

Tadeusz Rachwał

Contact d'une courbe régulière avec les hypersphères tangentes en un point d'inflexion d'ordre  $n - 1$  (l'espace euclidien à  $n$  dimensions)

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 11 (1961), No. 4, 570–587

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100485>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

CONTACT D'UNE COURBE RÉGULIÈRE AVEC LES HYPERSPHÈRES  
TANGENTES EN UN POINT D'INFLEXION D'ORDRE  $n - 1$   
(L'ESPACE EUCLIDIEN À  $n$  DIMENSIONS)

T. RACHWAŁ, Cracovie  
(Reçu le 21 juin 1960)

Dans cet article, on étudie les conditions pour le contact d'une courbe avec une hypersphère, dans un espace euclidien à  $n$  dimensions, sous l'hypothèse que la courbe donnée ait au point de contact considéré les  $n - 2$  premières courbures non-nulles, la dernière  $(n - 1)^{\text{e}}$  courbure s'annule en ce point tout en restant différente de zéro dans un voisinage du point en question. Pour l'hypersphère osculatrice à la courbe en ce point l'auteur introduit une nouvelle définition englobant aussi les cas étudiés auparavant. En s'appuyant sur ses résultats, l'auteur complète certains résultats des autres auteurs.

**Introduction.** L'ordre du contact de la courbe régulière avec la sphère tangente et osculatrice dans l'espace euclidien  $R_3$  dans le cas, où les deux courbures sont différentes de zéro, est traité dans les manuels.

J'ai examiné dans mes travaux [5] et [6] le cas où, dans le point étudié de la courbe, la première courbure est positive, mais la deuxième courbure est égale à zéro pour  $R_3$  (problème posé par S. GOLĀB). Ils donnent la solution de ce cas.

Les cas du contact de la courbe dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions ( $R_n$ ) furent étudiés par E. EGERVARY et K. HAVLÍČEK [1], [4].

E. Egervary s'occupait de l'étude des sphères osculatrices à dimensions variées, appartenant à la courbure régulière dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions. Il donna la formule pour le rayon  $R_{k-1}$  de la sphère osculatrice à  $k - 1$  dimensions, le rapport entre la courbure  $\kappa_{k+1}$  et les rayons des sphères osculatrices  $R_{k-1}$ ,  $R_k$ ,  $R_{k+1}$ , pour  $k = 1, \dots, n - 2$  ( $R_0 = 0$ ), et le rapport entre les rayons des sphères osculatrices à  $m$  dimensions pour  $m \leq n$  et les courbures d'une courbe.

K. Havlíček [4] étudiait les courbes régulières à courbures différentes de zéro  $\kappa_\lambda \neq 0$ ,  $\lambda = 1, \dots, n - 1$  et donna pour elles les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'ordre du contact de la courbe avec l'hypersphère ne soit pas plus petit que  $q$  ( $2 \leq q \leq n$ ). Il définit le lieu géométrique des centres de telles hypersphères tangentes; ce lieu, c'est l'espace euclidien à  $n - q$  dimensions, nommé espace  $q$  polaire de la courbe donnée dans le point étudié. Dans le cas où  $q = n$ , l'espace po-

laire se réduit à un point et on appelle l'hypersphère tangente hypersphère osculatrice au point donné.

K. Havlíček donna aussi les conditions nécessaires et suffisantes pour que la courbe soit hypersphérique, c'est-à-dire posée complètement sur l'hypersphère.

Dans le présent travail, je définis l'ordre du contact de la courbe régulière (dans l'espace  $R_n$ ,  $n \geq 3$ ) les hypersphères tangentes et osculatrices dans un tel point de la courbe où la courbure  $\kappa_{n-1}$  est égale à zéro.

Complétant le travail [4] de K. Havlíček, je donne le théorème (Nr. 5) définissant précisément l'ordre du contact de la courbe avec l'hypersphère osculatrice dans le cas, où toutes les courbures de la courbe au point étudié sont différentes de zéro ( $\kappa_\lambda > 0$  pour  $\lambda = 1, \dots, n-2$ ;  $\kappa_{n-1} \neq 0$ ) et j'introduis une définition généralisée de l'hypersphère osculatrice.

Le travail se compose de deux lemmes sur la structure de la fonction auxiliaire  $f_1(s)$  (pour la définition de la fonction  $f_1(s)$  voir formule 7), de cinq théorèmes sur l'ordre  $q$  du contact de la courbe avec l'hypersphère tangente et osculatrice, et d'un lemme concernant la valeur d'un certain déterminant.

Nous rapportons l'espace euclidien réel  $R_n$ , à  $n$  dimensions ( $n \geq 3$ ), au système cartésien de coordonnées rectangulaires. Nous désignons les coordonnées du vecteur  $\mathbf{v}$  dans ce système par  $v_\lambda$  ( $\lambda = 1, \dots, n$ ). Par le symbole  $\mathbf{r}$  nous désignons le radius vecteur, c'est-à-dire le vecteur accroché constamment à l'origine  $O(0, \dots, 0)$  du système et au bout au point  $P$  aux coordonnées  $r_1, \dots, r_n$ .

Supposons que  $\mathbf{r}$  soit le radius vecteur d'une certaine courbe  $C$  réelle non isotrope à l'équation de vecteur

$$(1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

où le paramètre  $s$  est un arc, où  $s \in \omega = (s_1, s_2)$ .

Quant à la fonction  $\mathbf{r}(s)$  qui est de la classe au moins  $n+1$  dans  $\omega$  nous supposons une d'entre les hypothèses (Z):

*Les vecteurs:*

$$(Z_1) \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \dots, \frac{d^n\mathbf{r}}{ds^n}$$

sont linéairement indépendants dans  $\omega$  ou

$$(Z_2) \quad 1. \text{ les vecteurs } \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \dots, \frac{d^n\mathbf{r}}{ds^n} \text{ sont linéairement indépendants pour } s \in \omega$$

et  $s \neq s_0$  où  $s_0$  est un point intérieur de l'intervalle  $\omega$ ;

2. tandis que dans le point  $s_0$  les vecteurs

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \dots, \frac{d^{n-1}\mathbf{r}}{ds^{n-1}}$$

sont linéairement indépendants.

Nous pouvons alors lier avec chaque point  $M(s)$  (défini par le vecteur  $\mathbf{r}(s)$ ) de la courbe  $C$ , le système — de  $n$ -vecteurs unitaires et réciproquement orthogonaux  $\mathbf{t}_i(s)$   $i = 1, \dots, n$  tels que

$$(2) \quad \mathbf{t}_1(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

est un vecteur tangent à la courbe  $C$ ,

$$(3) \quad \mathbf{t}_2(s), \dots, \mathbf{t}_n(s)$$

sont des vecteurs successifs normaux de la courbe au point  $M(s)$ , pour lesquels

$$(4) \quad \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{quand } i \neq j, \\ 1 & \text{quand } i = j. \end{cases}$$

Avec ces hypothèses ( $Z_1$ ) les courbures  $\kappa_i(s)$  de la courbe (pour  $\lambda = 1, \dots, n - 1$ ) existent, pendant que  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}$  sont positives et  $\kappa_{n-1} \neq 0$  et pour  $s \in \omega$  on a les formules connues de Frenet:

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathbf{t}'_1 &= \kappa_1 \mathbf{t}_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{t}'_j &= -\kappa_{j-1} \cdot \mathbf{t}_{j-1} + \kappa_j \cdot \mathbf{t}_{j+1}, \quad j = 2, \dots, n - 1, \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{t}'_n &= -\kappa_{n-1} \cdot \mathbf{t}_{n-1}. \end{aligned} \quad ^1)$$

Dans le cas des hypothèses ( $Z_2$ ) nous supposons que  $\kappa_{n-1}(s_0) = 0$ .

L'équation de l'hypersphère au centre dans le point  $S(v_1, \dots, v_n)$  défini par le vecteur  $\mathbf{v} = OS$  et au rayon  $\varrho$  est:

$$(6) \quad (\mathbf{r} - \mathbf{v})^2 = \varrho^2$$

où  $\mathbf{r}$  est un radius vecteur pour les points de l'hypersphère.

Supposons que l'hypersphère (6) soit tangente à la courbe  $C$  au point  $M(s_0) = M_0$ , alors son centre  $S$  est situé dans l'hyperplan normal de la courbe  $C$  au point  $M_0$ .

Introduisons maintenant les fonctions auxiliaires scalaires:

$$(7) \quad f_i(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}_i. \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

L'étude de l'ordre du contact de la courbe (1) avec l'hypersphère (6) donne la désignation de l'ordre de cette la plus basse fonction dérivée

$$(8) \quad F(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{v})^2 - \varrho^2$$

qui dans  $s_0$  est différente de zéro.

Si donc

$$(9) \quad F(s_0) = F'(s_0) = \dots = F^{(p)}(s_0) = 0, \quad \text{mais } F^{(p+1)}(s_0) \neq 0,$$

l'ordre du contact est égal à  $p$ .

<sup>1)</sup> Les accents désignent les dérivées par rapport à  $s$ .

Remarquons que

$$(10) \quad F'(s) = 2(\mathbf{r} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}_1 = 2f_1(s);$$

on peut donc étudier la fonction  $f_1(s)$  au lieu de  $F(s)$ .

Si

$$(11) \quad f_1^{(\lambda)}(s_0) = 0 \text{ pour } \lambda = 0, 1, \dots, p-1, \text{ mais } f_1^{(p)}(s_0) \neq 0,$$

alors l'ordre du contact est égal à  $p$ .

Pour la courbe régulière, les fonctions  $f_i(s)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) satisfont au système des relations analogues aux formules de Frenet, notamment

$$(12) \quad \begin{aligned} f_1' &= 1 + \kappa_1 \cdot f_2, \\ &\dots\dots\dots \\ f_i' &= -\kappa_{i-1} \cdot f_{i-1} + \kappa_i \cdot f_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n' &= -\kappa_{n-1} \cdot f_{n-1}. \end{aligned}$$

Sur la fonction  $f_1(s)$  nous démontrerons le théorème suivant:

**Lemme 1.** *Si la fonction  $\mathbf{r}(s)$  est de classe  $C^\lambda$ , où  $\lambda = \max(p+1, n+1)$  et remplit l'hypothèse ( $Z_1$ ) dans un certain intervalle non vide  $\omega$  sur l'arc  $s$ , alors pour  $p \geq 2$  les dérivées de la fonction  $f_1(s)$  par rapport à  $s$  sont représentées par la formule suivante:*

$$(13) \quad f_1^{(p)} = \sum_{j/0}^{p-2} M_{p,j} \cdot f_1^{(j)} + \sum_{j/2}^W N_{p,j} \cdot f_j$$

où

$$(14) \quad W = \text{minimum}(p+1, n),$$

(15)  $M_{p,j}$  et  $N_{p,j}$  sont certaines fonctions des courbures  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  de la courbe et de leurs dérivées dont nous ne déterminons pas la structure,

$$(16) \quad N_{p,p+1} = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \dots \kappa_p, \quad \text{quand } W = p+1,$$

$$(17) \quad N_{p,n} = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \dots \kappa_{n-2} \cdot \kappa_{n-1}^{(p-n+1)} + \sum_{i/0}^{p-n} \kappa_{n-1}^{(i)} \cdot \bar{N}_{p,n}^i, \quad \text{quand } W = n$$

et nous supposons:

$$\sum_{i/0}^{p-n} \kappa_{n-1}^{(i)} \cdot \bar{N}_{p,n}^i = 0 \quad \text{où } p-n < 0.$$

Nous omettons la démonstration de ce lemme effectuée à l'aide de l'induction mathématique et résultant facilement des formules (12).

**Théorème 1.** *Si pour la courbe  $C$  à l'équation  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  les hypothèses suivantes sont remplies:*

$$(18) \quad 1. \mathbf{r}(s) \text{ est de classe } n+1,$$

2. possède les courbures  $\kappa_i > 0$  pour  $i = 1, \dots, n - 2$  au point  $s_0$ , et dans un certain entourage  $\omega = (s_1, s_2)$  de  $s_0$ ,
3.  $\kappa_{n-1}(s_0) = 0$ ,
4.  $\kappa_{n-1}(s) \neq 0$  pour  $s \neq s_0$  et  $s \in \omega$ ;

alors il existe  $\infty^1$  hypersphères tangentes à  $C$  dans le point  $M_0 = M(s_0)$  déterminé par le vecteur  $\mathbf{r}(s_0)$ , telles que l'ordre du contact  $q$  de ces hypersphères avec la courbe  $C$  n'est pas plus petit que  $n - 1 : q \geq n - 1$ .

Démonstration. Prenons en considération le système local de Frenet à la base  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n)$  accroché dans le point  $M_0$ . Le centre  $S$  de l'hypersphère tangente à  $C$  dans  $M_0$  ait dans ce système les coordonnées  $(-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$ .

Alors

$$(19) \quad \mathring{\mathbf{r}} - \mathring{\mathbf{v}} = \sum_{i/0}^n \alpha_i \cdot \mathring{\mathbf{t}}_i$$

d'où nous obtenons

$$(20) \quad (\mathring{\mathbf{r}} - \mathring{\mathbf{v}}) \cdot \mathring{\mathbf{t}}_j = \mathring{f}_j = \alpha_j.$$

Nous définirons l'hypersphère, dont on parle dans le théorème, en donnant les coordonnées  $-\alpha_i$  de son centre  $S$  dans le système local de Frenet.  $\alpha_1 = 0$ , car  $S$  est situé sur l'hyperplan normal de la courbe  $C$  dans  $M_0$ . Prenons maintenant  $n - 2$  des équations en les inconnues  $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ :

$$(21) \quad \begin{aligned} 1 + \mathring{\kappa}_1 \alpha_2 &= 0, \\ \mathring{N}_{p,2} \cdot \alpha_2 + \mathring{N}_{p,3} \cdot \alpha_3 + \dots + \mathring{N}_{p,p} \cdot \alpha_p + \mathring{\kappa}_1 \cdot \mathring{\kappa}_2 \dots \mathring{\kappa}_p \cdot \alpha_{p+1} &= 0 \\ &\text{pour } 2 \leq p < n - 2, \\ \mathring{N}_{n-2,2} \cdot \alpha_2 + \dots + \mathring{N}_{n-2,n-2} \cdot \alpha_{n-2} + \mathring{\kappa}_1 \cdot \mathring{\kappa}_2 \dots \mathring{\kappa}_{n-2} \cdot \alpha_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Comme d'après l'hypothèse  $\mathring{\kappa}_i > 0$  pour  $i = 1, \dots, n - 2$ , on peut déterminer tour à tour les inconnues en partant des équations (21) d'en haut. Nous aurons:

$$(22) \quad \mathring{\alpha}_1 = 0, \quad \mathring{\alpha}_2 = \frac{-1}{\mathring{\kappa}_1}, \quad \dots, \quad \mathring{\alpha}_p = \frac{-\sum_{i/1}^{p-1} \mathring{N}_{p,i} \cdot \mathring{\alpha}_i}{\mathring{\kappa}_1 \cdot \mathring{\kappa}_2 \dots \mathring{\kappa}_{p-1}} \quad \text{pour } p = 3, \dots, n - 1.$$

Nous déterminerons maintenant l'ordre du contact  $q$  pour les hypersphères tangentes à  $C$  aux centres au point  $S(-\mathring{\alpha}_1, -\mathring{\alpha}_2, \dots, -\mathring{\alpha}_{n-1}, -\mathring{\alpha}_n)$ , où la coordonnée  $\mathring{\alpha}_n$  est quelconque. Il est facile de remarquer

$$(23) \quad \mathring{f}_1^{(p)} = 0 \quad \text{pour } p = 1, \dots, n - 2.$$

Calculons

$$(24) \quad \mathring{f}_1^{(n-1)} = \sum_{j/2}^n \mathring{N}_{n-1,j} \cdot \mathring{\alpha}_j,$$

mais d'après l'hypothèse  $\overset{\circ}{\kappa}_{n-1} = 0$ , alors

$$(25) \quad f_1^{\overset{\circ}{(n-1)}} = \sum_{j/2}^{n-1} \overset{\circ}{N}_{n-1,j} \cdot \overset{\circ}{\alpha}_j;$$

$$(26) \quad \text{si } \sum_{j/2}^{n-1} \overset{\circ}{N}_{n-1,j} \cdot \overset{\circ}{\alpha}_j \neq 0, \text{ alors } f_1^{\overset{\circ}{(n-1)}} \neq 0$$

$$(27) \quad \text{et l'ordre du contact } q = n - 1$$

$$(28) \quad \text{si par contre } \sum_{j/2}^{n-1} \overset{\circ}{N}_{n-1,j} \cdot \overset{\circ}{\alpha}_j = 0, \text{ alors } f_1^{\overset{\circ}{(n-1)}} = 0 \text{ et l'ordre } q > n - 1.$$

Notre théorème est donc vrai.

Pour simplifier l'énoncé des théorèmes suivants, nous introduisons la désignation suivante:

$$(29) \quad W_p = \sum_n^{n-2} \overset{\circ}{N}_{p,i} \cdot \overset{\circ}{\alpha}_i.$$

**Théorème 2.** Si pour la courbe  $C$  à l'équation  $r = r(s)$  nous avons:

- (30) 1.  $r(s)$  est de classe  $n + p$  au moins,  
 2. les hypothèses 2, 3, 4 du théorème 1 sont vérifiées et en outre  
 3.  $\overset{\circ}{\kappa}_{n-1}^{(\lambda)} = 0$  pour  $\lambda = 1, \dots, p$ ;  
 4.  $W_h = 0$  pour  $h = n - 1, \dots, n + p - 2$ ;  
 5.  $W_{p+n-1} \neq 0$ ,

alors pour les hypersphères aux centres au point  $S(-\overset{\circ}{\alpha}_1, -\overset{\circ}{\alpha}_2, \dots, -\overset{\circ}{\alpha}_{n-1}, -\alpha_n)$  où  $\overset{\circ}{\alpha}_i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) est désigné par les formules (22) et  $\alpha_n$  quelconque, l'ordre du contact avec la courbe  $C$  dans  $M_0$  est égal à  $n + p - 1$ . Les centres de telles hypersphères tangentes sont situés sur la droite parallèle au vecteur normal  $\overset{\circ}{t}_n$ .

Démonstration. Des considérations effectuées pendant la démonstration du théorème 1 il résulte que

$$(31) \quad f_1^{(p)} = 0 \quad \text{pour } p = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Nous calculons les dérivées suivantes de la fonction  $f_1$  et de sa valeur pour  $s = s_0$ ;  $f_1^{(n)} = 0$  d'après les hypothèses et le lemme 1.

Appliquant le raisonnement inductif et en s'appuyant sur le lemme 1 on démontre que

$$(32) \quad f_1^{(p)} = 0, \quad \text{pour } p = n + 1, \dots, p + n - 2,$$

mais

$$(33) \quad f_1^{\overset{\circ}{(p+n-1)}} = W_{p+n-1} \neq 0$$

sans prendre en considération  $\alpha_n$ , et l'ordre  $q = p + n - 1$  en accord avec la thèse du théorème.

Les centres de telles hypersphères sont situés sur la droite à l'équation

$$(34) \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_i = -\overset{\circ}{\alpha}_i + \sigma, \quad \text{pour } i = 2, \dots, n-1, \quad \xi_n \text{ quelconques,}$$

ce qui était à démontrer.

**Théorème 3.** Si pour la courbe  $C$  à l'équation  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  nous avons:

- (35) 1.  $\mathbf{r}(s)$  est de classe  $n + p + 1$  au moins,
2. les hypothèses 2, 3, 4 du théorème 1 sont vérifiées et en plus pour  $s = s_0$ ,
3.  $\overset{\circ}{\kappa}_{n-1}^{(\lambda)} = 0$  pour  $\lambda = 1, \dots, p$ ,
4.  $\overset{\circ}{\kappa}_{n-1}^{(p+1)} \neq 0$ ,
5.  $W_h = 0$  pour  $h = n-1, \dots, p+n-1$ ,

alors il n'existe qu'une hypersphère tangente à  $C$  dans  $M(s_0)$ , pour laquelle l'ordre du contact  $q$  avec la courbe  $C$  ne sera pas plus petit que  $n + p + 1$ :

$$q \geq n + p + 1.$$

Les coordonnées du centre de cette hypersphère dans le système local  $(\hat{\mathbf{t}}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  seront

$$(36) \quad -\overset{\circ}{\alpha}_1, -\overset{\circ}{\alpha}_2, \dots, -\overset{\circ}{\alpha}_{n-1}, -\overset{\circ}{\alpha}_n = \frac{W_{p+n}}{\overset{\circ}{\kappa}_1 \cdot \overset{\circ}{\kappa}_2 \cdot \dots \cdot \overset{\circ}{\kappa}_{n-2} \cdot \overset{\circ}{\kappa}_{n-1}^{(p+1)}},$$

où  $\overset{\circ}{\alpha}_1, \overset{\circ}{\alpha}_2, \dots, \overset{\circ}{\alpha}_{n-1}$  sont les nombres désignés par les formules (22).

Démonstration. Nous supposons  $\alpha_i = \overset{\circ}{\alpha}_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Des hypothèses et des théorèmes précédents il résulte que

$$(37) \quad \overset{\circ}{f}_1^{(v)} = 0 \quad \text{pour } v = 0, 1, \dots, p+n-1.$$

Nous calculons:

$$(38) \quad \overset{\circ}{f}_1^{(n+p)} = W_{p+n} + \overset{\circ}{\kappa}_1 \cdot \dots \cdot \overset{\circ}{\kappa}_{n-2} \cdot \overset{\circ}{\kappa}_{n-1}^{(p+1)} \cdot \alpha_n.$$

Si nous supposons

$$(39) \quad \alpha_n = \overset{\circ}{\alpha}_n = \frac{-W_{p+n}}{\overset{\circ}{\kappa}_1 \cdot \dots \cdot \overset{\circ}{\kappa}_{n-2} \cdot \overset{\circ}{\kappa}_{n-1}^{(p+1)}},$$

alors

$$(40) \quad \overset{\circ}{f}_1^{(n+p)} = 0,$$

et alors nous avons l'hypersphère tangente à  $C$  dans son point  $M(s_0)$  précisément définie.

Le centre  $S$  de cette hypersphère a dans le système local de Frenet les coordonnées  $-\overset{\circ}{\alpha}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) définies par les formules (22) et (39).



Pour cette hypersphère tangente on a

$$f_1^{(\lambda)} = 0, \quad \text{où } \lambda = 0, 1, \dots, n + p$$

et l'ordre du contact  $q$  est

$$(41) \quad q \geq n + p + 1$$

ce qui était à démontrer.

K. Havlíček donne dans son travail [4] la définition de l'hypersphère osculatrice, c'est une telle hypersphère, qui a avec la courbe le contact d'ordre  $q \geq n$ .

Selon cette définition les hypersphères tangentes du théorème 2 seraient osculatrices, comme aussi l'hypersphère du théorème 3.

En rapport avec cela je propose la modification de la définition de l'hypersphère osculatrice à la courbe régulière.

**Définition.** Si la courbe régulière  $C$  a dans le point  $M_0$  une seule hypersphère tangente, précisément définie, dont l'ordre du contact est maximal d'entre les ordres des hypersphères tangentes à  $C$  dans  $M_0$ , alors nous appelons une telle hypersphère tangente hypersphère osculatrice de la courbe  $C$  dans son point  $M_0$ .

D'accord avec cette définition, les hypersphères du théorème 2 sont tangentes à la courbe avec un certain ordre du contact, tandis que l'hypersphère définie par le théorème 3 est osculatrice de la courbe  $C$  dans  $M_0$ .

Avant d'énoncer le théorème qui rendrait possible une précise définition de l'ordre  $q$ , du contact de la courbe  $C$  avec l'hypersphère osculatrice, nous introduirons encore un lemme sur la fonction  $f_1(s)$ .

**Lemme 2.** Si pour la courbe  $C$  à l'équation  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ,  $s \in (s_1, s_2)$  où  $\mathbf{r}(s)$  est de classe  $n + 1$  au moins, les hypothèses  $(Z_1)$  sont remplies, alors la fonction  $f_1(s)$  dans l'intervalle  $(s_1, s_2)$  est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre  $n$ :

$$(42) \quad C_n \cdot f_1^{(n)} + C_{n-1} \cdot f_1^{(n-1)} + \dots + C_0 \cdot f_1 = \Phi,$$

dans laquelle les coefficients  $C_p$  pour  $p = 0, 1, \dots, n$  et  $\Phi$  sont les polynômes en courbures  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  et leurs dérivées et

$$(43) \quad C_n = -\kappa_1^{n-1} \cdot \kappa_2^{n-2} \dots \kappa_{n-1};$$

$$(44) \quad C_{n-1} = (\kappa_1^{n-1} \cdot \kappa_2^{n-2} \dots \kappa_{n-1})';$$

$$(45) \quad C_p = A_p + \sum_{i/0}^{n-p-2} \delta_i \cdot \binom{p+i}{p} \cdot \kappa_1^{(i)} \cdot B_{p+i}; \quad p = 2, 3, \dots, n-2,$$

les fonctions  $A_p$  et  $B_{p+i}$  sont les mineurs algébriques du déterminant  $\Omega$  donné sur le tableau 1, correspondant aux éléments  $f_1^{(p)}$  de la 1<sup>ère</sup> et de la 2<sup>ème</sup> bande;

$$(46) \quad C_1 = \Phi + \sum_{i/0}^{n-3} \binom{i+1}{i} \cdot \kappa_1^{(i)} \cdot B_{i+1},$$

où  $\Phi$  est le mineur du déterminant  $\Omega$  formé par le biffage de la première ligne et de la dernière colonne;

$$(47) \quad C_0 = \sum_{i=0}^{n-2} \kappa_1^{(i)} \cdot B_i.$$

	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=n-2$	$q=n-1$	$q=n$
$p=1$	$a_{1,1}$					$f_1^{(0)}$ $-f_1^{(1)}$ $-f_1^{(2)}$ ---
$p=2$	-1	$a_{2,2}$				$-f_1^{(n-1)}$ $-f_1^{(n)}$ $-K_1 f_1$ $-(K_1 f_1)'$ $-(K_1 f_1)''$ ---
$\Omega(s) =$ $n$		-1	$a_{3,3}$			$-(K_1 f_1)^{(n-1)}$ $-(K_1 f_1)^{(n-2)}$
$p=3$	$a_{3,1}$	-1	-1			$= 0$
			-1			
$p=n-2$				$a_{n-2, n-2}$		
$p=n-1$				-1	$a_{n-1, n-1}$	
$p=n$				$-K_{n-1}$	-1	$a_{n, n}$

$a_{1,1} = K_{n-1}$   
 $a_{2,1} = K_{n-1}$   
 $a_{3,1} = K_{n-1}$

Tab. 1.

Démonstration. Prenons en considération les relations (12):

$$(48) \quad \begin{aligned} f_1' &= 1 + \kappa_1 \cdot f_2, \\ &\dots\dots\dots \\ f_j' &= -\kappa_{j-1} \cdot f_{j-1} + \kappa_j \cdot f_{j+1}, \quad j = 2, \dots, n-1; \\ &\dots\dots\dots \\ f_n' &= -\kappa_{n-1} \cdot f_{n-1}. \end{aligned}$$

Nous différencions ces équations tour à tour, la première  $(n-1)$  fois, l'équation  $j^{\text{ème}}$   $(n-j)$  fois ( $j = 2, \dots, n-1$ ); nous obtiendrons le système de  $[n(n+1)/2] - 1$  équations dont nous éliminons les fonctions  $f_i$  ( $i = 2, \dots, n$ ) et leurs dérivées. Nous obtiendrons en fin de compte la relation entre les fonctions  $f_1^{(i)}$  ( $i = 0, \dots, n$ ), les courbures  $\kappa_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) et leur dérivées  $\kappa_i^{(p)}$  sous la forme du déterminant  $\Omega$  (tableau 1).

Commentaires du tableau 1. Le déterminant  $\Omega$  est divisé en  $n$  „bandes“ horizontales et  $n$  „poteaux“ verticaux. Les poteaux et les bandes le divisent en système de matrice.

La bande  $p^{\text{ième}}$ ,  $p = 1, \dots, n$ , contient  $n - p + 1$  lignes. Semblablement, le poteau  $q^{\text{ième}}$  ( $q = 1, \dots, n$ ) contient  $n - q + 1$  colonnes.

	$K_1$									$1 - f_1^n$	
$p=1$	$K_1$	$K_1$								$-f_1^n$	
	$K_1'$	$(2)K_1'$	$K_1$							$-f_1^{2n}$	
	$K_1''$	$(3)K_1''$	$(\frac{3}{2})K_1'$	$K_1$						$-f_1^{3n}$	
	$K_1^{(n)}$	$(\frac{n}{2})K_1^{(n)}$	$(\frac{n}{2})K_1''$	$(\frac{3}{2})K_1'$	$K_1$					$-f_1^{(n)n}$	
		-1			$K_2$					$-K_1 f_1$	
$p=2$			-1		$K_2'$	$K_2$				$-(K_1 f_1)^2$	
				-1	$K_2''$	$(\frac{3}{2})K_2'$	$K_2$			$-(K_1 f_1)^3$	
					-1	$K_2^{(n)}$	$(\frac{n}{2})K_2'$	$(\frac{3}{2})K_2''$	$K_2$	$-(K_1 f_1)^n$	
$p=3$	$-K_2$					-1		$K_3$			
	$-K_2'$	$-K_2$					-1	$K_3'$	$K_3$		
	$-K_2''$	$-2K_2'$	$-K_2$					-1	$K_3''$	$(\frac{3}{2})K_3'$	
$p=4$					$-K_3$				-1	$K_4$	
					$-K_3'$	$K_3$				-1	$K_4'$
$p=5$							$-K_4$			-1	
		$q=1$			$q=2$			$q=3$		$q=4$	$q=5$

Remarque: dans les places non remplies il y a des zéros.

Tab. 1a.

Nous désignons les éléments du déterminant  $\Omega$  par le symbole  $a_{i,j}$ , où  $p$  est le numéro de la bande et  $q$  est le numéro du poteau. Les indices  $i, j$  sont les numéros locaux du vers et de la colonne de la matrice aux indices  $p, q$ .

Les éléments  $a_{i,j}$  sont définis de la façon suivante pour le cas  $p, q \approx 1, \dots, n-1$ :

1. Si  $p = q$ , alors

$$a_{i,j} = \binom{i-1}{j-1} \cdot \kappa_p^{(i-j)}, \text{ quand } i-j \geq 0, \quad a_{i,j} = 0, \text{ quand } i-j < 0.$$

2. Si  $p = q + 1$  alors

$$a_{i,j} = -1, \text{ quand } j = i + 1, \quad a_{i,j} = 0, \text{ quand } j \neq i + 1.$$

3. Si  $p = q + 2$  alors

$$a_{i,j} = -\binom{i-j}{j-1} \cdot \kappa_p^{(i-j)}, \text{ quand } i-j \geq 0, \quad a_{i,j} = 0, \text{ quand } i-j < 0.$$

4. Si  $p < q$  ou  $p > q + 2$ , alors

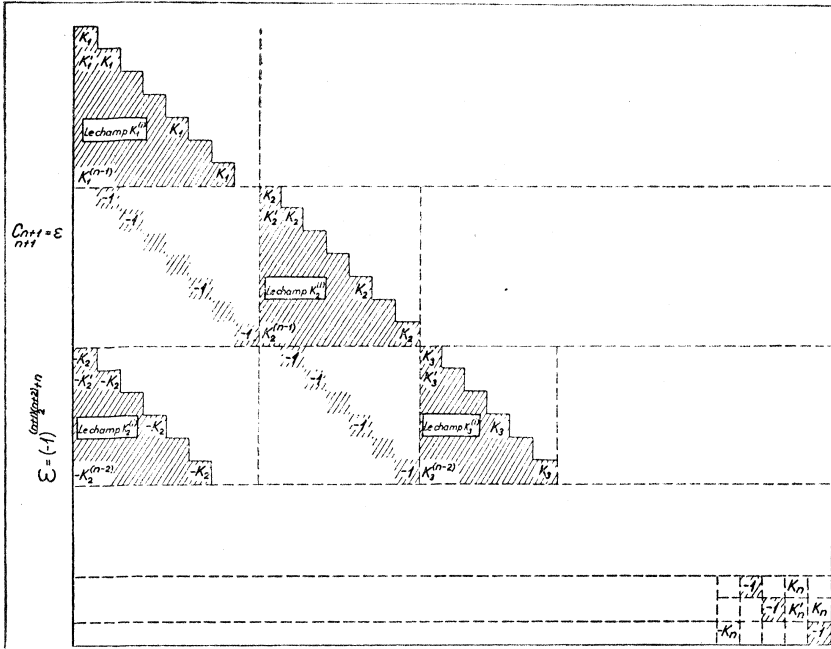
$$a_{i,j} = 0.$$

Dans le cas où  $p = n$  et  $q = n$ , les éléments du déterminant sont situés dans le tableau.

Remarque. Sur le tableau 1a on donne le déterminant  $\Omega$  pour l'espace  $R_5$  ( $n = 5$ ).

Développant le déterminant  $\Omega$  d'après les éléments de la dernière colonne, nous obtenons:

$$(49) \quad C_n \cdot f_1^{(n)} + \dots + C_0 \cdot f_1 = \Phi$$



Tab. 2.

où  $C_p$  sont certains mineurs ou bien la somme de mineurs du déterminant  $\Omega$ .

La validité des formules (46), (47) pour  $C_p$  où  $p = 0, \dots, n - 1$  résulte directement du développement du déterminant.

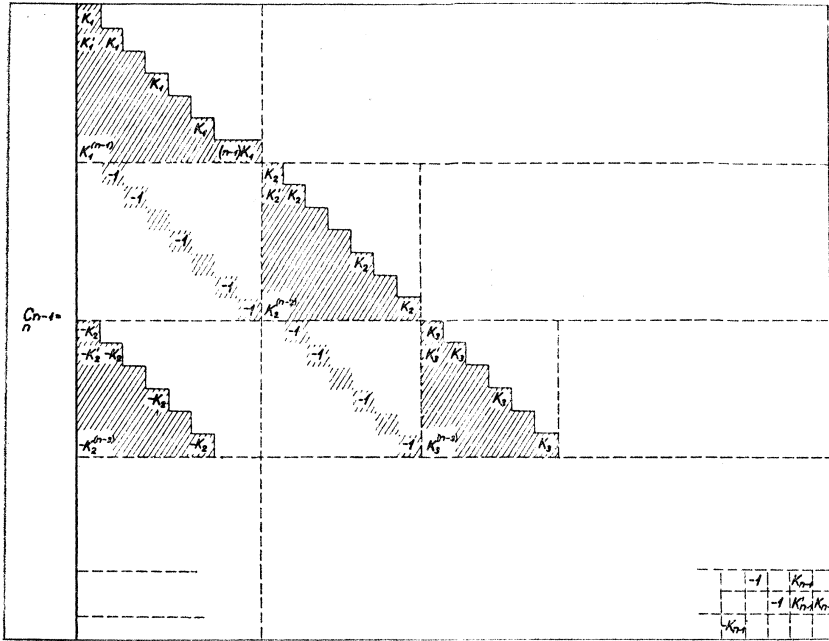
Nous discutons la fonction  $\Phi$  à la page 582. Nous démontrerons la validité de (43).

Nous ferons la démonstration à l'aide de l'induction mathématique. Pour  $n = 3$  nous obtenons  $C_3 = -\kappa_1^2 \kappa_2$ . Supposons maintenant la validité de (43) pour  $n \geq 3$  et

calculons  $C_{n+1}$ . Nous développons tour à tour  $C_{n+1}$  définis par le déterminant (tableau 2) d'après les éléments de la 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup>, ...,  $n$ <sup>ème</sup> ligne, et puis d'après la colonne  $(n + 1)$ <sup>ère</sup>; nous obtiendrons

$$(50) \quad C_{n+1} = (-1)^{2n + [(n+1)(n+2)/2]} \cdot \kappa_1^n \cdot \bar{C}_n.$$

Le déterminant  $\bar{C}_n$  a la même construction que le déterminant  $C_n$ , et en diffère seulement par ceci: au lieu de  $\kappa_i$  il contient  $\kappa_{i+1}$  (pour  $i = 1, \dots, n - 1$ ) et il n'est pas multiplié par  $(-1)^{[n(n+1)/2]+n+1}$ .



Tab. 3.

Profitant de la susdite remarque nous obtenons

$$(51) \quad C_{n+1} = - \kappa_1^n \cdot \kappa_2^{n-1} \dots \kappa_n,$$

ce qui était à démontrer.

Nous démontrerons maintenant la validité de la formule (44). Le tableau 3 donne  $C_{n-1}$  sous la forme d'un déterminant. Nous développons ce déterminant et obtenons

$$(52) \quad C_{n-1} = \kappa_1^{n-2} \cdot \kappa_2^{n-3} \dots \kappa_{n-2} \cdot W_n,$$

où  $W_n$  est le déterminant donné sur le tableau 4.

On démontre à l'aide de l'induction mathématique (lemme 3) que

$$(53) \quad W_n = \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa'_{n-1} + 2\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa'_{n-2} \cdot \kappa_{n-1} + \dots + (n - 1) \kappa'_1 \dots \kappa_{n-1};$$

tenant compte de (52) et (53) nous obtenons

$$(54) \quad C_{n-1} = (\kappa_1^{n-1} \cdot \kappa_2^{n-2} \dots \kappa_{n-1})'$$

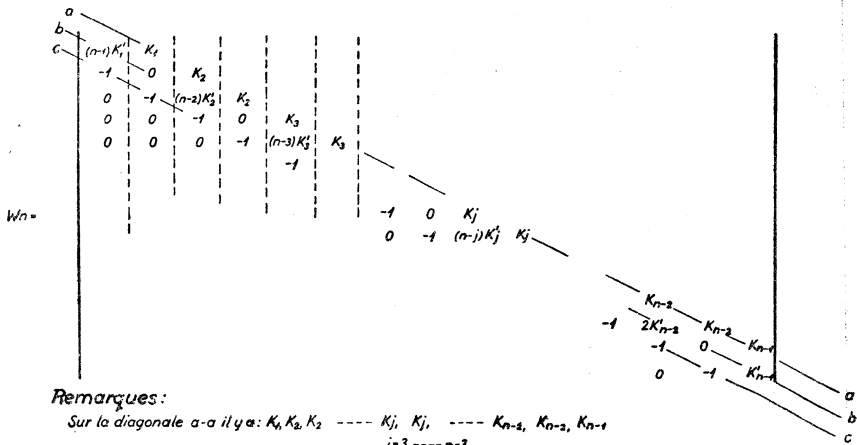
ce qui était à démontrer.

**Lemme 3.** Pour  $n \geq 3$  le déterminant  $W_n$  défini par le tableau 4 est

$$(55) \quad W_n = \begin{vmatrix} 0, \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa'_{n-1} + 2\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa'_{n-2} \kappa_{n-1} + \dots + (n-1) \kappa'_1 \dots \kappa_{n-1} \\ -1, \kappa_2 \kappa_3 \dots \kappa_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Pour  $n = 3$  notre lemme est vrai. Calculons maintenant  $W_{n+1}$ . Nous transformons le déterminant  $W_{n+1}$  et arrivons à

$$(56) \quad W_{n+1} = \begin{vmatrix} n \cdot \kappa'_1 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & & \overline{W}_n \end{vmatrix},$$



Remarques:

Sur la diagonale a-a il y a:  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_j, \kappa_j, \dots, \kappa_{n-2}, \kappa_{n-2}, \kappa_{n-1}$   
 $j=3, \dots, n-3,$

• " b-b =  $(n-1) \kappa'_1, 0, (n-2) \kappa'_2, 0, \dots, (n-j) \kappa'_j, 0, \dots, 2\kappa'_{n-2}, 0, \kappa'_{n-1}$

• " c-c = seulement "-1".

Les éléments du déterminant qui restent sont égales à zéro (0).

Tab. 4.

où  $\overline{W}_n$  diffère de  $W_n$  par ce qu'au lieu de  $\kappa_j^{(i)}$  il s'y trouve  $\kappa_{j+1}^{(i)}$ . Maintenant on calcule facilement que

$$(57) \quad W_{n+1} = \begin{vmatrix} 0, \kappa_1 \cdot \kappa_2 \dots \kappa'_n + \dots + n \cdot \kappa'_1 \dots \kappa_n \\ -1, \kappa_2 \cdot \kappa_3 \dots \kappa_n \end{vmatrix}.$$

De ce pas inductif, il résulte directement que

$$W_n = \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa'_{n-1} + 2\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa'_{n-2} \kappa_{n-1} + \dots + (n-1) \kappa'_1 \dots \kappa_{n-1},$$

ce qui était à démontrer.

La fonction  $\Phi_n$  est le mineur algébrique du déterminant  $\Omega_n$  multiplié par  $-1$ . La

		$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=n-3$	$q=n-2$	$q=n-1$
$p=1$		$b_{11}$					
$p=2$		$-1$	$-1$				
$\phi = \varepsilon$			$-1$	$-1$			
		$a_{ij}$	$a_{ij}$	$a_{ij}$			
$p=n-2$					$-1$	$-1$	$a_{n-2, n-2}$
$p=n-1$							$-1$
$p=n$							$-1$

$\varepsilon = (1-1)^{n(n-1)/2}$

Tab. 5.

	$K_1'$	$K_1$																	
	$K_1''$	$2 K_1'$	$K_1$																
	$K_1'''$	$3 K_1''$	$(3) K_1'$	$K_1$															
	$K_1^{(4)}$	$4 K_1'''$	$(3) K_1''$	$(3) K_1'$	$K_1$														
		$-1$				$K_2$													
			$-1$			$K_2'$	$K_2$												
				$-1$		$K_2''$	$(3) K_2'$	$K_2$											
					$-1$	$K_2'''$	$(3) K_2''$	$(3) K_2'$	$K_2$										
$\phi =$	$-K_2$									$K_3$									
	$-K_2'$	$-2K_2$	$-K_2$							$K_3'$	$K_3$								
										$K_3''$	$2K_3'$	$K_3$							
						$-K_3$					$-1$								
						$-K_3'$	$-K_3$					$-1$							

Remarque: dans les places non remplies il y a des zéros.

Tab. 5a.

structure de la fonction  $\Phi$  est donnée sur le tableau 5, et pour le cas de l'espace  $R_5$ , ce déterminant est écrit sur le tableau 5a.

Commentaire pour le tableau 5. Le déterminant est divisé en  $n$  bandes hori-

zontales et  $n - 1$  poteaux verticaux. Ils divisent le déterminant en système de matrice.

La bande  $p^{\text{ième}}$  ( $p = 1, \dots, n$ ) contient  $n - p + 1$  vers.

Le poteau  $q^{\text{ième}}$  ( $q = 1, \dots, n$ ) contient  $n - q + 1$  colonnes.

Les nombres  $b_{i,j}$  sont les éléments de la matrice pour  $p = 1, q = 1$ .

Nous désignons les éléments des matrices qui restent par  $a_{i,j}$  où  $i$  et  $j$  sont les numéros locaux de la ligne et de la colonne pour la matrice  $\begin{pmatrix} p, q \end{pmatrix}$ .

$$1. \quad \begin{aligned} b_{i,j} &= \binom{i}{j-1} \kappa_p^{(i-j+1)}, \quad \text{pour } i - j + 1 \geq 0, \\ b_{i,j} &= 0, \quad \text{où } i - j + 1 < 0. \end{aligned}$$

2. Dans le reste des bandes, il y a les mêmes éléments  $a_{i,j}$  que dans le déterminant  $\Omega$  pour  $q = 1, \dots, n - 1$ .

**Théorème 4.** Si pour la courbe  $C$  à l'équation  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  où  $s \in (s_1, s_2)$  nous avons:

1.  $\mathbf{r}(s)$  est de classe  $n + m + 2p + 2$  au moins dans l'intervalle  $(s_1, s_2)$ ,
2. les hypothèses 2, 3, 4 du théorème 1 sont satisfaites et en plus au point  $M_0 = M(s_0)$  de cette courbe ( $s_0 \in (s_1, s_2)$ ) on a:

$$(59) \quad \begin{aligned} 3. \quad \overset{\circ}{\kappa}_{n-1}^{(j)} &= \kappa_{n-1}^{(j)}(s_0) = 0, \quad \text{pour } j = 1, \dots, p; \\ 4. \quad \overset{\circ}{\kappa}_{n-1}^{(p+1)} &= \kappa_{n-1}^{(p+1)}(s_0) \neq 0; \\ 5. \quad W_h &= 0, \quad \text{pour } h = n - 1, \dots, p + n - 1; \\ 6. \quad \overset{\circ}{\Phi}_{n-1}^{(2p+\lambda)} &= \Phi_{n-1}^{(2p+\lambda)}(s_0) = 0, \quad \text{pour } \lambda = 0, 1, \dots, m; \\ 7. \quad \overset{\circ}{\Phi}_{n-1}^{(2p+m+1)} &= \Phi_{n-1}^{(2p+m+1)}(s_0) \neq 0, \end{aligned}$$

alors l'ordre  $q$  du contact de la courbe  $C$  avec l'hypersphère osculatrice à  $C$  en  $M_0$ , aux coordonnées du centre dans le système local de Frenet

$$(59) \quad \begin{aligned} \check{\alpha}_1 &= 0, \quad -\check{\alpha}_2 = \frac{1}{\overset{\circ}{\kappa}_1}, \quad -\check{\alpha}_p = \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \overset{\circ}{N}_{p,i} \cdot \check{\alpha}_i}{\overset{\circ}{\kappa}_1 \cdot \overset{\circ}{\kappa}_2 \dots \overset{\circ}{\kappa}_{p-1}}, \quad \text{où } p = 3, \dots, n - 1; \\ -\check{\alpha}_n &= \frac{W_{p+n}}{\overset{\circ}{\kappa}_1 \cdot \overset{\circ}{\kappa}_2 \dots \overset{\circ}{\kappa}_{n-2} \cdot \overset{\circ}{\kappa}_{n-1}^{(p+1)}}; \end{aligned}$$

est égal à  $n + p + m$ , c'est-à-dire

$$(60) \quad q = n + p + m.$$

Démonstration. Du théorème 3, il résulte qu'avec les hypothèses données, on a

$$(61) \quad f_1^{(\lambda)}(s_0) = 0 \quad \text{pour } \lambda = 0, 1, \dots, n + p.$$



Des formules (45) et (46), qui définissent les coefficients  $C_j$  ( $j = 0, \dots, n - 2$ ), nous obtenons, qu'ils sont infiniment petits, d'ordre  $p^{\text{ième}}$  au moins, dans l'entourage de  $s_0$ .

Cela résulte de ce que dans les déterminants qui définissent  $C_p$  c'est-à-dire dans  $A_p$  ( $p = 0, \dots, n - 2$ ) et  $B_q$  ( $q = 0, \dots, n - 2$ ), l'avant-dernière colonne se compose d'éléments suivants:  $0, 0, \dots, 0, \kappa_{n-1}, \kappa'_{n-1}, 0$ ; alors l'ordre de  $C_p$  ( $p = 0, \dots, n - 2$ ), infinitésimaux dans l'entourage  $s_0$ , est au moins le même que l'ordre de la fonction infinitésimale  $\kappa'_{n-1}$ , c'est-à-dire, en accord avec les hypothèses du théorème, plus grand ou égal à  $p$ .

Des formules (43), (44) et des hypothèses (3) et (4) du théorème il résulte que l'ordre de  $C_n$  est égal à  $p + 1$ , et l'ordre de  $C_{n-1}$  est  $p$ .

En vertu du lemme 2, la fonction  $f_1$  vérifie dans l'intervalle  $(s_1, s_2)$  l'équation

$$(62) \quad C_n \cdot f_1^{(n)} + C_{n-1} \cdot f_1^{(n-1)} + \dots + C_0 \cdot f_1 = \Phi;$$

il en résulte que  $\Phi$  est infinitésimale dans l'entourage  $s_0$  d'ordre  $2p + 2$  au moins,

Divisons l'équation (62) par  $(s - s_0)^{2p+2}$  et développons les fonctions  $C_p$  et  $f_1^{(p)}$  qui y paraissent en formule de Taylor dans l'entourage  $s_0$ , et ensuite avançons de  $s$  jusqu'à  $s_0$ ; nous obtiendrons en prenant en considération (43) et (44)

$$(63) \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{C_n \cdot f_1^{(n)}}{(s - s_0)^{2p+2}} = -\kappa_1^{n-1} \dots \kappa_{n-2}^2 \cdot \kappa_{n-1}^{(p+1)} \cdot f_1^{(n+p+1)} \cdot \frac{1}{\{(p+1)!\}^2};$$

$$(64) \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{C_{n-1} \cdot f_1^{(n-1)}}{(s - s_0)^{2p+2}} = \kappa_1^{n-1} \kappa_2^{n-2} \dots \kappa_{n-1}^{(p+1)} \cdot f_1^{(n+p+1)} \frac{1}{p!(p+2)!};$$

$$(65) \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{C_p \cdot f_1^{(p)}}{(s - s_0)^{2p+2}} = 0 \quad \text{pour } p = 0, \dots, n - 2;$$

$$(66) \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\Phi}{(s - s_0)^{2p+2}} = \frac{1}{(2p+2)!} \Phi^{(2p+2)}.$$

Prenant en considération les relations obtenues (63)–(66), nous avons

$$(67) \quad \frac{-1}{[(p+1)!]^2(p+2)} \kappa_1^{n-1} \cdot \kappa_2^{n-2} \dots \kappa_{n-2}^2 \cdot \kappa_{n-1}^{(p+1)} \cdot f_1^{(n+p+1)} = \frac{1}{(2(p+1))!} \Phi^{(2p+2)};$$

$$(68) \quad \text{il en résulte que si } \Phi^{(2p+2)} = 0, \text{ alors } f_1^{(n+p+1)} = 0.$$

Raisonnant d'une façon analogique nous obtenons que si

$$(69) \quad \Phi^{(2p+\lambda)} = 0 \text{ où } \lambda = 2, 3, \dots, m, \text{ alors } f_1^{(n+p+\nu)} = 0 \text{ pour } \nu = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$(70) \quad \text{si par contre } \Phi^{(2p+m+1)} \neq 0, \text{ alors } f_1^{(n+p+m)} \neq 0,$$

$$(71) \quad \text{et l'ordre du contact est égal à } q = n + p + m.$$

Dans le cas où toutes les courbures de la courbe sont différentes de zéro au point  $s_0$  ( $\kappa_i(s_0) \neq 0, i = 1, \dots, n-1$ ) considéré, K. Havlíček [4] a démontré que l'ordre du contact de la courbe avec son hypersphère osculatrice dans ce point n'est pas plus petit que  $n$ . Dans ce cas, nous calculons cet ordre précisément.

**Théorème 5.** Si pour la courbe  $C$  à l'équation  $r = r(s)$  nous avons:

1. la fonction  $r(s)$  est de classe  $n + m + 2$  au moins dans l'intervalle  $\omega = (s_1, s_2)$ ;

2. satisfait l'hypothèse  $(Z_1)$  dans  $\omega$ ;

3. au point  $s_0 \in \omega$  on a  $\Phi^{(v)} = \Phi^{(v)}(s_0) = 0$  pour  $v = 0, 1, \dots, m$ ;

4.  $\Phi^{(m+1)}(s_0) \neq 0,$

alors l'ordre du contact de l'hypersphère osculatrice à  $C$  dans son point  $M_0 = M(s_0)$  est précisément égal à  $n + m + 1$ .

**Démonstration.** Pour l'hypersphère osculatrice à  $C$  en  $M_0$  nous avons

$$f_1^{(v)} = 0 \quad (v = 0, 1, \dots, n-1),$$

de l'équation  $\sum_{j=0}^n C_j \cdot f_1^{(j)} = \Phi$  et de l'hypothèse 3 nous obtenons que  $f_1^{(n)} = 0$ . Ensuite, parce que  $\Phi' = 0$ , alors  $f_1^{(n+1)} = 0$ ; en généralisant nous obtenons

$$\text{comme } \Phi^{(v)} = 0 \text{ pour } v = 0, 1, \dots, m, \text{ alors } f_1^{(n+v)} = 0,$$

$$\text{mais } \Phi^{(m+1)} \neq 0, \text{ alors } f_1^{(n+m+1)} \neq 0;$$

l'ordre du contact est donc précisément égal à  $n + m + 1$  et le théorème est démontré.

#### Littérature

- [1] E. Egerváry: Az  $n$ -mértetű euklidesi tér görbéinek simulógömbjeiről. Matem. és természettudományi Ertesítő, Tome 59, 1940.
- [2] St. Golqb: Rachunek tensorowy. Warszawa 1956.
- [3] St. Golqb: On the geometrical significance of curvatures of higher orders for curves lying in  $n$ -dimensional spaces. Annales Pol. Math. II, 2, 1955.
- [4] K. Havlíček: Contact des courbes et des hypersphères dans un espace euclidien à  $n$  dimensions. Courbes sphériques. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, 72, 1947.
- [5] T. Rachwał: L'ordre du contact d'une courbe régulière avec la sphère osculatrice. Annales Pol. Math. V, 1958.
- [6] T. Rachwał: Contact d'une courbe régulière avec la sphère osculatrice dans un point d'inflexion  $R_3$ . Annales Pol. Math. X, 1961.

КАСАНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ КРИВОЙ С ГИПЕРСФЕРОЙ В ТОЧКЕ  
 ПЕРЕГИБА  $(n - 1)$ -ГО ПОРЯДКА  
 (ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО  $n$  ИЗМЕРЕНИЙ)

Т. РАХВАЛ (T. Rachwał), Краков (Польша)

Настоящая статья представляет собой результат исследования касания кривой, лежащей в  $n$ -мерном евклидовом пространстве ( $n \geq 3$ ) с гиперсферой в точке перегиба  $(n - 1)$ -го порядка (теорема 1, 2, 3 и 4) а также в той точке кривой, в которой все кривизны не равны нулю (теорема 5).

В точке перегиба  $(n - 1)$ -го порядка регулярной кривой кривизны  $\kappa_i$ , для  $i = 1, 2, \dots, n - 2$  не равны нулю, но тем не менее кривизна  $\kappa_{n-1} = 0$ .

Две первые теоремы связаны с гиперсферами, касательными к кривой, а теоремы 3 и 4 — с соприкасающимися гиперсферами.

Теорема 1 подтверждает, что существует  $\infty^1$  гиперсфер, касательных к кривой в её точке перегиба  $(n - 1)$ -го порядка, и для которых порядок касания является числом, не меньшим, чем  $n - 1$ .

Согласно второй теореме, в случае когда последовательные производные  $\kappa_{n-1}^{(i)}$ , для  $i = 1, \dots, p$ , кривизны  $\kappa_{n-1}$  относительно натурального параметра  $s$  кривой равны нулю, и тоже равны нулю некоторые величины  $W_h$  (формула 29), существует  $\infty^1$  гиперсфер, касательных к кривой и имеющих порядок касания равный числу  $n + p - 1$ .

Теорема 3 сообщает, что в случае, когда в рассматриваемой точке последовательные производные  $\kappa_{n-1}^{(i)}$  для  $i = 1, \dots, p$  равны нулю, тем не менее производная  $\kappa_{n-1}^{(p+1)}$  не равна нулю и, кроме того,  $W_h = 0$  для  $h = n - 1, \dots, n - 1 + p$ , существует только одна гиперсфера, касательная к кривой, имеющая порядок касания не меньше чем число  $n + p + 1$ . Эту гиперсферу мы будем называть соприкасающейся кривой в точке перегиба  $(n - 1)$ -го порядка. Координаты центра этой соприкасающейся гиперсферы в локальном репере Френе определяют формулы (22) и (39).

Теоремы 4 и 5 дают возможность точного определения порядка касания кривой с гиперсферой в случае, когда точка касания является точкой перегиба  $(n - 1)$ -го порядка кривой (теорема 4) или если в рассматриваемой точке все кривизны не равны нулю (теорема 5).