовлетворяют следующим условиям*: а) $\varrho(\xi) > 0$, б) *матрица* $a_{ij}(\xi)$ *положительно определена*, в) *функции* k_{ijrs}, *определенные уравнениями* (1,16), (1,18) *и* (1,19) *удовлетворяют условиям* (1,20). *Тогда с точностью до центроевклидовых движений существует одна единственная гиперповерхность, для которой* ϱ *является расстоянием от начала, а* a_{ij} *— первым центроевклидовым тензором.*

Помимо первой центроевклидовой формы $d\varphi^2$ можно ввести в рассмотрение еще вторую центроевклидову форму

$$d\varrho^2 = \varrho_i\varrho_j \, d\xi^i \, d\xi^j \,. \tag{1,22}$$

Эта форма является, очевидно, сингулярной ранга 1. Если в точке гиперповерхности имеет тождественно место $d\varrho^2 = 0$, то есть $\varrho_i = 0$ для $i = 1, \ldots, n-1$, то мы ее называем *сферической точкой* гиперповерхности. Если все точки гиперповерхности — сферические, то поверхность будет, очевидно, гиперсферой с центром в начале пространства. В дальнейшем мы исключим такие точки из наших рассуждений.

Для кривой на гиперповерхности имеет, согласно [1], место

$$\left|\frac{d\varrho}{d\varphi}\right| = \varrho \, |\mathrm{cotg}\, \alpha| = \frac{1}{{}^{\rho}\omega_1} \,, \tag{1,23}$$

где α — угол радиуса-вектора с касательной к кривой (мы допускаем и возможность $1/{}^{\rho}\omega_1 = 0$). Этот инвариант зависит, очевидно, от направления касательной, а не от самой кривой.

Теперь мы будем искать направления u^i на поверхности, для которых инвариант $1/{}^\rho\omega_1$ принимает экстремальные значения. Ввиду того, что ${}^\rho\omega_1 > 0$, достаточно исследовать вопрос, когда принимает экстремальные значения квадрат

$$\frac{1}{{}^\rho\omega_1^2} = \frac{\varrho_i\varrho_k u^i u^k}{a_{ik}u^i u^k}\,.$$

Притом можно ограничиться единичными в центроевклидовом смысле векторами, т. е. векторами, удовлетворяющими условию $a_{ij}u^i u^j = 1$. Итак, задача сводится к отысканию экстремума функции $\varrho_i\varrho_k u^i u^k$ при дополнительном условии $a_{ik}u^i u^k = 1$. Ввиду положительной определенности формы $\mathrm{d}\varphi^2$ множество векторов, удовлетворяющих условию $a_{ik}u^i u^k = 1$ в точке поверхности, компактно. Так как, далее, исследуемая функция $\varrho_i\varrho_k u^i u^k$ переменных u^i непрерывна, то существование экстремальных значений обеспечено. Следовательно, достаточно отыскать „стационарные векторы". Используем для этой цели метод Лагранжа. Положим

$$\Omega = \varrho_i\varrho_k u^i u^k - \lambda\left(a_{ik}u^i u^k - 1\right).$$

Для стационарных точек должно иметь место $\partial\Omega/\partial u^j = 0$. Несложными выкладками обнаружим, что

$$(1{,}24) \qquad \left(\varrho_i\varrho_j - \lambda a_{ij}\right) u^j = 0\,.$$

Это — однородная система, обладающая нетривиальным решением лишь в случае

$$(1{,}25) \qquad \left|\varrho_i\varrho_j - \lambda a_{ij}\right| = 0\,.$$

Если λ — решение уравнения (1,25), то согласно (1,24) для соответственного стационарного вектора u^i имеет, очевидно, место

$$(1{,}26) \qquad \varrho_i\varrho_j u^j = \lambda a_{ij}u^j\,.$$

Умножая на u^j и складывая, мы получим отсюда, ввиду соотношения $a_{ij}u^i u^j = 1$,

$$\lambda = \varrho_i\varrho_j u^i u^j\,.$$

Итак, для соответственного параметра

$$(1{,}27) \qquad \lambda = \frac{1}{{}^\rho\omega_1^2}\,,$$

где ${}^\rho\omega_1$ — инвариант в рассматримаемом направлении. Нетрудно видеть, что *стационарные направления, соответствующие двум различным корням уравнения* (1,25), *являются сопряженными относительно обоих тензоров* $\varrho_i\varrho_j$ *и* a_{ij}.

Действительно,

$$\varrho_i\varrho_j \underset{1}{u^i} = \lambda_1 a_{ij}\underset{1}{u^i}\,, \quad \varrho_i\varrho_j \underset{2}{u^j} = \lambda_2 a_{ij}\underset{2}{u^j}\,.$$

Умножением первого уравнения на $\underset{2}{u}^j$, второго — на $\underset{1}{u}^i$, свертыванием и вычитанием полученных уравнений мы убеждаемся, что $(\lambda_2 - \lambda_1)\, a_{ij}\underset{1}{u}^i\underset{2}{u}^j = 0$, т. е. $a_{ij}\underset{1}{u}^i\underset{2}{u}^j = 0$, что и доказывает сопряженность относительно тензора a_{ij}. Сопряженность относительно тензора $\varrho_i\varrho_j$ следует отсюда непосредственно в силу уравнений (1,24).

Путем несложных рассуждений мы обнаружим, что уравнение (1,25) сводится к

$$(1{,}28) \qquad (-\lambda)^{n-2}\, \varrho_i\varrho_k a^{ik} a + (-\lambda)^{n-1}\, a = 0\,,$$

то есть

$$\lambda^{n-2}(\varrho_i\varrho_k a^{ik} - \lambda) = 0\,.$$

Уравнение (1,25) имеет, следовательно, только два различных корня: $(n-2)$-кратный корень $\lambda = 0$ и простой корень $\lambda = \varrho_i\varrho_k a^{ik}$. Второй корень, очевидно, ненулевой, так как положительно определенный тензор a_{ik} и сингулярный тензор $\varrho_i\varrho_k$ не могут быть аполярными. Отсюда следует, что для векторов, соответствующих корню $\lambda = 0$, инвариант $1/^p\omega_1 = \sqrt{\lambda}$ принимает минимальное значение, для векторов же, соответствующих корню $\lambda = \varrho_i\varrho_j a^{ij}$, инвариант $1/^p\omega_1 = \sqrt{\lambda}$ принимает максимальное значение.

Найдем еще эти экстремальные векторы. Однако, мы уже не будем ограничиваться центроевклидовски единичными векторами. Справедливы утверждения: а) *Экстремальные векторы, соответствующие корню $\lambda = 0$, образуют $(n-2)$-мерное подпространство, центроевклидовски перпендикулярное градиенту ϱ_i и являющееся касательным пространством к $(n-2)$-мерному многообразию $\varrho = \text{konst}$ на рассматриваемой гиперповерхности.* б) *Экстремальные векторы, соответствующие корню $\lambda = \varrho_i\varrho_j a^{ij}$, образуют одномерное пространство, параллельное градиенту.*

Доказательство. а) Подставив в уравнение (1,24) $\lambda = 0$, мы получим $\varrho_i\varrho_j u^j = 0$, то есть $\varrho_j u^j = 0$. Отсюда следует утверждение а).

б) Подставив в левую часть уравнения (1,24) $\lambda = \varrho_i\varrho_j a^{ij}$, $u^j = \varrho_k a^{kj}$, нетрудно обнаружить, что градиент удовлетворяет этому уравнению для $\lambda = \varrho_i\varrho_j a^{ij}$. Последнее утверждение об одномерности следует из того, что векторы, соответствующие корням $\lambda = 0$ и $\lambda = \varrho_i\varrho_k a^{ik}$, должны быть центроевклидовски перпендикулярными друг другу, что корню $\lambda = 0$ соответствует $(n-2)$-мерное подпространство, и что градиент ϱ_i является с точностью до параллельных ему векторов единственным вектором, перпендикулярным этому подпространству. Это и требовалось доказать. Полученные результаты можно срезюмировать в виде

Теоремы 1,2. *Инвариант $1/^p\omega_1$ в точке поверхности минимален — равен нулю — для касательных векторов к $(n-2)$-мерноми многообразию $\varrho = \text{konst}$.*

Он будет максимальным для направления, данного градиентом ϱ_i; для $1/{}^{p}\omega_1$ в этом направлении имеет место

$$(1{,}29)\qquad \frac{1}{{}^{p}\omega_1^2} = \varrho_i \varrho_k a^{ik}\,.$$

2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЦЕНТРОЕВКЛИДОВОЙ, ЕВКЛИДОВОЙ И ЦЕНТРОАФФИННОЙ ТЕОРИЯМИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Для того, чтобы установить связь между евклидовой и центроевклидовой теориями гиперповерхностей, выразим прежде всего первую евклидову форму гиперповерхности $\mathrm{d}s^2 = A_{ij}\,\mathrm{d}\xi^i\,\mathrm{d}\xi^j$ при помощи расстояния ϱ от начала пространства и первой центроевклидовой формы гиперповерхности. Справедлива

Теорема 2,1. *Для первой евклидовой формы* $\mathrm{d}s^2$ *гиперповерхности имеет место*

$$(2{,}1)\qquad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\varrho^2 + \varrho^2\,\mathrm{d}\varphi^2\,,$$

что для соответствующих тензоров означает

$$(2{,}2)\qquad A_{ij} = \varrho_i\varrho_j + \varrho^2 a_{ij}\,.$$

Для дискриминанта A тензора A_{ij} имеем

$$(2{,}3)\qquad A = \varrho^{2n-4}(\varrho_i\varrho_k a^{ik} + \varrho^2)\,a\,.$$

Доказательство. Из формулы $\boldsymbol{r} = \varrho\boldsymbol{a}$ получаем дифференцированием

$$(2{,}4)\qquad \boldsymbol{r}_i = \varrho_i\boldsymbol{a} + \varrho\boldsymbol{a}_i\,.$$

Отсюда скалярным умножением $\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j$ тотчас же следует формула (2,2), а, следовательно, и (2,1). Формулу (2,3) можно вывести из (2,2) несложными выкладками, подобно тому, как формула (1,28) была выведена из (1,25).

Замечание 2,1. Из теорем 1,1 и 2,1 следует, что центроевклидова теория поверхностей полностью характеризуется расстоянием ϱ от начала и первым евклидовым тензором вместо первого центроевклидова тензора.

Замечание 2,2. В теореме 1,2 были найдены направления на гиперповерхности, в которых инвариант

$$\frac{1}{{}^{p}\omega_1} = \varrho\,|\mathrm{cotg}\,\alpha| = \left|\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi}\right|$$

принимает экстремальные значения, то есть, собственно говоря, направления, в которых экстремальные значения принимает угол направления на гиперповерхности с радиусом-вектором. Следовательно, в найденных направлениях примет экстремальное значение и инвариант (см. [1])

$$\left|\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{{}^{p}\omega_1}{{}^{p}\omega_1} = |\cos\alpha|\,.$$

Точно так же, как и в § 1, можно показать, что касательные направления многообразия $\varrho = \text{konst}$ на гиперповерхности сопряжены с градиентом ϱ_i относительно евклидова тензора A_{ik}, то есть евклидовски перпендикулярны. Для (минимального) инварианта ${}^s\omega_1/{}^\rho\omega_1$ в направлении градиента тогда легко получить

$$(2{,}5) \qquad \left(\frac{{}^s\omega_1}{{}^\rho\omega_1}\right)^2 = \cos^2 \alpha = \varrho_i \varrho_k A^{ik} \,,$$

где тензор A^{ik} определяется соотношением $A_{ij}A^{jk} = \delta^k_i$.

Установим теперь связь между евклидовой и центроевклидовой связностями Γ^k_{ij}, γ^k_{ij}. Справедлива

Теорема 2.2. *Для евклидовых и центроевклидовых символов Христоффеля второго рода $\Gamma_{ijk} = \Gamma^s_{ij}A_{sk}$, $\gamma_{ijk} = \gamma^s_{ij}a_{sk}$ имеют место формулы*

$$(2{,}6) \qquad \Gamma_{ijk} = (\varrho_{ij} - \varrho a_{ij})\,\varrho_k + \varrho(\varrho_i a_{jk} + \varrho_j a_{ik} + \varrho\gamma_{ijk})\,.$$

Доказательство. Мы будем исходить из формул $\Gamma_{ijk} = \boldsymbol{r}_{ij}\boldsymbol{r}_k$. Для $\boldsymbol{r}_{ij}$ нетрудно получить дифференцированием

$$(2{,}7) \qquad \boldsymbol{r}_{ij} = (\varrho_{ij} - \varrho a_{ij})\,\boldsymbol{a} + \varrho_i \boldsymbol{a}_j + \varrho_j \boldsymbol{a}_i + \varrho\gamma^k_{ij}\boldsymbol{a}_k\,.$$

Помножив скалярно на $\boldsymbol{r}_k = \varrho_k \boldsymbol{a} + \varrho\boldsymbol{a}_k$, мы легко получим доказываемую формулу. ч. т. д.

Из формулы (2,6) мы без труда получили бы умножением на A^{ks} формулы, связывающие Γ^k_{ij} и γ^k_{ij}.

Найдем теперь соотношение между вторым евклидовым тензором B_{ij}, с одной стороны, и расстоянием ϱ и тензором a_{ij}, с другой. Таким образом вопрос о связи между евклидовой и центроевклидовой теориями гиперповерхностей будет решен до конца. Справедлива

Теорема 2,3. *Для второго евклидова тензора B_{ij} имеет место формула*

$$(2{,}8) \qquad B_{ij} = \frac{\varepsilon a \varrho^{n-2}}{A}\,[\varrho(\varrho_{ij} - \varrho a_{ij}) - \varrho_k(\varrho_i\delta^k_j + \varrho_j\delta^k_i + \varrho\gamma^k_{ij})]\,.$$

Доказательство. Мы исходим из определяющего соотношения

$$(2{,}9) \qquad B_{ij} = \frac{1}{A}[\boldsymbol{r}_{ij}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{n-1}]\,.$$

Формулу (2,7) для $\boldsymbol{r}_{ij}$ можно переписать в виде

$$(2{,}10) \qquad \boldsymbol{r}_{ij} = (\varrho_{ij} - \varrho a_{ij})\,\boldsymbol{a} + (\varrho_i\delta^k_j + \varrho_j\delta^k_i + \varrho\gamma^k_{ij})\,\boldsymbol{a}_k\,.$$

Пользуясь для краткости обозначениями

$$(2{,}11) \qquad \varrho_{ij} - \varrho a_{ij} = \alpha_{ij}\,, \quad \varrho_i\delta^k_j + \varrho_j\delta^k_i + \varrho\gamma^k_{ij} = \beta^k_{ij}\,,$$

мы получим из (2,10)

$$[r_{ij}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_k, \ldots, \boldsymbol{r}_{n-1}] =$$
$$= [\alpha_{ij}\boldsymbol{a} + \beta_{ij}^k \boldsymbol{a}_k, \varrho_1 \boldsymbol{a} + \varrho \boldsymbol{a}_1, \ldots, \varrho_k \boldsymbol{a} + \varrho \boldsymbol{a}_k, \ldots, \varrho_{n-1}\boldsymbol{a} + \varrho \boldsymbol{a}_{n-1}] =$$
$$= \alpha_{ij}\varrho^{n-1}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}] + \beta_{ij}^k[\boldsymbol{a}_k, \varrho\boldsymbol{a}_1, \ldots, \varrho\boldsymbol{a}_{k-1}, \varrho_k\boldsymbol{a}, \varrho\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \varrho\boldsymbol{a}_{n-1}] =$$
$$= (\alpha_{ij}\varrho^{n-1} - \beta_{ij}^k\varrho^{n-2}\varrho_k)[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}] .$$

Итак, мы в общем получаем

$$[\boldsymbol{r}_{ij}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{n-1}] = \varepsilon a \varrho^{n-2}(\varrho\alpha_{ij} - \varrho_k\beta_{ij}^k) . \tag{2,12}$$

Из формул (2,9), (2,11) и (2,12) непосредственно следует утверждение теоремы.

Рассмотрим еще связь между центроевклидовой и центроаффинной теориями гиперповерхностей. В центроаффинной теории гиперповерхность снабжена в каждой точке центроевклидовой нормалью $\boldsymbol{r}$. Притом имеет место основное уравнение

$$\boldsymbol{r}_{ij} = C_{ij}^s \boldsymbol{r}_s + g_{ij}\boldsymbol{r} , \tag{2,13}$$

где C_{ij}^s – центроаффинная связность первого рода, а g_{ij} – асимптотический тензор. Как известно, центроаффинная теория гиперповерхностей полностью характеризуется центроаффинной связностью C_{ij}^s (см., напр., П. А. Широков и А. П. Широков: Аффинная дифференциальная геометрия. Москва 1959).

Итак, для установления связи между центроафинной и центроевклидовой теориями гиперповерхностей достаточно выразить центроаффинную связность C_{ij}^k при помощи объектов центроевклидовой теории. Справедлива

Теорема 2,4. *Для центроаффинной связности первого рода C_{ij}^k имеет место*

$$C_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - B^{lk}B_{ij}\,\partial_l \lg|\omega| , \tag{2,14}$$

где

$$\omega = \frac{\varepsilon A}{\varrho^n a} \tag{2,15}$$

а B^{sk} – тензор, взаимный тензору B_{ij} (т. е. $B_{ij}B^{jk} = \delta_i^k$).

Доказательство. Введем вектор

$$\boldsymbol{b} = \omega \boldsymbol{N} , \tag{2,16}$$

где $\boldsymbol{N} = [1/A](\boldsymbol{r}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{r}_{n-1})$ есть единичный вектор евклидовой нормали, так что

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{r} = 1 . \tag{2,17}$$

В силу определения вектора $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{r} = 0 , \tag{2,18}$$

$$\boldsymbol{b}_j\boldsymbol{r}_i = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{r}_{ij} . \tag{2,19}$$

Ввиду условия (2,17) мы получим для скаляра ω после несложных выкладок

$$\frac{\omega[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{n-1}]}{A} = \frac{\omega[\varrho\boldsymbol{a}, \varrho_1\boldsymbol{a} + \varrho\boldsymbol{a}_1, \ldots, \varrho_{n-1}\boldsymbol{a} + \varrho\boldsymbol{a}_{n-1}]}{A} =$$

$$= \frac{\omega\varrho^n\varepsilon a}{A} = 1 \,, \quad \text{то есть} \quad \omega = \frac{\varepsilon A}{\varrho^n a} \,,$$

что представляет собой формулу (2,15) (ω является, очевидно, обратной величиной длины проекции радиуса-вектора на евклидову нормаль).

Из уравнений (2,13), (2,18) и из определения тензора B_{ij} следует прежде всего

(2,20) $$g_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij}\boldsymbol{b} = \omega\boldsymbol{r}_{ij}\boldsymbol{N} = \omega B_{ij} \,.$$

Далее, из уравнения (2,13) следует, с учетом (2,19) и (2,20), $-\boldsymbol{r}_{ij}\boldsymbol{b}_l = C^s_{ij}g_{sl} = \omega C^s_{ij}B_{sl}$. Отсюда следует

$$-\boldsymbol{r}_{ij}(\omega_l\boldsymbol{N} + \omega\boldsymbol{N}_l) = \omega C^s_{ij}B_{sl} \,,$$

что в силу уравнений Гаусса и Вейнгартена дает

(2,21) $$-(\Gamma^s_{ij}\boldsymbol{r}_s + B_{ij}\boldsymbol{N})(\omega_l\boldsymbol{N} - \omega B^s_l\boldsymbol{r}_s) = \omega C^s_{ij}B_{sl} \,,$$

где $B^s_k = B_{kj}A^{js}$. После преобразований получим из (2,21)

$$-\omega_l B_{ij} + \omega B_{ls}\Gamma^s_{ij} = \omega C^s_{ij}B_{sl} \,.$$

Отсюда, умножая на B^{lk}, мы получим

$$-\omega_l B^{lk}B_{ij} + \omega\Gamma^k_{ij} = \omega C^k_{ij} \,, \quad \text{ч. т. д.}$$

Без принципиальных трудностей можно было бы при помощи полученных уже результатов выразить C^k_{ij} только через основные центроевклидовы объекты ϱ и a_{ij} и их производные.

3. ПОВЕРХНОСТИ В E^C_3

Все результаты, полученные в двух предыдущих параграфах, дают в случае $n = 3$ специальные результаты для центроевклидовой теории поверхностей в трехмерном центроевклидовом пространстве. Приведем несколько замечаний к ним.

А. Условие (1,20) в основной теореме 1,2 можно, как известно, заменить условием, чтобы гауссова кривизна k, определенная при помощи γ^k_{ij}, равнялась единице.

Б. $(n - 2)$-мерное многообразие $\varrho = \text{konst}$ из теоремы 1,2 и замечания 2,2 сводится к кривой, так что в каждой точке поверхности существуют в точности два взаимно перпендикулярных замечательных направления, в которых инвариант $1/^p\omega_1$ принимает экстремальное значение, а именно касательное направление кривой $\varrho = \text{konst}$ и направление, определяемое градиентом ϱ_i.

При помощи этих направлений можно на поверхности определить два ортогональных семейства замечательных кривых.

B. Выведем теперь формулу для центроевклидовой кривизны ${}^{\varphi}\omega_2$ кривой на поверхности. Справедлива

Теорема 3,1. *Для центроевклидовой кривизны ${}^{\varphi}\omega_2$ кривой в точке поверхности имеет место*

$$ {}^{\varphi}\omega_2 = \left| \varepsilon_{ik} \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}\varphi} \frac{\delta^2 \xi^k}{\mathrm{d}\varphi^2} \right| , \tag{3,1} $$

где δ — символ абсолютной производной, определенной при помощи центроевклидовой связности γ_{ij}^k, а ε_{ik} есть бивектор

$$ \varepsilon_{ik} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k] \tag{3,2} $$

с существенной ненулевой координатой

$$ \varepsilon_{12} = \varepsilon a \, . \tag{3,3} $$

Доказательство. Из [1] следует для ${}^{\varphi}\omega_2$ формула

$$ {}^{\varphi}\omega_2 = \left| \left[\boldsymbol{a}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\varphi}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\varphi^2} \right] \right| . \tag{3,4} $$

Для $\mathrm{d}\boldsymbol{a}/\mathrm{d}\varphi$ имеет место

$$ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\varphi} = \boldsymbol{a}_i \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}\varphi} . \tag{3,5} $$

Для $\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}/\mathrm{d}\varphi^2$ получаем с учетом уравнений (1,17)

$$ \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\varphi^2} = \left(\gamma_{ij}^k \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}\varphi} \frac{\mathrm{d}\xi^j}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}^2\xi^k}{\mathrm{d}\varphi^2} \right) \boldsymbol{a}_k - a_{ij} \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}\varphi} \frac{\mathrm{d}\xi^j}{\mathrm{d}\varphi} \boldsymbol{a} , $$

то есть

$$ \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\varphi^2} = \frac{\delta^2\xi^k}{\mathrm{d}\varphi^2} \boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a} . \tag{3,6} $$

Подставляя (3,5) и (3,6) в (3,4), мы получаем

$$ {}^{\varphi}\omega_2 = \left| \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}\varphi} \frac{\delta^2\xi^k}{\mathrm{d}\varphi^2} [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k] \right| , \quad \text{ч. т. д.} $$

Замечание 3,1. Формулу (3,1) можно переписать в виде

$$ {}^{\varphi}\omega_2 = a \quad \text{абс. вел.} \begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}\varphi}, & \dfrac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}\varphi} \\ \dfrac{\delta^2\xi^1}{\mathrm{d}\varphi^2}, & \dfrac{\delta^2\xi^2}{\mathrm{d}\varphi^2} \end{vmatrix} . \tag{3,7} $$

Отсюда следует, что кривая на поверхности будет центроевклидовой геодезической линией если и только если в ее точках ${}^{\varphi}\omega_2 = 0$, т. е. если она является кривой в плоскости, проходящей через центр пространства.

Литература

[1] *Ч. Витнер:* Дифференциальная геометрия кривых в центроевклидовых пространствах. Чехосл. мат. ж. *12* (*87*), 1962, 119—143.

Zusammenfassung

DIFFERENTIALGEOMETRIE DER HYPERFLÄCHEN IM ZENTROEUKLIDISCHEN RAUM E_n^C

Čestmír Vitner, Praha

In dieser Arbeit werden die Hyperflächen im Zentroeuklidischen Raum E_n^C studiert. Den Ausgangspunkt zu diesem Studium bildet die Zentroeuklidische Kurventheorie, die in Arbeit [1] des Autors erweitert wird. Die Arbeit besteht aus drei Teilen.

Im ersten Teil wird mit Hilfe des Zentroeuklidischen Bogens φ der Kurven auf der Hyperfläche der erste zentroeuklidische Tensor a_{ik} definiert, der mit der Entfernung ϱ vom Ursprung des Raumes die Hyperfläche bis auf die zentroeuklidischen Bewegungen im Raum eindeutig bestimmt. Neben dem Tensor a_{ik} wird in der vorliegenden Arbeit ein weiterer zentroeuklidischer Tensor $\varrho_i\varrho_k$ betrachtet, sowie der mit diesen beiden verbundene Invariant $d\varrho/d\varphi$, welcher nur von der Richtung in der tangentiellen Hyperebene der Hyperfläche abhängig ist. Es werden in dieser Arbeit Richtungen angeführt, für welche dieser Invariant extrem ist.

Der zweite Teil der vorgelegten Arbeit deutet den Zusammenhang der euklidischen, der zentroeuklidischen und der zentroaffinen Theorie der Hyperflächen an. Es ist die Beziehung zwischen dem ersten euklidischen Tensor, der Entfernung vom Ursprung des Raumes und dem ersten zentroeuklidischen Tensor angegeben. Weiter wird auch die Beziehung zwischen dem euklidischen und dem zentroeuklidischen Zusammenhang und endlich die Beziehung zwischen dem zweiten euklidischen Tensor und den zentroeuklidischen Grundobjekten angeführt. Die Beziehung zwischen der zentroeuklidischen und zentroaffinen Theorie der Hyperflächen wird dadurch ausgedrückt, dass der zentroaffine Zusammenhang ersten Grades durch Zentroeuklidische Objekte dargestellt wird.

Im dritten Teil dieser Arbeit werden einige spezielle Anmerkungen für Flächen in E_n^C angeführt. Es wird unter anderem die Formel für die zentroeuklidische Krümmung der Kurven auf der Fläche angegeben und gezeigt, dass die zentroeuklidischen geodetischen Linien ebene Kurven sind, welche in den durch den Mittelpunkt des Raumes gehenden Ebenen liegen.