Czechoslovak Mathematical Journal

Josef Král

О Лебеговой площади простых замкнутых поверхностей

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 1, 44–68

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100497

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962 Прага

О ЛЕБЕГОВОЙ ПЛОЩАДИ ПРОСТЫХ ЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ЙОСЕФ КРАЛ (Josef Král), Прага

(Поступило в редакцию 13/5 1960)

Пусть S — замкнутая простая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E^3 и пусть A — измеримое подмножество в E^3, $A \neq S$, границей которого является S. В статье исследуются качественные соотношения между лебеговой площадью поверхности S и некоторыми обобщенными линейными вариациями множества A.

ВВЕДЕНИЕ

Если A — измеримое подмножество в E^3, то положим

$$\|A\|_i = \sup_f \int_A \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta_i} \, d\zeta ,$$

где верхняя грань берется по отношению ко всем бесконечно дифференцируемым функциям f с компактным носителем на E^3, удовлетворяющим неравенству

$$\max_\zeta |f(\zeta)| \leqq 1 , \quad \zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] \in E^3 .$$

Класс всех измеримых множеств $A \subset E^3$, для которых $\|A\|_i < +\infty$, будем обозначать символом $\mathfrak{S}_i$. Измеримое множество $A \subset E^3$ тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{S}_i$, если частная производная его характеристической функции по i-тому переменному — понимаемая в смысле теории обобщенных функций — является вполне конечной обобщенной мерой. Число $\|A\|_i$, определенное для каждого измеримого множества A и всякого $i = 1, 2, 3$, можно было бы назвать обобщенной линейной вариацией множества A по направлению i-той координатной оси. (Мы, однако, не будем в дальнейшем пользоваться этим названием. Отметим, что эта „вариация" не совпадает с линейной вариацией множества, рассматриваемой в книге А. Г. Витушкина [25].)

Положим еще

$$\mathfrak{S} = \bigcap_{i=1}^{3} \mathfrak{S}_i .$$

Класс $\mathfrak{G}$ состоит в точности из всех измеримых множеств $A \subset E^3$, для которых конечно число

$$\|A\| = \sup_v \int_A \operatorname{div} v(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta ,$$

где верхняя грань берется по отношению ко всем бесконечно дифференцируемым трехмерным вектор-функциям v с компактным носителем на E^3, для которых

$$1 \geqq \max_\zeta |v(\zeta)| , \quad \zeta \in E^3 .$$

Число $\|A\|$ является в некотором смысле „площадью" границы множества A. Оно совпадает с „периметром" множества A, определенным для борелевских подмножеств в r-мерном пространстве Де Джорджи (E. De Giorgi) в статьях [4], [5].

Наши обозначения $\|A\|_i$, $\|A\|$ заимствованы из статьи Я. Маржика (J. Mařík) [15]. Принадлежность (измеримого) множества A к классу $\mathfrak{G}$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы на границе H множества A существовала такая вполне конечная трехмерная векторная мера Φ^A, что равенство

$$\int_H v \, \mathrm{d}\Phi^A = \int_A \operatorname{div} v(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta$$

справедливо для всех бесконечно дифференцируемых трехмерных вектор-функций, обращающихся в нуль на бесконечности.

Системы $\mathfrak{G}_i$, $\mathfrak{G}$ имеют ряд важных свойств, которые исследовались (сразу для r-мерного пространства) несколькими авторами. Здесь, кроме выше указанных работ, надо отметить статью Г. Федерера (H. Federer) [9] и исследования В. Флеминга (W. H. Fleming) [10], [11], К. Крикеберга (K. Krickeberg) [14] и Х. Пока (Chr. Y. Pauc) [19], [20] по теории функций, частные производные которых являются мерами (см. тоже [13]).

Предположим теперь, что границей измеримого множества $A \subset E^3$ является простая замкнутая поверхность S. Так как — по классическому результату Т. Радо (T. Radó) [21] — поверхность S триангулируема, то можно говорить о ее лебеговой площади $\mathscr{L}(S)$ и о лебеговой площади $\mathscr{L}_i(S)$ ее проекции на i-тую координатную плоскость $E_i^2 = \{\zeta;\ \zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3],\ \zeta_i = 0\}$. Как известно, площадь $\mathscr{L}(S)$ [соотв. $\mathscr{L}_i(S)$] определяется, грубо говоря, как нижняя грань множества всех чисел вида

$$\liminf_{n\to\infty} L(T_n) \quad [\text{соотв. } \liminf_{n\to\infty} L_i(T_n)] ,$$

где T_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — любая последовательность кусочно-линейных непрерывных поверхностей, равномерно сходящаяся к S, и где $L(T_n)$ [соотв. $L_i(T_n)$] обозначает элементарную площадь поверхности T_n [соотв. элементнарную площадь проекции поверхности T_n на плоскость E_i^2]. Естественно возникает вопрос, существуют ли какие-нибудь соотношения между числами $\|A\|$ и $\mathscr{L}(S)$, $\|A\|_i$ и $\mathscr{L}_i(S)$. Отметим, что в случае плоского множества A, ограниченного простой замкнутой кривой C, известно, что $\|A\|$ равняется длине кривой C; об этом см. статью Я. Маржика (J. Mařík) [16].

Как отмечает Г. Федерер (H. Federer) в статье [9], соотношения между „периметром“ множества и лебеговой площадью ограничивающей его поверхности оказываются более сложными в случае пространств большего числа измерений. Г. Федерер (H. Federer) в [9] высказал теорему, утверждающую, что каждое множество A в r-мерном евклидовом пространстве, ограниченное конечно-триангулируемым многообразием r-мерной меры нуль и конечной площади по Лебегу, необходимо принадлежит системе $\mathfrak{S}$. Там же он поставил вопрос о том, если, наоборот, из принадлежности множества A к $\mathfrak{S}$ вытекает конечность лебеговой площади многообразия, органичивающего множество A.

Аналогичными вопросами для трехмерного пространства мы займемся в предлагаемой статье. Главные результаты сосредоточены в § 3. Там, в частности, приведено необходимое и достаточное условие для того, чтобы обе дополнительные области замкнутой поверхности S содержались в $\mathfrak{S}$ и доказано, что $\mathscr{L}(S) < +\infty$ всегда, если некоторое из измеримых множеств A, $A \neq S$, границей которых является S, принадлежит к $\mathfrak{S}$. Отметим, что некоторые из полученных результатов были опубликованы уже раньше без доказательств ([12]).

В § 1 приводится несколько известных фактов из теории лебеговой площади в форме, которая удобна для нас в дальнейшем; при этом мы придерживаемся понятий, введенных в монографиях Т. Радо (T. Radó) [23] и Л. Чесари (L. Cesari) [3]. В § 2 доказываются две вспомогательные теоремы относительно „существенных“ компонент пересечения отрезка и замкнутой поверхности; в доказательствах используются некоторые основные факты, касающиеся зацеплений циклов, изложенные в монографии П. С. Александрова [1]. Эти вспомогательные теоремы вместе с некоторыми результатами статьи [13] затем применяются в § 3.

1

1.1. Обозначение. Символом E^r мы будем обозначать r-мерное евклидово пространство; если $\zeta \in E^r$, то ζ_i есть i-тая координата точки ζ. Если φ — отображение множества $M \neq \emptyset$ в E^r, то φ_i обозначает функцию на M, определенную соотношением

$$\varphi_i(t) = (\varphi(t))_i\,, \quad t \in M\,.$$

Множество всех внутренних точек множества $M \subset E^r$ будем обозначать символом M^0. Символом H_k мы будем пользоваться для обозначения внешней k-мерной меры Хаусдорфа.

1.2. Определение. Простой полигональной областью разумеется замыкание области, ограниченной простой замкнутой ломаной в E^2. Полигональной областью называется множество вида

$$R_1 - \bigcup_{j=2}^{s} R_j^0 ,$$

где $R_1, \ldots, R_s$ $(s \geqq 1)$ – простые полигональные области такие, что $R_2, \ldots, R_s$ взаимно не пересекаются и

$$R_1^0 \supset \bigcup_{j=2}^{s} R_j .$$

Множество, являющееся соединением конечного числа непересекающихся полигональных областей, будем называть фигурой. (По поводу этих названий ср. [3], гл. II, отд. 5.1 на стр. 27.)

Пусть теперь φ – отображение множества $M \subset E^2$ в E^r $(r \geqq 2)$. Мы будем говорить, что отображение φ линейно на множестве $R \subset M$, если существуют конечные действительные константы a_i, b_i, c_i так, что

$$\varphi_i(t) = a_i t_1 + b_i t_2 + c_i , \quad t \in R , \quad 1 \leqq i \leqq r .$$

Пусть R – фигура, содержащаяся в M, и пусть φ непрерывно на R. Если R можно разбить на неналегающие на себя треугольники $R_1, \ldots, R_q$ (т. е. $R_i^0 \cap R_k^0 = \emptyset$ для $1 \leqq i \neq k \leqq q$; q конечно) таким образом, что отображение φ окажется линейным на каждом R_i, то будем говорить, что отображнеие φ кусочно-линейно на R. В этом случае полагаем по определению

$$L(R; \varphi) = \sum_{j=1}^{q} \mathsf{H}_2 \varphi(R_i) .$$

Не трудно обнаружить, что число $L(R; \varphi)$ в действительности не зависит от того, каким образом мы избрали разбиение фигуры R на неналегающие друг на друга треугольники $R_1, \ldots, R_q$ с соблюдением линейности отображения φ на каждом R_i.

1.3. Определение. Пусть D – открытое множество в E^2 и пусть φ – непрерывное отображение множества D в E^r $(r \geqq 2)$. Число k мы будем называть нижней оценкой для площади отображения φ, если существует компактное множество $K \subset D$ и число $\varepsilon > 0$ так, что

$$L(R; \varphi^*) \geqq k$$

для каждой фигуры R и каждого кусочно-линейного отображения φ^* этой фигуры в E^r, удовлетворяющих условиям

$$K \subset R^0 , \quad R \subset D ,$$

$$\max_{t \in R} |\varphi(t) - \varphi^*(t)| \leqq \varepsilon .$$

Точную верхнюю грань множества всех нижних оценок для площади отображения φ будем называть лебеговой площадью отображения φ и обозначим ее символом $L(D; \varphi)$. (Сравни [3], гл. II, § 5, определение из отд. 5.8 на стр. 37 и утверждение (IV) из отд. 5.9 на стр. 39.)

1.4. *Если φ — кусочно-линейное отображение фигуры $R \subset E^2$ в E^3, то*

$$L(R; \varphi) = L(R^0; \varphi) .$$

(*При этом число* $L(R; \varphi)$ *определено по отд.* 1.2; *напротив, число* $L(R^0; \varphi)$ *определено по отд.* 1.3.)

Доказательство: См. [3], утверждение (iii) на стр. 39 и (ii) на стр. 38.

1.5. *Пусть φ — непрерывное отображение открытого множества $D \subset E^2$ в E^3 и пусть ψ — гомеоморфное отображение открытого множества $\tilde{D} \subset E^2$ на множество D. Обозначим через $\tilde{\varphi}$ отображение множества $\tilde{D}$ в E^3, которое получим суперпозицией отображения ψ с отображением φ. Тогда*

$$L(\varphi; D) = L(\tilde{\varphi}; \tilde{D}) .$$

Доказательство: См. [3], утверждение (i), стр. 62.

1.6. Открытой поверхностью типа E^2 [1]) разумеется множество $P \subset E^r$ ($r \geqq 2$), гомеоморфное пространству E^2.

Пусть P — открытая поверхность в E^3 и пусть φ — гомеоморфизм пространства E^2 на множество P. Положим

$$\mathscr{L}(P) = L(E^2; \varphi) .$$

Обозначая еще символом φ^i отображение, сопоставляющее каждому $t \in E^2$ прямоугольную проекцию $\varphi^i(t)$ точки $\varphi(t)$ на плоскость

$$E_i^2 = \{\zeta;\ \zeta \in E^3,\ \zeta_i = 0\} ,$$

полагаем по определению

$$\mathscr{L}_i(P) = L(E^2; \varphi^i) \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Эти определения оправданы независимостью чисел $\mathscr{L}(P)$, $\mathscr{L}_i(P)$ от гомеоморфизма φ (ср. 1.5).

1.7. *Если P — открытая поверхность в E^3, то*

$$\max_{1 \leqq i \leqq 3} \mathscr{L}_i(P) \leqq \mathscr{L}(P) \leqq \sum_{i=1}^{3} \mathscr{L}_i(P) .$$

Доказательство. См. 1.6 и теоремы (i) (стр. 295), (iii) (стр. 296) из [3].

1.8. *Для $\zeta \in E^3$ обозначим символом p_i^ζ прямую, проходящую через точку ζ и перпендикулярную к плоскости E_i^2.*

Пусть P — открытая поверхность в E^3 и предположим, что среди чисел $\mathscr{L}_i(P)$ ($i = 1, 2, 3$) по крайней мере два конечны. Тогда для каждого $i = 1, 2, 3$ су-

[1]) Слова „типа E^2" мы будем в дальнейшем опускать.

ществует множество $N_i \subset E_i^2$ такое, что $\mathsf{H}_2 N_i = 0$ и что при $\zeta \in E_i^2 - N_i$ все компоненты множества $p_i^\zeta \cap P$ одноточечны.

Доказательство этого утверждения легко выводится из теоремы (i), доказанной Л. Чесари (L. Cesari) в [3], стр. 262.

1.9. Пусть C – простая замкнутая кривая (в смысле определения данного в [1], гл. II., арт. 1 : 1) и пусть E_*^2 – плоскость в E^3. Пусть, далее, C_* есть непрерывное отображение множества C в E_*^2. Обозначим через $\vec{C}$ ориентированную кривую, которую получим, выбрав некоторую ориентацию на C ([1], гл. II, арт. 1 : 4) и предположим, что на плоскости E_*^2 введена некоторая декартова система координат. Тогда для каждой точки $\zeta \in E_*^2 - C_*(C)$ можно известным способом (см. [23], II. 4.34 и [1], гл. II, арт. 2 : 5) определить порядок точки ζ относительно отображения C_* ориентированной кривой $\vec{C}$ в E_*^2. Нетрудно обнаружить, что абсолютная величина этого порядка не зависит ни от выбора ориентации на C, ни от выбора декартовой системы координат в E_*^2; эту абсолютную величину мы будем называть абсолютным порядком точки ζ относительно C_* (в E_*^2).

1.10. Пусть P – открытая поверхность в E^r ($r \geqq 2$). Если C – простая замкнутая кривая на P, то по теореме Жордана множество $P - C$ состоит из двух компонент, общей границей (относительно P) которых является C. Из этих двух компонент только одна обладает компактным замыканием относительно P; эту мы будем обозначать символом $\operatorname{int}_P C$.

1.11. Определение. Пусть P – открытая поверхность в E^3 и пусть p – прямая в E^3. Обозначим через E_*^2 плоскость перпендикулярную к p, и через o точку пересечения E_*^2 с p. Условимся еще, что для каждой простой замкнутой кривой $C \subset E^3$ мы будем символом C_* обозначать прямоугольную проекцию[2]) кривой C в E_*^2.

Мы будем говорить, что компонентна u множества $p \cap P$ существенна, если удовлетворяются следующие условия (i), (ii):

(i) u есть компактное множество (т. е. замкнутый сегмент, который, разумеется, может вырождаться в точку).

(ii) Для каждой окрестности U множества u относительно P существует простая замкнутая кривая $C \subset U - p$ такая, что

$$u \subset \operatorname{int}_P C \subset U$$

и что абсолютный порядок точки o относительно отображения C_* (в E_*^2) отличен от нуля.

Очевидно, что это определение не зависит от того, через которую точку $o \in p$ проведена перпендикулярная плоскость E_*^2.

---

[2]) Под прямоугольной проекцией здесь подразумевается отображение, сопоставляющее каждой точке $\zeta \in C$ точку пересечения плоскости E_*^2 с перпендикуляром к E_*^2, проходящим через ζ.

Если v — невырожденный сегмент на прямой p, концы которого не лежат на P, то под существенными компонентами множества $v \cap P$ подразумеваются те существенные компоненты множества $p \cap P$, которые содержатся в v. Все компоненты множеств $p \cap P$, $v \cap P$, которые не являются существенными, будем называть несущественными.

1.12. Пусть E^2_* — плоскость в E^3 и пусть φ_* — непрерывное отображение пространства E^2 в E^2_*. Пусть, далее, ζ есть точка из E^2_* и пусть γ — компонента множества $\varphi_*^{-1}(\zeta)$. Предположим, что множество γ компактно. (Итак, γ — континуум, который может вырождаться в точку.) Тогда существует ограниченная область $D \subset E^2$ такая, что $\gamma \subset D$ и что множество $\varphi_*(D)$ тоже ограничено. Если рассматривать отображение φ_* только на области D и если выбрать в плоскости E^2_* некоторую прямоугольную систему координат, то можно применять определения из отд. IV. 1.46 монографии [23]. В смысле этих определений множество γ является максимальным прообраз-континуумом точки ζ при отображении φ_* на D (maximal model continuum for ζ under φ_* in D). Если γ является существенным максимальным прообраз-континуумом точки ζ при отображении φ_* на D (essential maximal model continuum for ζ under φ_* in D), то мы скажем короче, что γ является континуумом Радо (T. Radó) точки ζ при отображении φ_*. Нетрудно обнаружить, что сам тот факт, является ли или нет множество γ континуумом Радо (точки ζ при отображении φ_*), не зависит от вывора области D с выше указанными свойствами, ни от выбора координатной системы в E^2_*.

1.13. *Пусть символы P, p, E^2_*, o имеют то же самое значение, как и в отд. 1.11. Пусть, далее, u — компонента множества $p \cap P$ и пусть φ — гомеоморфизм пространства E^2 на множество P. Обозначим еще символом φ_* отображение пространства E^2 в плоскость E^2_*, которое получится суперпозицией отображения φ с прямоугольной проекцией множества P в плоскость E^2_*. Тогда множество $\gamma = \varphi^{-1}(u)$ является компонентой множества $\varphi_*^{-1}(o)$.*

Множество u является существенной компонентой множества $p \cap P$ тогда и только тогда, если γ является континуумом Радо точки o при отображении φ_*.

Доказательство. Если u — существенная компонента множества $p \cap P$, то γ есть континуум (простая дуга или одноточечное множество[3])), являющийся континуумом Радо точки o при отображении φ_* (см. 1.11, 1.12 и отд. IV. 1.46 монографии [23]).

Наоборот, пусть γ является континуумом Радо точки o при отображении φ_*. Тогда множества γ, $\varphi(\gamma) = u$ компактны, и условие (i) из отд. 1.11 выполняется. Пусть, далее, U — произвольная окрестность множества u относительно P; тогда $O = \varphi^{-1}(U)$ является окрестностью множества γ в E^2. Так как γ —

[3]) Иногда требуют, чтобы континуум содержал больше одной точки. На протяжении этой статьи является целесообразным включить и одноточечные множества в число континуумов.

простая дуга или одноточечное множество, то множество $E^2 - \gamma$ связно (см. [1], § 3, стр. 82); другими словами, γ является континуумом типа 1 в смысле отд. I. 1.7 работы Радо [22]. Из теоремы I. 3.7 той же работы вытекает существование простой замкнутой кривой $C' \subset O - \varphi_*^{-1}(o)$, обладающей следующими свойствами (α), (β):

(α) Абсолютный порядок точки o относительно отображения $C'_* = \varphi_*|_{C'}$ (возникшего сужением отображения φ_* на множество C') в E^2_* отличен от нуля.

(β) Множество $I = \operatorname{int}_{E^2} C'$ удовлетворяет включениям

$$\gamma \subset I \subset O .$$

Если теперь положить $C = \varphi(C')$, то кривая C обладает, очевидно, всеми свойствами, которые нуждаются в условии (ii) из отд. 1.11.

1.14. *Пусть P – открытая поверхность в E^3. Обозначим для $\zeta \in E^2_i$ (см. 1.6) символом*

$$\mathcal{N}_i(\zeta; P) \quad (0 \leqq \mathcal{N}_i(\zeta; P) \leqq +\infty)$$

число всех существенных компонент множества $p^\zeta_i \cap P$ (см. 1.8).

Тогда функция $\mathcal{N}_i(\zeta; P)$ измерима по Борелю на E^2_i, и имеет место равенство

$$\int_{E_i{}^2} \mathcal{N}_i(\zeta; P)\, \mathrm{dH}_2(\zeta) = \mathcal{L}_i(P) . \tag{1}$$

Доказательство. Пусть φ – гомеоморфное отображение пространства E^2 на множество P и пусть φ^i – отображение пространства E^2 в плоскость E^2_i, определенное в отд. 1.6.

Обозначим для $\zeta \in E^2_i$ символом

$$\kappa(\zeta; \varphi^i) \quad (0 \leqq \kappa(\zeta; \varphi^i) \leqq +\infty)$$

число всех континуумов Радо точки ζ при отображении φ^i (см. 1.12). Из отд. 1.13 мы уже знаем, что

$$\mathcal{N}_i(\zeta, P) = \kappa(\zeta; \varphi^i), \quad \zeta \in E^2_i . \tag{2}$$

По теореме I. 4.6, доказанной Радо в [22], получаем, что за исключением не более чем счетного множества точек $\zeta \in E^2_i$ имеет место равенство

$$\kappa(\zeta; \varphi^i) = N(\zeta, \varphi^i, E^2) ; \tag{3}$$

здесь $N(\zeta; \varphi^i, E^2)$ – функция кратности Чесари, определенная в [3], гл. IV, отд. 12.1 на стр. 173. (Отметим, что обозначение в монографии [3] не совпадает с обозначением в работе [22]; функции N из [3] соответствует в [22] функция Ψ.) По утверждению (i) из [3], стр. 174, является $N(\zeta; \varphi^i, E^2)$ полунепрерывной сверху функцией переменного ζ на плоскости E_i^2 и по теореме (iii) из [3], стр. 296, имеет место равенство

$$\int_{E_i^2} N(\zeta; \varphi^i, E^2)\, \mathrm{dH}_2(\zeta) = L(E^2; \varphi^i) \tag{4}$$

(сравни тоже определение 12.3 на стр. 175). Из (2)–(4) вытекает, что функция $\mathcal{N}_i(\zeta, P)$ измерима по Борелю и

$$\int_{E_i^2} \mathcal{N}_i(\zeta; P)\, \mathrm{dH}_2(\zeta) = L(E^2; \varphi^i) ;$$

но это равенство тождественно (1) (сравни отд. 1.6).

2

2.1. Лемма. *Пусть C, H — простые замкнутые кривые в E^2,*

$$\operatorname{int} C - \operatorname{int} H \neq \emptyset\,,^4)$$

и пусть F — компактное множество в E^2, удовлетворяющее соотношениям

$$F \subset \operatorname{int} C \cup \operatorname{int} H\,, \quad F \cap (C \cup H) = \emptyset\,.$$

Тогда существуют простые замкнутые кривые $K_1, \ldots, K_s$ ($s \geqq 0$) такие, что множества $\operatorname{int} K_1, \ldots, \operatorname{int} K_s$ попарно не пересекаются, каждое из них содержится в $\operatorname{int} H - (C \cup \operatorname{int} C)$ и

$$\bigcup_{j=1}^{s} K_j \subset H \cup C\,, \quad F \subset \operatorname{int} C \cup \bigcup_{j=1}^{s} \operatorname{int} K_j\,.$$

Доказательство. Утверждение очевидно, если $\operatorname{int} H \cap \operatorname{int} C = \emptyset$ или $\operatorname{int} H \subset \operatorname{int} C$. Итак, пусть

$$\operatorname{int} H \cap \operatorname{int} C \neq \emptyset \neq \operatorname{int} H - \operatorname{int} C \neq \emptyset \neq \operatorname{int} C - \operatorname{int} H\,.$$

Тогда нетрудно обнаружить, что множество $H \cap C$ содержит не меньше двух элементов. По теореме Б. Керекярто (B. v. Kerékjártó; см. [17], стр. 168) имеет каждая ограниченная компонента множества $E^2 - (C \cup H)$ в качестве границы некоторую простую замкнутую кривую. Пусть $K_1, K_2, \ldots,$ — последовательность (может быть, и конечная, но без повторений) всех граничных кривых тех компонент множества $E^2 - (C \cup H)$, которые содержатся в

$$\operatorname{int} H - (C \cup \operatorname{int} C)\,.$$

Множества $\operatorname{int} K_1, \operatorname{int} K_2, \ldots$ образуют открытое покрытие компактного множества

$$F - \operatorname{int} C = F - (C \cup \operatorname{int} C)\,.$$

---

4) Мы пишем просто int … вместо int_{E^2} …

Следовательно, существует такое целое число $s \geqq 0$, что

$$F - \operatorname{int} C \subset \bigcup_{j=1}^{s} \operatorname{int} K_j .$$

Кривые $K_1, \ldots, K_s$ обладают всеми требуемыми свойствами.

2.2. Лемма. *Пусть P — открытая поверхность в E^r $(r \geqq 2)$ и пусть F — компактное подмножество в P. Пусть $C_1, \ldots, C_m$ — простые замкнутые кривые на P такие, что*

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{int}_P C_i , \quad F \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\Big) = \emptyset .$$

Тогда существуют простые замкнутые кривые $K_1, \ldots, K_s$ на P такие, что множества $\operatorname{int}_P K_1, \ldots, \operatorname{int}_P K_s$ попарно не пересекаются, каждое из них содержится целиком в некотором из множеств $\operatorname{int}_P C_i$ и

$$F \subset \bigcup_{j=1}^{s} \operatorname{int}_P K_j , \quad \bigcup_{j=1}^{s} K_j \subset \bigcup_{i=1}^{m} C_i .$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $r = 2$ и $P = E^2$. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции по m. Утверждение очевидно в случае $m = 1$. Итак, пусть $m > 1$ и предположим, что утверждение верно, если в нем заменить m через $m - 1$. Положим $\hat{F} = F - \operatorname{int} C_m$. Тогда $\hat{F}$ — компактное множество, содержащееся в $\bigcup_{i=1}^{m-1} \operatorname{int} C_i$. По предположению индукции существуют простые замкнутые кривые $H_1, \ldots, H_t$ в E^2 такие, что множества $\operatorname{int} H_k$ $(k = 1, \ldots, t)$ попарно не пересекаются, каждое из них целиком содержится в некотором из множеств $\operatorname{int} C_i$ $(i \leqq m - 1)$ и

$$\bigcup_{k=1}^{t} H_k \subset \bigcup_{i=1}^{m-1} C_i , \quad \hat{F} \subset \bigcup_{k=1}^{t} \operatorname{int} H_k .$$

Если $\operatorname{int} C_m \subset \bigcup_{k=1}^{t} \operatorname{int} H_k$, то достаточно положить $\{K_1, \ldots, K_s\} = \{H_1, \ldots, H_t\}$. Итак, пусть $\operatorname{int} C_m - \bigcup_{k=1}^{t} \operatorname{int} H_k \neq \emptyset$. Закрепим k и положим $F_k = F \cap (\operatorname{int} C_m \cup \operatorname{int} H_k)$. Так как $F \cap (C_m \cup H_k) = \emptyset$, то множество F_k компактно. Далее, $\operatorname{int} C_m - \operatorname{int} H_k \neq \emptyset$. По лемме 2.1 существуют простые замкнутые кривые $K_{k1}, \ldots, K_{ks_k}$ такие, что множества $\operatorname{int} K_{kj}$ $(j = 1, \ldots, s_k)$ не пересекаются, каждое из них содержится в $\operatorname{int} H_k - (C_m \cup \operatorname{int} C_m)$ и

$$\bigcup_{j=1}^{s_k} K_{kj} \subset H_k \cup C_m , \quad F_k \subset \operatorname{int} C_m \cup \bigcup_{j=1}^{s_k} \operatorname{int} K_{kj} .$$

Система $\{K_1, \ldots, K_s\}$, образованная кривой C_m и всеми кривыми K_{kj} $(1 \leqq k \leqq t,$ $1 \leqq j \leqq s_k)$, удовлетворяет всем условиям доказываемой леммы.

2.3. Обозначение. В дальнейшем будет S всегда обозначать замкнутую поверхность в E^3, т. е. непустой связный компакт в E^3, каждая точка которого имеет окрестность (относительно S), являющуюся открытой поверхностью. Множество $E^3 - S$ состоит из двух компонент, общей границей которых является S; эти компоненты мы будем в дальнейшем обозначать через G^1, G^2. Далее, P будет всегда означать фиксированную открытую поверхность, содержащуюся в S.

Замечание. Так как $S \subset E^3$, то поверхность S ориентируема; это значит, что двухмерная Δ-группа компакта S по области целочисленных коэффициентов ([1], гл. XI., арт. 1 : 1) является бесконечной циклической группой.

Истинный цикл компакта S, гомологический класс которого является образующим этой группы, будем называть ориентирующим циклом поверхности S. Если $\mathbf{z}^2$ — какой-нибудь ориентирующий цикл поверхности S и если для $o \in E^3 - S$ обозначить через $\mathfrak{v}(\mathbf{z}^2, o)$ порядок точки o относительно цикла $\mathbf{z}^2$ ([1], гл. XVI, арт. 1 : 2 и гл. XV, § 2), то функция $\mathfrak{v}(\mathbf{z}^2, o)$ переменной точки o постоянна на каждой из компонент G^1, G^2; она принимает одно из значений ± 1 на том из множеств G^1, G^2, которое ограничено, и обращается в нуль на том из них, которое неограничено. (См. [1], гл. XV, арт. 3 : 4; сравни тоже гл. III, атр. 2 : 2.)

2.4. Лемма. *Пусть p — прямая в E^3 и пусть K — простая замкнутая кривая на P (см. 2.3), $K \cap p = \emptyset$. Предположим, что все компоненты множества $p \cap P$, содержащиеся в $\operatorname{int}_P K$, являются несущественными. Положим еще $Q = K \cup \cup \operatorname{int}_P K$ и обозначим через d максимум расстояний точек множества Q от прямой p.*

Тогда существует такое непрерывное отображение ψ множества Q в E^3, что

$$\psi(Q) \cap p = \emptyset\,,$$
$$\zeta \in K \Rightarrow \psi(\zeta) = \zeta\,, \quad \zeta \in Q \Rightarrow |\psi(\zeta) - \zeta| \leqq 2d\,.$$

Доказательство. Очевидно, можно предположить, что прямая p перпендикулярна на плоскость E_3^2 (см. 1.6) и проходит через начало o. Пусть φ — гомеоморфное отображение пространства E^2 на множество P. Обозначим еще через φ^3 отображение пространства E^2 в плоскость E_3^2, которое получится суперпозицией отображения φ с ортогональной проекцией (т. е. с проекцией в направлении прямой p) множества P в плоскость E_3^2. Полагая $K' = \varphi^{-1}(K)$, получаем по отд. 1.13, что множество $\operatorname{int} K'$ не содержит никаких континуумов Радо точки o при отображении φ^3. Обозначая через $K_3'(= \varphi^3|_{K'})$ отображение кривой K' в плоскости E_3^2, которое получится сужением отображения φ^3 на множество K', получаем по теореме IV. 1.38 из [23] (сравни тоже IV. 1.27), что абсолютный порядок точки o относительно отображения K_3' в E_3^2 (см. 1.9) равен нулю. Так как $K \cap p = \emptyset$, то $o \notin \varphi^3(K') = K_3'(K')$; далее, $|\varphi^3(t)| \leqq d$ для всех $t \in K' \subset \varphi^{-1}(Q) = Q'$. Отсюда вытекает по теореме IV. 1.29 из [23], что существует непрерывное отображение ψ^3 множества Q' в плоскость E_3^2, обладающее следующими свойствами:

(5) $$o \notin \psi^3(Q'),$$

(6) $$t \in K' \Rightarrow \psi^3(t) = \varphi^3(t),$$

(7) $$t \in Q' \Rightarrow |\psi^3(t)| \leqq d.$$

Определим теперь отображение ψ' множества Q' в E^3, полагая для $t \in Q'$

$$\psi'_i(t) = \psi_i^3(t) \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \quad \psi'_3(t) = \varphi_3(t)$$

(см. 1.1). Из (5)–(7) получаем соотношения

(5^{bis}) $$p \cap \psi'(Q') = \emptyset,$$

(6^{bis}) $$t \in K' \Rightarrow \psi'(t) = \varphi(t),$$

(7^{bis}) $$t \in Q' \Rightarrow |\psi'(t) - \varphi(t)| \leqq |\psi^3(t)| + |\varphi^3(t)| \leqq 2d.$$

Если обозначим через ψ отображение множества Q в пространство E^3, которое получится суперпозицией отображения $\varphi^{-1}|_Q$ (т. е. отображения φ^{-1}, рассматриваемого лишь на Q) с отображением ψ', то ψ обладает всеми свойствами, указанными в доказываемом утверждении.

2.5. Вспомогательная теорема. *Пусть v — невырожденный сегмент в E^3, концы которого не лежат на S, и пусть $v \cap S \subset P$ (см. 2.3). Предположим, что все компоненты множества $v \cap P$ являются несущественными. Тогда сегмент v имеет пустое пересечение с некоторым из множеств G^1, G^2.*

Доказательство. Пусть ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ — концы сегмента v. Выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы расстояние множеств $\{{}^1\alpha, {}^2\alpha\}$, S было больше чем δ. В наших предположениях компонентами множества $v \cap P$ являются все компоненты множества $v \cap S$. Систему всех этих компонент обозначим через σ. Элементами системы σ являются компактные сегменты (которые могут вырождаться в точку), содержащиеся в P. Пусть p — прямая, несущая сегмент v. Сопоставим каждому сегменту $u \in \sigma$ окрестность $O(u)$ на P таким образом, чтобы расстояние каждой точки из $O(u)$ от множества u было меньше, чем $\frac{1}{2}\delta$, и чтобы

(8) $$(p - v) \cap O(u) = \emptyset.$$

По теореме Церетти (L. Zoretti; см. [26], (3.11) на стр. 109) существует простая замкнутая кривая $C(u) \subset P$ такая, что

(9) $$u \subset \operatorname{int}_P C(u) \subset O(u),$$

(10) $$C(u) \subset O(u) - (v \cap S) = O(u) - p.$$

(Отметим, что P гомеоморфно E^2 и что u является компонентой компактного множества $v \cap S \subset P$.) Система всех множеств $\operatorname{int}_P C(u)$ $(u \in \sigma)$ образует открытое покрытие компактного множества $v \cap S$; выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\operatorname{int}_P C(u_1), \ldots, \operatorname{int}_P C(u_m)$. Если положить $F = v \cap S$,

$C_i = C(u_i)$ $(1 \leqq i \leqq m)$, то удовлетворяются все предположения леммы 2.2; пусть $K_1, \ldots, K_s$ — простые замкнутые кривые из этой леммы. Из включения $\bigcup_j K_j \subset \bigcup_i C_i$ вытекает

$$\left(\bigcup_j K_j\right) \cap p = \emptyset\,.$$

Положим $Q_j = K_j \cup \mathrm{int}_P\, K_j$. Так как множество Q_j целиком содержится в некотором из множеств

$$C_i \cup \mathrm{int}_P\, C_i \subset O(u_i)\,,$$

то расстояние каждой точки множества Q_j от прямой p меньше, чем $\frac{1}{2}\delta$, и все компоненты множества $p \cap P$, содержащиеся в Q_j, оказываются несущественными. По лемме 2.4 существует непрерывное отображение ψ^j множества Q_j в E^3 такое, что

$$\psi^j(Q_j) \cap p = \emptyset\,,$$
$$\zeta \in K_j \Rightarrow \psi^j(\zeta) = \zeta\,, \quad \zeta \in Q_j \Rightarrow |\psi^j(\zeta) - \zeta| \leqq \delta$$

$(j = 1, \ldots, s)$. Определим теперь отображение ψ множества S в E^3, полагая $\psi(\zeta) = \zeta$ для $\zeta \in S - \bigcup_j Q_j$, $\psi(\zeta) = \psi^j(\zeta)$ для $\zeta \in Q_j$ $(j = 1, \ldots, s)$. Так как

$$i \neq j \Rightarrow Q_i \cap Q_j = K_i \cap K_j$$

и каждое отображение ψ^j тождественно на K_j, то мы получим таким образом непрерывное отображение множества S в E^3, тождественное на $S - \bigcup_j Q_j$ и удовлетворяющее соотношению

$$|\psi(\zeta) - \zeta| \leqq \delta \tag{11}$$

для всех $\zeta \in S$.

Имея в виду, что $v \cap S \subset \bigcup_j Q_j$ и $\psi(Q_j) \cap p = \emptyset$ $(j = 1, \ldots, s)$, получаем еще

$$v \cap \psi(S) = \emptyset\,. \tag{12}$$

Теперь покажем, что обе точки ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ принадлежат одной и той же компоненте множества $E^3 - S$. Если обозначить через $\mathbf{z}^2$ какой-нибудь ориентирующий цикл поверхности S, то для указанной выше цели достаточно проверить равенство

$$\mathfrak{v}(\mathbf{z}^2, {}^1\alpha) = \mathfrak{v}(\mathbf{z}^2, {}^2\alpha) \tag{13}$$

(см. замечание из отд. 2.3). Пусть $\psi\mathbf{z}^2$ — истинный цикл компакта $\psi(S)$, в который перейдет цикл $\mathbf{z}^2$ в результате непрерывного отображения ψ. Так как для каждого $\zeta \in S$ расстояние точек ${}^i\alpha$, ζ больше, чем δ и, напротив, расстояние точек $\psi(\zeta)$, ζ удовлетворяет неравенству (11), то получаем по теореме Руше ([1], гл. XVI, 1 : 3)

$$\mathfrak{v}(\mathbf{z}^2, {}^i\alpha) = \mathfrak{v}(\psi\mathbf{z}^2, {}^i\alpha) \tag{14}$$

($i = 1, 2$). Отрезок, соединяющий точки ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$, имеет по (12) пустое пересечение с носителем $\psi(S)$ цикла $\psi\mathbf{z}^2$; следовательно,

$$\mathfrak{v}(\psi\mathbf{z}^2, {}^1\alpha) = \mathfrak{v}(\psi\mathbf{z}^2, {}^2\alpha)$$

(см. [1], теорема [2 : 11] на стр. 554). Это равенство вместе с (14) дает (13).

Так как точку ${}^2\alpha$ можно заменить какой-угодно точкой множества $v - S$, отличной от ${}^1\alpha$, то целое множество $v - S$ содержится в той компоненте множества $E^3 - S$, к которой принадлежит точка ${}^1\alpha$.

2.6. Лемма. *Пусть k — некоторое из чисел 1, 2. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что каждые две точки множества G^k, расстояние которых меньше чем δ, могут быть соединены ломаной диаметра, меньшего чем ε, целиком содержащейся в G^k.*

Доказательство. См. теоремы 7 и 5 из работы Р. Л. Уайлдра (R. L. Wilder) [27].

2.7. Лемма. *Пусть k — некоторое из чисел 1, 2 и пусть $\alpha, \beta \in G^k$. Предположим, что замкнутый сегмент v с концами α, β целиком содержится в замыкании множества G^k. Тогда для каждой окрестности O множества v в E^3 существует ломаная $M \subset O \cap G^k$, соединяющая точки α, β.*

Доказательство. Пусть дана окрестность O сегмента v. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы расстояние множеств v, $E^3 - O$ было больше, чем 2ε. К числу ε подберем число $\delta \leqq \varepsilon$, обладающее свойством из леммы 2.6. Считая точки сегмента v натурально упорядоченными от начала α к концу β, разобъем сегмент v при помощи точек деления $\alpha = {}^1\alpha < \ldots < {}^s\alpha = \beta$ на сегменты длины, меньшей чем $\frac{1}{3}\delta$. Положим ${}^1\beta = \alpha$, ${}^s\beta = \beta = {}^s\alpha$ и сопоставим каждой точке ${}^j\alpha$ $(1 < j < s)$ точку ${}^j\beta \in G^k$ таким образом, чтобы расстояние от ${}^j\alpha$ до ${}^j\beta$ оказалось меньшим, чем $\frac{1}{3}\delta$. Тогда расстояние точек ${}^j\beta$, ${}^{j+1}\beta$ $(1 \leqq j < s)$ будет меньше, чем δ и, следовательно, точку ${}^j\beta$ можно соединить с ${}^{j+1}\beta$ при помощи ломаной $M_j \subset G^k$ диаметра, меньшего чем ε. Очевидно, $M_j \subset G^k \cap O$ и ломаная M, которую получим, соединяя ломаные $M_1, \ldots, M_{s-1}$, обладает требуемым свойством.

2.8. Обозначение. В дальнейшем мы будем пользоваться понятием цепи (цикла, истинного цикла) исключительно в том смысле, в каком они использованы в первых двух параграфах гл. XV монографии П. С. Александрова [1]. При этом речь будет всегда лишь о цепях по области целочисленных коэффициентов пространства E^3 (или ориентированной плоскости в E^3), в котором мы раз на всегда считаем выбранной определенную ориентацию. Символ Δ обозначает нижний граничный оператор ([1], гл. VII, § 6). Тело цепи x^r мы в согласии с [1] обозначаем через $\overline{x^r}$ ([1], гл. VII, 5 : 2, замечание 3). Индекс пересечения [коэффициент зацепления] двух цепей [двух циклов, соотв. цикла и истинного цикла] будем обозначать через

$$(\ldots \times \ldots) \quad [\text{через } \mathfrak{v}(\ldots, \ldots)]\,.$$

Определения этих понятий имеются в §§ 1, 2 гл. XV монографии [1].

Если C — простая замкнутая кривая в E^3 и если z^1 — одномерный цикл, тело которого содержится в $E^3 - C$, то положим

$$\mathfrak{v}(C, z^1) = |\mathfrak{v}(\mathbf{z}^1, z^1)|,$$

где $\mathbf{z}^1$ — какой-нибудь ориентирующий цикл кривой C (т. е. одномерный истинный цикл компакта C, гомологический класс которого является образующим Δ^1-группы компакта C (по области целочисленных коэффициентов)); это обозначение оправдано тем, что число $|\mathfrak{v}(\mathbf{z}^1, z^1)|$ не зависит от выбора ориентирующего цикла $\mathbf{z}^1$.

Понятие нульмерной цепи (одномерной цепи) соответствующей данной точке (данному ориентированному отрезку), очевидно, не требует пояснений. Нульмерную цепь, соответствующую точке o, будем опять обозначать через o; одномерную цепь, соответствующую ориентированному отрезку u, обозначим через x_u^1.

Если L — ориентированная ломаная, образованная конечной последовательностью ориентированных отрезков $u_1, \ldots, u_s$, то под цепью соответствующей ориентированной ломаной L разумеется цепь $x_L^1 = x_{u_1}^1 + \ldots + x_{u_s}^1$.

2.9. Лемма. *Пусть p — прямая в E^3, C — простая замкнутая кривая, содержащаяся в $E^3 - p$, E_*^2 — плоскость, перпендикулярная на p, o — точка пересечения E_*^2 с p, C_* — прямоугольная проекция²) кривой C в плоскость E_*^2. Пусть K — сфера с центром в точке o, содержащая внутри кривую C, и пусть L — ориентированная ломаная в $E^3 - K$ такая, что ее начало β и конец α принадлежат различным компонентам множества $p - K$. Пусть, далее, v — ориентированный отрезок с началом α и концом β, и положим $z^1 = x_v^1 + x_L^1$. (Очевидно, что z^1 есть цикл, $\overline{z^1} \subset E^3 - C$.) Тогда число $\mathfrak{v}(C, z^1)$ равняется абсолютному порядку точки o относительно отображения C_* в E_*^2.*

Доказательство. Закрепим некоторый ориентирующий цикл $\mathbf{z}^1$ кривой C. Так как истинный цикл $C_*\mathbf{z}^1$(= образ цикла $\mathbf{z}^1$ в отображении C_*) получается из $\mathbf{z}^1$ непрерывной деформацией в множестве $E^3 - (L \cup v) \supset E^3 - \overline{z^1}$, имеем

$$\mathfrak{v}(C, z^1) = |\mathfrak{v}(C_*\mathbf{z}^1, z^1)|. \tag{15}$$

Пусть $C_*\mathbf{z}^1 = (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1, \ldots)$. Предположим, что на плоскости E_*^2 выбрана определенная ориентация. Если взять n достаточно большим, то

$$\mathfrak{v}(C_*\mathbf{z}^1, z^1) = \mathfrak{v}(z_n^1, z^1), \tag{16}$$

$$\mathfrak{v}_{E_*^2}(C_*\mathbf{z}^1, o) = \mathfrak{v}_{E_*^2}(z_n^1, o) \tag{17}$$

[при этом в последнем соотношении циклы $C_*\mathbf{z}^1, z_n^1$ считаются циклами в пространстве E_*^2 и символом $\mathfrak{v}_{E_*^2}(\ldots, \ldots)$ обозначается коэффициент зацепления в E_*^2]; кроме того, существует цепь x_n^2 такая, что $\overline{x_n^2} \subset K \cap E_*^2$, $\Delta x_n^2 = z_n^1$. По определению коэффициента зацепления получаем

(18) $\mathfrak{v}(z_n^1, z^1) = (x_n^2 \times z^1) = (x_n^2 \times x_v^1) + (x_n^2 \times x_L^1) = [\text{есть } L \cap \overline{x_n^2} = \emptyset] =$
$= (x_n^2 \times x_v^1)$,

(19) $$\mathfrak{v}_{E_*^2}(z_n^1, o) = (x_n^2 \times o)_{E_*^2}$$

[при этом последний символ обозначает кратность покрытия точки o цепью x_n^2 в плоскости E_*^2]. Отметив еще, что

$$|(x_n^2 \times o)_{E_*^2}| = |(x_n^2 \times x_v^1)|\,,$$

получаем из (15)–(19) равенство

(20) $$\mathfrak{v}(C, z^1) = |\mathfrak{v}_{E_*^2}(C_* \mathbf{z}^1, o)|\,.$$

Как видно из упражнения на стр. 573 в [1], число $|\mathfrak{v}_{E_*^2}(C_* \mathbf{z}^1, o)|$ равняется абсолютному порядку точки o относительно отображения C_* в E_*^2. Итак, соотношение (20) доказывает наше утверждение.

2.10. Вспомогательная теорема. *Пусть v — невырожденный отрезок с концами в множестве $E^3 - S$. Если v не пересекается с некоторым из множеств G^1, G^2, то все компоненты множества $v \cap P$ являются несущественными* (*см.* 2.3).

Доказательство. Исходя от противного, предположим, что некоторая компонента u множества $v \cap P$ является существенной. Обозначим через o центр отрезка u и построим сферу K с центром в точке o таким образом, чтобы (компактный) отрезок u содержался внутри K и чтобы оба конца α, β отрезка v принадлежали множеству $E^3 - K$. Соединим точку β с точкой α при помощи ориентированной ломаной $L \subset E^3 - K$ (β является началом, α — концом этой ломаной). Считая отрезок v ориентированным от α к β, положим $z^1 = x_v^1 + x_L^1$. Пусть U — множество всех точек из P, содержащихся внутри сферы K. По определению 1.11 и по лемме 2.9 существует простая замкнутая кривая $C \subset U - v = U - (v \cup L)$ такая, что

(20*) $$\operatorname{int}_P C \subset U\,, \quad \mathfrak{v}(C, z^1) \neq \emptyset\,.$$

Пусть O — настолько малая открытая выпуклая окрестность отрезка v, что $O \cap C = \emptyset$. Выберем k ($= 1$ или 2) таким образом, чтобы отрезок v содержался в замыкании множества G^k. По лемме 2.7 можно соединить точку α с точкой β при помощи ориентированной ломаной $M \subset G^k \cap O$. Тогда цепи x_M^1, x_v^1 гомологичны между собой в множестве $O \subset E^3 - C$ (отметим, что O выпукло); подавно, тоже циклы $z_*^1 = x_M^1 + x_L^1$, $z^1 = x_v^1 + x_L^1$ гомологичны между собой в $E^3 - C$. Итак,

(21) $$\mathfrak{v}(C, z^1) = \mathfrak{v}(C, z_*^1)\,.$$

С другой стороны, $\overline{z_*^1} \subset M \cup L \subset E^3 - U$, и кривая C гомотопна нулю в множестве $\operatorname{int}_P C \cup C \subset U$. Отсюда вытекает равенство

$$\mathfrak{v}(C, z_*^1) = 0\,,$$

которое вместе с (21) приводит к противоречию с (20*). Это противоречие доказывает наше утверждение.

3

3.1. Обозначение. Символы S, G^1, G^2 имеют на протяжении этого параграфа значение, описанное в отд. 2.3. Кроме того, мы будем в дальнейшем пользоваться символами E_i^2, p_i^ζ, введенными соотв. в отд. 1.6, 1.8.

Если A — измеримое подмножество в E^3, то число $\|A\|_i$ имеет значение, указанное в введении. Там же дано определение систем $\mathfrak{G}_i$, $\mathfrak{G}$.

Если $\zeta \in E^3$, то символом $\mathfrak{S}^i(\zeta)$ обозначим систему всех компонент множества $p_i^\zeta \cap S$. Далее, пусть $\mathfrak{M}_k^i(\zeta)$ — система всех $u \in \mathfrak{S}^i(\zeta)$, для которых существует отрезок v на прямой p_i^ζ такой, что v содержит u внутри себя и $v \cap G^k = \emptyset$. Наконец, положим

$$\mathfrak{N}^i(\zeta) = \mathfrak{S}^i(\zeta) - [\mathfrak{M}_1^i(\zeta) \cup \mathfrak{M}_2^i(\zeta)]\,,$$

$$M_k^i(\zeta) = \bigcup \mathfrak{M}_k^i(\zeta)\,,$$

$$B^i = G^1 \cup \bigcup_\zeta M_2^i(\zeta)\,, \quad \zeta \in E^3\,.$$

Имеем $G^1 \subset B^i \subset E^3 - G^2$. Если обозначить через $\pi_i(\zeta)$ число компонент из системы $\mathfrak{N}^i(\zeta)$, то π_i — функция, измеримая по Борелю на плоскости E_i^2. Далее, имеет место равенство

$$\|B^i\|_i = \int_{E_i^2} \pi_i(\zeta)\, \mathrm{dH}_2(\zeta)\,.$$

Кроме того, для каждого измеримого множества A, удовлетворяющего соотношениям $G^1 \subset A \subset E^3 - G^2$, имеет место неравенство

$$\|A\|_i \geqq \|B^i\|_i\,.$$

Эти утверждения вытекают из результатов статьи [13].

3.2. Лемма. *Если* $P^1, \ldots, P^s$ *— взаимно непересекающиеся открытые поверхности* (см. 1.6), *содержащиеся в* S, *то*

$$\sum_{j=1}^{s} \mathcal{N}_i(\zeta; P^j) \leqq \pi_i(\zeta) \tag{22}$$

(см. 1.14) *для всех* $\zeta \in E_i^2$.

Доказательство. Обозначим через P произвольную из поверхностей P^j $(j = 1, \ldots, s)$ и закрепим $\zeta \in E_i^2$. Для доказательства неравенства (22) достаточно проверить следующее утверждение:

Все существенные компоненты множества $p_i^\zeta \cap P$ принадлежат системе $\mathfrak{N}^i(\zeta)$ (см. 3.1).

Итак, пусть u — существенная компонента множества $p_i^\zeta \cap P$; u является одновременно компонентой множества $p_i^\zeta \cap S$. Если отрезок u не принадлежал бы $\mathfrak{N}^i(\zeta)$, то он принадлежал бы некоторой системе $\mathfrak{M}_k^i(\zeta)$; подавно, определенный отрезок v на прямой p_i^ζ, содержащий u внутри себя, имел бы пустое пересечение с G^k. Отсюда мы получили бы по вспомогательной теореме 2.10, что u является несущественной компонентой множества $p_i^\zeta \cap P$ (отметим, что уменьшая в случае надобности отрезок v, всегда можно добиться того, что оба его конца принадлежат $E^3 - S$) — в противоречии с нашим допущением.

3.3. Лемма. *Пусть $P^1, \ldots, P^s$ — открытые поверхности такие, что*

$$\bigcup_{j=1}^{s} P^j = S .$$

Тогда существует константа a такая, что неравенство

$$\pi_i(\zeta) \leqq a + \sum_{j=1}^{s} \mathscr{N}_i(\zeta; P^j) \tag{23}$$

удовлетворяется для всех $\zeta \in E_i^2$.

Доказательство. Множество S компактно и множества $P^1, \ldots, P^s$ открыты в S (см. [1], теорема [3:2] на стр. 201). Следовательно, существует $\delta > 0$ так, что каждое множество $u \subset S$ диаметра $\leqq \delta$ целиком содержится в некотором из множеств P^j. Пусть d — диаметр множества S. Покажем, что для справедливости соотношения (23) достаточно положить $a = d/\delta$. Закрепим $\zeta \in E_i^2$. Так как число компонент из системы $\mathfrak{S}^i(\zeta)$, длина которых не меньше чем δ, ограничено сверху константой $d/\delta = a$, то достаточно проверить справедливость следующего утверждения:

Если $u^1, \ldots, u^q$ — различные компоненты из системы $\mathfrak{N}^i(\zeta)$ длины $< \delta$, то

$$q \leqq \sum_{j=1}^{s} \mathscr{N}_i(\zeta, P^j) .$$

Сопоставим каждому отрезку u^l отрезок $v^l \supset u^l$ на прямой p_i^ζ таким образом, чтобы оба конца отрезка v^l принадлежали к $E^3 - S$, длина отрезка v^l была $< \delta$ и чтобы отрезки v^l $(l = 1, \ldots, q)$ взаимно не пересекались. Следовательно, для каждого l $(= 1, \ldots, q)$ множество $v^l \cap S$ целиком содержится в некотором P^{j_l}. Если бы все компоненты множества $v^l \cap P^{j_l}$ оказались несущественными, то по вспомогательной теореме 2.5 отрезок v^l имел бы пустое пересечение с некоторым из множеств G^1, G^2 и отрезок u^l не мог бы принадлежать $\mathfrak{N}^i(\zeta)$. Это противоречие показывает, что среди компонент множества $v^l \cap P^{j_l}$ необходимо хотя бы одна является существенной, так что $\sum_{j=1}^{s} \mathscr{N}_i(\zeta; P^j) \geqq q$.

3.4. Определение. Положим

$$\mathscr{L}_i(S) = \sup \sum_{j=1}^{s} \mathscr{L}_i(P^j) ,$$

где верхняя грань берется по отношению ко всем конечным системам $P^1, \ldots, P^s$ непересекающихся открытых поверхностей, содержащихся в S. Далее полагаем

$$\mathscr{L}_i^*(S) = \inf \sum_{j=1}^{s} \mathscr{L}_i(P^j) ,$$

где нижняя грань берется по отношению ко всем конечным системам $P^1, \ldots, P^s$ открытых поверхностей таким, что $\bigcup_{j=1}^{s} P^j = S$.

3.5. Теорема. *Все три числа* $\mathscr{L}_i(S)$, $\mathscr{L}_i^*(S)$, $\|B^i\|_i$ (см. 3.1) *или одновременно конечны, или одновременно бесконечны.*

Доказательство. Так как

$$\|B^i\|_i = \int_{E_i^2} \pi_i(\zeta) \, \mathrm{dH}_2(\zeta)$$

(см. 3.1), то из леммы 3.2 получаем на основании утверждения 1.14 неравенство

$$\|B^i\|_i \geqq \mathscr{L}_i(S) \,. \tag{24}$$

Нетрудно обнаружить, что существует конечное число открытых поверхностей $P^1, \ldots, P^s$ таких, что $\bigcup_{j=1}^{s} P^j = S$.

Если $\mathscr{L}_i(S) < +\infty$, то, в частности, $\mathscr{L}_i(P^j) < +\infty$ для $j = 1, \ldots, s$ и, следовательно, $\mathscr{L}_i^*(S) < +\infty$. Мы видим, что имеет место импликация

$$\mathscr{L}_i(S) < +\infty \Rightarrow \mathscr{L}_i^*(S) < +\infty \,. \tag{25}$$

Наконец, если $\mathscr{L}_i^*(S) < +\infty$, то существуют открытые поверхности $P^1, \ldots, P^s$ такие, что

$$\bigcup_{j=1}^{s} P^j = S \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{s} \mathscr{L}_i(P^j) < +\infty \,.$$

Из утверждения 1.14 видно, что функция

$$\sum_{j=1}^{s} \mathscr{N}_i(\zeta; P^j)$$

H_2-интегрируема в E_i^2. Отметив, что функция $\pi_i(\zeta)$ обращается в нуль для $\zeta \in E_i^2 - \{\zeta; p_i^\zeta \cap S \neq \emptyset\}$, получим из леммы 3.3 соотношение $\|B^i\|_i < +\infty$ (см. тоже 3.1).

Этим доказана импликация

$$\mathscr{L}_i^*(S) < +\infty \Rightarrow \|B^i\|_i < +\infty \,. \tag{26}$$

Из соотношений (24)–(26) вытекает наше утверждение.

3.6. Замечание. Может случиться, что

$$\mathscr{L}_i(S) > \mathscr{L}_i^*(S) \,.$$

Пример. Зафиксировав i, положим

$$K = \{\zeta; \, \zeta \in E_i^2 \,, \quad |\zeta| \leqq 1\}$$

и построим простую замкнутую кривую C, целиком содержащуюся внутри (по отношению к E_i^2) множества K, таким образом, чтобы $\mathrm{H}_2 C = \mu > 0$. (Конструкция простой замкнутой плоской кривой положительной H_2-меры описана в [18].) Положим

$$S^1 = \{\zeta;\ \zeta \in E^3, \sum_{j=1}^{3} \zeta_j^2 = 1,\ \zeta_i \geqq 0\},$$
$$S^2 = K - \operatorname{int}_{E_i{}^2} C,$$

(см. 1.10) и обозначим через S^3 множество всех точек $\zeta \in E^3$, для которых $\zeta_i \in \langle -1, 0 \rangle$ и $p_i^\zeta \cap C \neq \emptyset$. Наконец, пусть S^4 – множество всех $\zeta \in E^3$, для которых $\zeta_i = -1$ и $p_i^\zeta \cap \operatorname{int}_{E_i{}^2} C \neq \emptyset$, и положим

$$S = S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup S^4.$$

Очевидно, что S является топологической сферой в E^3. Если ζ^0 – произвольная точка множества S, то $S - \{\zeta^0\} = P$ является открытой поверхностью. Обозначая через K^0 множество всех внутренних точек множества K (по отношению к E_i^2), имеем

$$\mathcal{N}_i(\zeta; P) = 2 \quad \text{для} \quad \zeta \in K^0 - p_i^{\zeta^0},$$
$$\mathcal{N}_i(\zeta, P) = 0 \quad \text{для} \quad \zeta \in E_i^2 - K^0.$$

Отсюда вытекает по утверждению 1.14

$$\mathcal{L}_i(P) = \int_{E_i{}^2} \mathcal{N}_i(\zeta; P)\, \mathrm{d}\mathsf{H}_2(\zeta) = 2\pi, \quad \mathcal{L}_i(S) \geqq 2\pi.$$

Отобрав числа a, b таким образом, чтобы $-1 < a < b < 0$, положим

$$P^1 = \{\zeta;\ \zeta \in S,\ \zeta_i > a\}, \quad P^2 = \{\zeta;\ \zeta \in S,\ \zeta_i < b\}.$$

Тогда P^1, P^2 – открытые поверхности, $P^1 \cup P^2 = S$. Нетрудно обнаружить, что

$$\zeta \in \operatorname{int}_{E_i{}^2} C \Rightarrow \mathcal{N}_i(\zeta; P^2) = 1,$$
$$\zeta \in E_i^2 - \operatorname{int}_{E_i{}^2} C \Rightarrow \mathcal{N}_i(\zeta; P^2) = 0,$$
$$\zeta \in C \cup \operatorname{int}_{E_i{}^2} C \Rightarrow \mathcal{N}_i(\zeta; P^1) = 1,$$
$$\zeta \in K^0 - (C \cup \operatorname{int}_{E_i{}^2} C) \Rightarrow \mathcal{N}_i(\zeta; P^1) = 2,$$
$$\zeta \in E_i^2 - K^0 \Rightarrow \mathcal{N}_i(\zeta; P^1) = 0.$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}_i(P^1) + \mathcal{L}_i(P^2) = 2\pi - \mu,$$
$$\mathcal{L}_i^*(S) \leqq 2\pi - \mu < 2\pi \leqq \mathcal{L}_i(S).$$

Конструкция предшествующего примера основана на известном обстоятельстве, что для открытых поверхностей P^1, P^2, P в E^3, удовлетворяющих соотношению $P^1 \cup P^2 = P$, может иметь место неравенство

$$\mathcal{L}_i(P^1) + \mathcal{L}_i(P^2) < \mathcal{L}_i(P).$$

(Сравни тоже пример из зам. 2 на стр. 124 в [3].)

3.7. Теорема. *Если некоторое множество A, удовлетворяющее соотношениям*

$$G^1 \subset A \subset E^3 - G^2, \tag{27}$$

принадлежит системе $\mathfrak{S}_i$, то необходимо $\mathcal{L}_i(S) < +\infty$.

Доказательство. Из (24) и неравенства $\|A\|_i \geqq \|B^i\|_i$ (см. 3.1) получаем $\|A\|_i \geqq \mathscr{L}_i(S)$.

Замечание. Необходимым условием для того, чтобы каждое измеримое множество A, удовлетворяющее соотношениям (27), принадлежало системе $\mathfrak{G}_i$, является требование

$$\mathsf{H}_3 S = 0$$

(об этом см. [13], стр. 191). Отметив еще, что система $\mathfrak{G}_i$ содержит вместе с каждым своим элементом B и все множества A, удовлетворяющие соотношению

$$\mathsf{H}_3[(A - B) \cup (B - A)] = 0\,,$$

получаем на основании теоремы 3.5 следующее утверждение:

3.8. *Для того, чтобы каждое измеримое множество A, удовлетворяющее соотношениям* (27), *принадлежало системе $\mathfrak{G}_i$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{L}_i(S) < +\infty$ и $\mathsf{H}_3 S = 0$.*

Замечание. Обозначим символом S_i^* множество всех $\zeta \in S$, которые являются внутренними (по отношению к прямой p_i^ζ) точками множества $p_i^\zeta \cap S$. Как доказано в [13], стр. 190,

$$\mathsf{H}_3(S - S_i^*) = 0 \tag{28}$$

всегда, если оба множества G^1, G^2 принадлежат системе $\mathfrak{G}_i$. Это обстоятельство понадобится нам в последующем.

3.9. Теорема. *Пусть оба множества G^1, G^2 принадлежат системе $\mathfrak{G}_i$ и пусть некоторое из измеримых множеств A, удовлетворяющих соотношениям* (27), *принадлежит системе $\mathfrak{G}_j$, где $j \neq i$. Тогда*

$$\mathsf{H}_3 S = 0 \tag{29}$$

и

$$\mathscr{L}_i(S) + \mathscr{L}_j(S) < +\infty\,. \tag{30}$$

Доказательство. По теореме 3.7 получаем (30). Итак, если $P^1, \ldots, P^s$ — открытые поверхности такие, что $\bigcup_{p=1}^{s} P^p = S$, то

$$\sum_{p=1}^{s} [\mathscr{L}_i(P^p) + \mathscr{L}_j(P^p)] < +\infty\,.$$

Из утв. 1.8 вытекает, что существует множество $N \subset E_i^2$ такое, что $\mathsf{H}_2 N = 0$ и что для $\zeta \in E_i^2 - N$ множества $p_i^\zeta \cap P^p$ $(p = 1, \ldots, s)$ обладают лишь одноточечными компонентами. Отсюда видно, что для $\zeta \in E_i^2 - N$ тоже все компоненты множества $p_i^\zeta \cap S$ сводятся к одноточечным множествам. Придавая символу S_i^* значение, описанное в предшествующем замечании, мы получаем, что $p_i^\zeta \cap S_i^* = \emptyset$ для H_2 — почти всех $\zeta \in E_i^2$. Подавно, $\mathsf{H}_3 S_i^* = 0$. Так как тоже $\mathsf{H}_3(S - S_i^*) = 0$ (см. предшествующее замечание), то $\mathsf{H}_3 S = 0$.

3.10. Определение. Положим $\mathscr{L}(S) = \sup \sum_{p=1}^{s} \mathscr{L}(P^p)$, где верхняя грань берется по отношению ко всем конечным системам $P^1, \ldots, P^s$ непересекающихся открытых поверхностей, содержащихся в S.

Замечание. Из 1.7 и 3.5 вытекает, что следующие утверждения (i)–(iiii) эквивалентны между собой:

(i) $$\mathscr{L}(S) < +\infty .$$

(ii) $$\mathscr{L}_1(S) + \mathscr{L}_2(S) + \mathscr{L}_3(S) < +\infty .$$

(iii) $$\mathscr{L}_1^*(S) + \mathscr{L}_2^*(S) + \mathscr{L}_3^*(S) < +\infty .$$

(iiii) Существуют открытые поверхности $P^1, \ldots, P^s$ такие, что $\bigcup_{p=1}^{s} P^p = S$ и $\sum_{p=1}^{s} \mathscr{L}(P^p) < +\infty$.

3.11. Теорема. *Если некоторое измеримое множество $A \in \mathfrak{S}$ удовлетворяет соотношениям* (27), *то* $\mathscr{L}(S) < +\infty$.

Доказательство. Так как $A \in \bigcap_{i=1}^{3} \mathfrak{S}_i$, то по теореме 3.7

$$\mathscr{L}_1(S) + \mathscr{L}_2(S) + \mathscr{L}_3(S) < +\infty .$$

Теперь достаточно воспользоваться предшествующим замечанием.

Замечание. В предшествующем мы определили числа $\mathscr{L}_i(S)$, $\mathscr{L}(S)$ для замкнутой поверхности S, исходя из определения чисел $\mathscr{L}_i(P)$, $\mathscr{L}(P)$ для открытых поверхностей P. Это позволило нам обойтись без использования триангуляций поверхности S и ссылаться лишь на факты, касающиеся площади Лебега, которые довольно элементарно изложены в [3]. С другой стороны, более натуральным кажется определение площади Лебега поверхности S, отправляющееся от некоторого гомеоморфного отображения T полиэдра $\sum$ на поверхность S и от кусочно-линейных непрерывных равномерных аппроксимаций T_n этого гомеоморфизма в смысле, о котором говорилось во введении. Можно доказать, что эти определения эквивалентны. Придерживаясь второго определения и используя исследования Г. Федерера [7] (H. Federer) и П. Слепяна (P. Slepian) [24], можно было бы даже несколько проще доказать выше полученные результаты. Наконец, мы хотим отметить, что после окончания предлагаемой статьи (она является частью канд. диссертации, предложеннй в сентябре 1959 г. на мат.-физ. факультете КУ) мы имели возможность познакомиться с важными исследованиями [8], [6] Г. Федерера и М. Р. Демерса (M. R. Demers) совместно с Г. Федерером. Эти работы позволят получить соотношения (даже количественное) между Лебеговой площадью $(m-1)$-мерного псевдомногообразия в E^m и между „периметром“ ограниченного им измеримого множества. Мы предполагаем вернуться к этим вопросам в следующей статье.[5])

3.12. Теорема. *Для того, чтобы оба множества G^1, G^2 принадлежали системе $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{L}(S) < +\infty$ и $\mathsf{H}_3 S = 0$.*

Доказательство. См. 3.11, 3.9 и 3.8.

Замечание. Из результатов А. С. Безиковича (A. S. Besicovitch) [2] вытекает, что действительно может случиться, что $\mathscr{L}(S) < +\infty$ и $\mathsf{H}_3 S > 0$. Как видно из предшествующей теоремы, в этом случае некоторое из множеств G^1, G^2 не может принадлежать системе $\mathfrak{G}$.

Литература

[1] *П. С. Александров:* Комбинаторная топология. Москва-Ленинград 1947.

[2] *A. S. Besicovitch:* On the definition and value of the area of a surface. Quart. J. Math. vol. *16* (1945), 86—102.

[3] *L. Cesari:* Surface area. Princeton, New Jersey 1956.

[4] *E. De Giorgi:* Su una teoria generale della misura (r — 1)-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Ann. Mat. Pura Appl. (*4*), *36* (1954), 191—213.

[5] *E. De Giorgi:* Nuovi teoremi relativi alle misure (r — 1)-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni. Ricerche di Mat. *4* (1955), 95—113.

[6] *M. R. Demers* and *H. Federer:* On Lebesgue area II. Trans. Amer. Math. Soc. vol. *90* (1959), 499—522.

[7] *H. Federer:* An addition theorem for Lebesgue area. Proc. Amer. Math. Soc. vol. *6* (1955), 911—914.

[8] *H. Federer:* On Lebesgue area. Annals of Math. vol. *61* (1955), 289—353.

[9] *H. Federer:* A note on the Gauss - Green theorem. Proc. Amer. Math. Soc. *9* (1958), 447 — — 451.

[10] *W. H. Fleming:* Functions with generalized gradient and generalized surfaces. Ann. Mat. Pura Appl. (4) vol. *54* (1957), 93—104.

[11] *W. H. Fleming:* Functions whose partial derivatives are measures. Bull. Amer. Math. Soc. vol. *64* (1958), 364—366.

[12] *И. Крал* (*J. Král*): О лебеговой площади замкнутых поверхностей. Чех. мат. жур. *9* (*84*) 1959, 470—471.

[13] *J. Král:* Poznámka o množinách, jejichž charakteristická funkce má za parciální derivaci zobecněnou míru. Čas. pěst. mat. *86* (1961), 178—194.

[14] *K. Krickeberg:* Distributionen, Funktionen beschränkter Variation und Lebesguescher Inhalt nichtparametrischer Flächen. Ann. Mat. Pura Appl. (*4*) *54* (1957), 105—134.

[15] *J. Mařík:* The surface integral. Чех. мат. жур. *6* (*81*), 1956, 522—558.

[16] *J. Mařík:* Poznámka o délce Jordanovy křivky. Čas. pěst. mat. *83* (1958), 91—96.

[17] *M. H. A. Newman:* Elements of the topology of plane sets of points. Cambridge 1954.

[5]) Примечание. (Добавлено 16/XII 1960 г.) Во время печатания предлагаемой статьи появилась работа В. Флеминга (W. H. Fleming) [28], в отд. 12 которой изложены соответствующие результаты относительно соотношений между „периметром" множества и определенной интегрально-геометрической площадью ограничивающей его поверхности. Из них, в частности, вытекают количественные результаты для лебеговой площади широкого класса поверхностей.

[18] *W. F. Osgood:* A Jordan curve of positive area. Trans. Amer. Math. Soc. vol. *4* (1903), 107—112.
[19] *Chr. Y. Pauc:* Considérations sur les gradients généralisés de G. Fichera et E. De Giorgi. Ann. Mat. Pura Appl. (4) vol. *40* (1955), 183—192.
[20] *Chr. Y. Pauc:* Functions with generalized gradients in the theory of cell functions. Ann. Mat. Pura Appl. (4) vol. *44* (1957), 135—152.
[21] *T. Radó:* Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta litt. ac sc. Szeged, 1925, 101—121.
[22] *T. Radó:* Two-dimensional concepts of bounded variation and absolute continuity. Duke Math. J. *14* (1947), 587—608.
[23] *T. Radó:* Length and area. New York 1948.
[24] *P. Slepian:* Theory of Lebesgue area of continuous maps of 2-manifolds into *n*-space. Annals of Math. vol. *68* (1958), 669—689.
[25] *А. Г. Витушкин:* О многомерных вариациях. Москва 1955.
[26] *G. T. Whyburn:* Analytic topology, 1942.
[27] *R. L. Wilder:* A converse of the Jordan-Brower separation theorem in three dimensions. Trans. Amer. Math. Soc. vol. *32* (1930), 233—240.
[28] *W. H. Fleming:* Functions whose partial derivatives are measures. Illinois J. of Math. vol. *4* (1960), 452—478.

Summary

ON THE LEBESGUE AREA OF SIMPLE CLOSED SURFACES

JOSEF KRÁL, Praha

Let S be a simple closed surface in E_3 and let G^1, G^2 be its complementary domains. Since S is known to be finitely triangulable, both the Lebesgue area of its inclusion map into E_3, to be denoted by $\mathscr{L}(S)$, as well as the Lebesgue area of its orthogonal projection into the plane $\{\zeta; \zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] \in E_3, \zeta_i = 0\}$, to be denoted by $\mathscr{L}_i(S)$, can be considered. Given a point $\zeta \in E_3$ and a positive integer $i \in \langle 1, 3 \rangle$, we denote by p_i^ζ the straight line through ζ which is parallel to the i-th coordinate axis. Let $\mathfrak{M}^i(\zeta)$ stand for the system of all components C of $S \cap p_i^\zeta$ to which a segment v on p_i^ζ can be assigned such that $v \cap G^2 = \emptyset$ and v contains C in its interior (with respect to p_i^ζ). Further, put

$$M^i(\zeta) = \bigcup \mathfrak{M}^i(\zeta), \ B^i = G^1 \cup \bigcup_{\zeta \in E_3} M^i(\zeta).$$

Given a measurable set $A \subset E_3$, write χ_A for its characteristic function. Denote by $\mathfrak{S}_i$ the system of all Lebesgue measurable subsets A in E_3 for which the derivative $\partial \chi_A(\zeta)/\partial \zeta_i$ (to be taken in the sense of distribution theory) can be identified with a finite signed measure over E_3, and put $\mathfrak{S} = \bigcap_{i=1}^{3} \mathfrak{S}_i$.

Theorem. $B^i \in \mathfrak{S}_i \Leftrightarrow \mathscr{L}_i(S) < +\infty$.

Since $B^i \in \mathfrak{S}_i$ whenever a measurable set A with

$$G^1 \subset A \subset E_3 - G^2 \tag{*}$$

belongs to $\mathfrak{S}_i$, we obtain as a

Corollary 1. *If a measurable set A fulfilling* (*) *belongs to* $\mathfrak{G}_i$ *then* $\mathscr{L}_i(S) < +\infty$. *Every measurable set A with* (*) *belongs to* $\mathfrak{G}_i$ *if and only if* $\mathscr{L}_i(S) < +\infty$ *and S has* (3-*dimensional*) *measure zero.*

Corollary 2. *If a measurable set A fulfilling* (*) *belongs to* $\mathfrak{G}$ *then* $\mathscr{L}(S) < +\infty$. *Every measurable set A with* (*) *belongs to* $\mathfrak{G}$ *if and only if* $\mathscr{L}(S) < +\infty$ *and S has measure zero.*

Theorem. *Suppose that both* G^1 *and* G^2 *belong to* $\mathfrak{G}_i$ *and that there exists a measurable set A with* (*) *such that* $A \in \mathfrak{G}_j$, *where* $j \neq i$. *Then S has* (3-*dimensional*) *measure zero and* $\mathscr{L}_i(S) + \mathscr{L}_j(S) < +\infty$.

Corollary 3. *Both* G^1 *and* G^2 *belong to* $\mathfrak{G}$ *if and only if* $\mathscr{L}(S) < +\infty$ *and S has* (3-*dimensional*) *measure zero.*

(Corollary 3 and, partly, corollaries 1–2 were announced without proofs in [12].