Czechoslovak Mathematical Journal

Ján Jakubík

Прямые разложения частично упорядоченных групп, II

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 4, 490–515

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100481`

Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961, Прага

ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП, II

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 11/V 1960 г.)

Главные результаты, касающиеся прямых произведений направленных частично упорядоченных групп и общих частично упорядоченных групп, содержатся в теоремах 2.2, 2.3, 2.11. Дальнейшие рассуждения касаются т. наз. слабо дискретных l-групп (теорема 4.3) и прямых разложений l-групп, содержащих слабую или же сильную единицу (теоремы 5.2, 5.6, 5.13).

Введение. В работе исследуются разложения частично упорядоченных (ч. у.) групп в полное прямое произведение (сравни, напр., [13], § 6). Потому что другие типы прямых произведений в работе не встречаются, будем вместо „полное прямое произведение" говорить только „прямое произведение".

В § 1 приведено несколько вспомогательных утверждений о прямых произведениях ч. у. множеств.

В § 2 изучаются ч. у. группы, удовлетворяющие т. наз. условию Мура-Смита (Moope-Smith), (то есть ч. у. группы с одной единственной компонентой в терминологии [13]).

Пусть G — ч. у. группа описанного типа. Е. П. Шимбирева доказала (сморти [13]) следующее утверждение: если полугруппу G^+ можно разложить в прямое произведение $G = \prod A_i$ (причем, строя это разложение, считаем G^+ системой с одной операцией $+$ и не принимаем во внимание частичное упорядочение), то G можно как ч. у. группу разложить в прямое произведение $G = \prod G_i$ так, что $G_i^+ = A_i$. Дополним этот результат с другой точки зрения, доказав следующее: если ч. у. множество G^+ разложим в прямое произведение $G^+ \simeq \prod A_i$ (причем при построении этого разложения рассматриваем G^+ только как ч. у. множество и не учитываем операции $+$), то G можно как ч. у. группу разложить в прямое произведение $G = \prod G_i$ где $G_i^+ = A_i$.

Далее докажем: если G можно как ч. у. множество разложить в прямое произведение $G \simeq \prod A_i$, то A_i представляют собой подгруппы в G и для G как ч. у. группы $G = \prod A_i$. (Точная формулировка этого утверждения приведена в 2.2.)

Напротив, если для G как группы имеем $G = \prod A_i$, то это прямое разложение не должно быть в то же время прямым разложением G как ч. у. группы; может даже случиться, что G как ч. у. группа прямо не разложима. Аналогичные результаты для разложений на два фактора были получены в [5].

С целью показать приложения высказанных теорем выведем в § 3 по-новому некоторые теоремы, касающиеся K-линеалов ([9], [10]).

В монографии [10] введено понятие дискретности для K-пространств; соответствующее определение можно однако использовать и в случае структурно упорядоченных групп (l-групп); назовем это понятие K-дискретностью. Существенно иным способом определяет дискреность для l-групп Ф. Лонстра (F. Loonstra) [12]. В § 4 введем понятие слабой дискретности следующим образом: l-группа G слабо дискретна, если для каждого $x \in G$, $x > 0$ существует $y \in G$, $0 < y \leqq x$ так, что интервал $\langle 0, y \rangle$ является цепью и полной структурой. Слабо дискретная группа является дискретной в смысле Лонстра, но не должна быть K-дискретной. Докажем теорему о строении слабо дискретных архимедовых l-групп (теорема 4.2). Из нее в качестве частного случая вытекает теорема Лонстра о дискретных l-группах. Далее из теоремы 4.2 можно простым рассждением получить теорему Биркгофа о l-группах, в которых все ограниченные цепи конечны. Также более подробно сравним понятия K-дискретности и слабой дискретности.

В § 5 изучаются прямые разложения l-группы G, в которой имеется слабая или сильная единица. Докажем, что результаты Г. Биркгофа, касающиеся соотношенией между разложениями l-группы в прямое произведение с конечным числом факторов и прямыми разложениями слабой единицы в G можно перенести на разложения l-группы с бесконечным числом факторов только при определенных добавочных предположениях. Пользуемся такими же обозначениями как в [1], гл. 14.

1. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ Ч. У. МНОЖЕСТВ

В настоящем отделе напомним понятие прямого произведения ч. у. множеств (известное, напр., из [1]) и выведем несколько его простых свойств, которые понадобятся нам в дальнейшем. Во всей работе символ M обозначает непустое множество; индекс i или же j пробегает множество M (если не будет указано другое множество для i или j).

1.1. Пусть $\{S_i\}$ – система ч. у. множеств. Пусть S – множество всех функций f, отображающих M в множество $\bigcup S_i$ таких, что для каждого $i \in M$ будет $f(i) \in S_i$. Если $f, g \in S$, то положим $f \leqq g$, если для каждого $i \in M$ $f(i) \leqq g(i)$. Мы скажем, что S является прямым произведением ч. у. множеств S_i и запишем $S = \prod S_i$. Если $M = \{1, 2\}$, то пишем также $S = S_1 \times S_2$.

Символом $\sim$ обозначим изоморфизм по отношению к частичному упорядочению. Пусть

$$S \sim \prod S_i . \tag{1.1}$$

Если $x \in S$ и если в изоморфизме (1.1) $x \to f$, то обозначим $x(i) = f(i)$. Пусть $e \in S$. Положим

$$S_i(e) = \{x | x \in S ;\quad j \in M,\quad j \neq i \Rightarrow x(j) = e(j)\} .$$

Очевидно, что $S_i \sim S_i(e)$, так что согласно (1.1) ч. у. множество S изоморфно ч. у. множеству $\prod S_i(e)$. В таком случае пишем

$$S \simeq \prod S_i(e) \tag{1.2}$$

и говорим, что соотношение (1.2) представляет разложение ч. у. множества S в прямое произведение его подмножеств $S_i(e)$. $S_i(e)$ являются прямыми факторами в S. Если по отношению к прямому разложению (1.2) $x(i) = y$ для $x \in S$, то мы говорим, что элемент y является компонентой элемента x в прямом факторе $S_i(e)$. Если множество M содержит больше одного элемента, то из (1.2) вытекает, что для каждого $i \in M$ существует разложение

$$S \simeq S_i(e) \times S'_i(e) , \tag{1.3}$$

причем $S'_i(e) = \prod S_j(e)\,(j \in M,\ j \neq i)$.

1.2. Отображение (1.2) обладает следующими свойствами:

a) $S_i(e)$ являются подмножествами в S; b) если $x \in S_i(e)$, то $x(i) = x$; c) если $\{x_i\} \subset S$, причем $x_i \in S_i(e)$ для каждого $i \in M$, то существует элемент $x \in S$ такой, что для каждого $i \in M$ $x(i) = x_i$; d) если $x, y \in S$, то $x \leqq y$ тогда и только точна, когда $x(i) \leqq y(i)$ для каждого $i \in M$.

1.3. Предположим, что S – ч. у. система и что выполняется а). Далее предположим, что для каждого $i \in M$ существует отображение $x \to x(i)$, отображающее множество S в множество $S_i(e)$ так, что выполнены условия b), c), d). Из c), d) вытекает, что $S \sim \prod S_i(e)$, так что согласно a), b) справедливо и (1.2). Следовательно, условия a), b), c), d) являются необходимыми и достаточными для справедливости соотношения 1.2.

1.4. *Пусть в ч. у. множестве S имеется наименьший элемент e. Пусть выполняется* (1.2). *Пусть $\{z_i\}$ – подмножество из S такое, что для каждого $i \in M$ $z_i \in S_i(e)$. Пусть $z \in S$ является тем элементом, для которого $z(i) = z_i$ при любом $i \in M$. Тогда*

$$z = \bigcup z_i . \tag{1.4}$$

Доказателство. Пусть $x \in S$, $x \geqq z_i$ для каждого $i \in M$. Из этого согласно 1.2 для каждого $i \in M$ вытекает

$$x(i) \geqq z_i(i) = z_i = z(i) ,$$

так что $x \geqq z$. Этим равенство (1.4) доказано.

Из доказанного и из 1.2 d) одновременно вытекает (при одинаковых обозначениях, как в предыдущем) следующее: если $x = \bigcup y_i$ ($y_i \in S_i(e)$), то и $x_i = y_i$. Выражения элемента z в виде (1.4) является, следовательно, однозначным.

1.5. *Пусть S — ч. и. множество с наименьшим элементом e. Пусть для каждого $i \in M$ выполняется условие* a) *из отд.* 1.2 *и пусть, далее, выполняются условия*:

c′) *если $\{x_i\} \subset S$, причем $x_i \in S_i(e)$, то в S существует элемент $\bigcup x_i$*;

c″) *каждый элемент $x \in S$ можно представить в виде*

$$x = \bigcup x_i,\ x_i \in S_i(e), \tag{1.5}$$

d′) *если $x_i, y_i \in S_i(e)$, $x = \bigcup x_i$, $y = \bigcup y_i$, то из соотношения $x \leqq y$ вытекает $x_i \leqq y_i$ для любого $i \in M$.*

Из этих условий вытекает (1.2).

Доказателство. Из d') вытекает, что представление элемента x в виде (1.5) является однозначным. Рассмотрим отображение

$$x \to x(i) = x_i\,,$$

где элемент x определен уравнением (1.5). Условия c), d) из отд. 1.2 выполнены. Согласно c'') $e \in S_i(e)$ для каждого $i \in M$. Пусть $x \in S_i(e)$. Положим $x_i = x$, $x_j = e$ для $j \in M$, $j \neq i$. Тогда $x = \bigcup x_i$ и из однозначности представления вытекает, что $x(i) = x$, так что выполнено и условие b) из отд. 1.2. Согласно 1.3 этим наше утверждение доказано.

Замечание. Если выполнены условия из отд. 1.5 и если по смыслу ясно, какой элемент в S является наименьшим, то вместо $S_i(e)$ будем часто писать только S_i и вместо (1.2) соотношение $S \simeq \prod S_i$.

Из 1.3 вытекают простыми приемами утверждения:

1.6. *Пусть e — произвольный элемент ч. у. множества S. Пусть справедливо* (1.2). *Пусть S^+ — множество всех $x \in S$, $x \geqq e$. Тогда $S^+ \simeq \prod(S_i(e) \cap S^+)$.* (Свойство c) из 1.2 можно проверить следующим образом: пусть для каждого $i \in M$ $x_i \in S_i \cap S^+$. Следовательно, $x_i \geqq e$ для каждого $i \in M$. Согласно (1.2) и 1.2 c) существует элемент $x \in S$ такой, что для каждого $i \in M$ $x(i) = x_i$. Так как, согласно 1.1, $e \in S_i(e)$ для каждого $i \in M$, то $e(i) = e$. Из последнего неравенства, из (1.2) и 1.2d) вытекает $x \geqq e$, следовательно, $x \in S$.).

1.7. *При тех же предположениях и обозначениях, как в отд.* 1.6, *справедливо следующее*: *если $\{x_i\} \subset S$, $x_i \in S_i(e) \cap S^+$ для каждого $i \in M$, то $e = \bigcap x_i$.*

2. ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ Ч. У. ГРУПП С ОДНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

Пусть G — ч. у. группа. Пусть K — множество всех элементов $x \in G$, для которых существуют элементы $x_1, x_2 \in G$ так, что $x_1 \leqq 0 \leqq x_2$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$. (В терминологии [13] K есть компонента ч. у. группы G, содержащая элемент 0).

Если $K = G$, то мы говорим, что G есть ч. у. группа с одной единственной компонентой.

2.1. Пусть P — ч. у. полугруппа (сравни [1], гл. 13), полугрупповую операцию которой обозначаем символом $+$. Пусть 0 означает единичный элемент в P (т. е. для каждого $x \in P$ $0 + x = x + 0 = x$). Мы скажем, что P можно разложить в прямое произведение

$$P = \prod S_i(0)\,, \tag{2.1}$$

если для P как ч. у. множества справедливо $P \simeq \prod S_i(0)$ и если при этом для любого $i \in M$ и для любых $x, y \in P$

$$(x + y)(i) = x(i) + y(i)\,. \tag{2.2}$$

2.1.1. Если P — ч. у. группа, то по (2.1), согласно (2.2) и 1.2, a), b), c), d) G как абстрактная группа является изоморфной полному прямому произведению групп $S_i(0)$. (Сравни [11], стр. 111). Если $M = \{1,2\}$, то пишем (аналогично тому, как в 1.1) вместо (2.1) символ $P = S_1(0) \times S_2(0)$. Тогда для каждого $x \in P$ $x = x(1) + x(2)$.

2.2. Теорема. *Пусть G — ч. у. группа с одной компонентой. Пусть для G как ч. у. множества*

$$G \simeq \prod G_i(0)\,. \tag{2.3}$$

Тогда каждое из множеств $G_i(0)$ является подгруппой в G и

$$G = \prod G_i(0)\,. \tag{2.4}$$

Доказательство. Из соотношения (2.3) согласно 1.1 для каждого $i \in M$ вытекает

$$G \simeq G_i(0) \times G_i'(0)\,, \tag{2.5}$$

где $G_i'(0) \simeq \prod G_j(j \in M, j \neq i)$. По теореме 3, [5] получаем из (2.5)

$$G = G_i(0) \times G_i'(0) \tag{2.6}$$

для каждого $i \in M$. Из последнего равенства вытекает, что для каждого $i \in M$ справедливо (2.2). Согласно (2.3) выполняется в таком случае равенство (2.4).

2.3. Теорема. *Пусть G — ч. у. группа с одной компонентой. Пусть для ч. у. множества G^+*

$$G^+ \simeq \prod S_i(0)\,. \tag{2.7}$$

Тогда существует прямое разложение (2.4) *ч. у. группы G такое, что для каждого $i \in M$ $G_i^+ = S_i(0)$.*

Доказательство. Из (2.7) для каждого $i \in M$ вытекает

$$G^+ \simeq S_i(0) \times S_i'(0)\,, \tag{2.8}$$

$S_i'(0) \simeq \prod S_j(j \in M, j \neq i)$. Согласно (2.8) и по теореме 3, [5] существует прямое разложение ч. у. группы G (2.6), причем

$$G_i(0)^+ = S_i(0)\,. \tag{2.9}$$

Из (2.9) и (2.6) вытекает, что для каждого $x, y \in G^+$ справедливо (2.2); отсюда и из (2.7) получаем равенство

$$G^+ = \prod S_i(0)\,.$$

Из этого уравнения вытекает по лемме 2, § 5, [13] доказываемое утверждение.

2.4. (Е. П. Шимбирева, [13], теорема 10). *Любых два прямых разложения ч. у. группы G с одной компонентой имеют общее уплотнение.*

Доказательство. Так как G имеет одну компоненту, существуют для любых $x_i \in G$, $i = 1, 2$ элементы $u, v \in G$, $u \leqq x_i \leqq v$, $i = 1, 2$. Согласно [4] два любых прямых разложения G как ч. у. множества имеют общее уплотнение. Доказываемое утверждение вытекает теперь уже из 2.2.

2.5. Пусть S – частично упорядоченное множество. Возникает вопрос, какие ч. у. группы можно определить на S. (Некоторые вопросы подобного характера были исследованы для специальных случаев ч. у. множеств в работе [3].) Если S можно разложить в прямое произведение $S \simeq \prod S_i$ и если для любых двух элементов $x_1, x_2 \in S$ существуют элементы $u, v \in S$, обладающие свойствами из доказательства 2.4, то согласно 2.2 можно поставленный вопрос свести к вопросу, какие ч. у. группы можно определить на ч. у. множествах S_i. Следовательно, имеет место, например, следующее:

Пусть S — ч. у. система, разложимая в прямое произведение

$$S \sim \prod S_i\,, \tag{2.10}$$

причем каждое из ч. у. множества S_i изоморфно множеству R всех действительных чисел (с обычным упорядочением). Пусть G – ч. у. группа, определенная на S. Тогда G изоморфна ч. у. группе всех действительных функций, определенных на M.

Доказательство. Согласно (2.10) и 2.2 можно G разложить в прямое произведение $G = \prod G_i(0)$, причем для каждого $i \in M$ $G_i(0)$ как ч. у. множество изоморфно R. Согласно [1], гл. 14, § 12, упр. 4 $G_i(0)$ изоморфно упорядоченной группе всех действительных чисел. Этим утверждение доказано.

Замечание 1. Пока будет речь о прямых разложениях ч. у. групп, будем вместо (2.4) часто писать более короткий символ $G = \prod G_i$.

2. Знаком R будем всюду в дальнейшем обозначать l-группу всех действительных чисел, причем символы $\leqq$, $+$ имеют обычное значение.

2.6. Введем следующее определение: Пусть G – l-группа. Мы скажем, что G имеет размерность n, если в ней имеются элементы $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ такие, что для любых $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ справедливо:

1. $x_i \cap x_j = 0$, 2. интервал $\langle 0, x_i \rangle$ является цепью,

3. каждый элемент $z \in G^+$ можно представить в виде $z = z_1 + \ldots + z_n$, $0 \leqq z_i \leqq n_i x_i$, где n_i — удобные натуральные числа.

Сравнение этого определения с определением n-мерного K-пространства ([10], стр. 107) произведем в § 3.

2.7. Теорема. a) *Пусть l-группа G имеет размерность n. Тогда G можно представить в виде*

$$G = \prod G_i (i = 1, \ldots, n)\,, \tag{2.11}$$

где G_i — упорядоченные группы, $G_i \neq \{0\}$.

b) *пусть выполняется* (2.11), *причем G_i — упорядоченные группы, $G_i \neq \{0\}$. Пусть в каждой G_i существует элемент $x_i > 0$ такой, что: к любому $z_i \in G_i^+$ найдется натуральное число m, $0 \leqq z_i \leqq m x_i$. Тогда G имеет размерность n.*

Доказательство. Для x обозначим как в 2.6 $H_i = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \langle 0, n x_i \rangle$. Каждое H_i является, очевидно, полугруппой по отношению к операции $+$. Для $y_i \in H_i$, $y_j \in H_j$, $i \neq j$ справедливо $y_i + y_j = y_j + y_i$ ([1], стр. 220). Каждый элемент $x \in G^+$ можно, согласно 2.6, представить в виде

$$x = \sum y_i = \bigcup y_i\,, \quad y_i \in H_i \tag{2.12}$$

(сравни [1], стр. 219). Если для y_i, $z_i \in H_i$ $\sum y_i = \sum z_i$, то $y_i = y_i \cap \left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} z_j\right) = y_i \cap z_i$, и аналогично $z_i = y_i \cap z_i$; следовательно, $y_i = z_i$, и представление элемента x в виде (2.12) является однозначным. Из доказанного вытекает, что полугруппа G^+ является прямым произведением полугрупп H_i. Согласно [13] $G = \prod G_i$, $G_i^+ = H_i$. Согласно [6], отд. 7.2 H_i есть цепь, следовательно G_i есть также цепь. Этим доказано утверждение а). Утверждение б) очевидно.

2.8. *Пусть G — ч. у. группа с одной компонентой, пусть*

$$G = A \times B\,, \quad G = A \times C\,.$$

Тогда $B = C$.

Утверждение является непосредственным следствием теоремы 2.4.

2.9. Далее будем рассматривать прямые разложения ч. у. группы G, *не предполагая $G = K$. Пусть индексы i, j пробегают соответственно множества M, N. Пусть*

$$G = \prod G_i\,. \tag{2.12}$$

Тогда $K = \prod (K \cap G_i)$.

Доказательство. Пусть $x \in K$. Тогда согласно 2.3 существуют элементы $y, z \in G$ такие, что $y \leqq x \leqq z$, $y \leqq 0 \leqq z$. Следовательно, для каждого $i \in M$ $y(i) \leqq x(i) \leqq z(i)$, $y(i) \leqq 0 \leqq z(i)$, так, что $x(i) \in K \cap G_i$. Наоборот, пусть $x \in G$

и пусть для $i \in M$ $x(i) \in K \cap G_i$. Следовательно, для каждого i существуют элементы y^i, z^i такие, что $y^i \leqq x(i) \leqq z^i$, $y^i \leqq 0 \leqq z^i$. Обозначим $y^i(i) = y_i$, $z^i(i) = z_i$. Пусть y, z – те элементы из G, которые для любого i удовлетворяют равенству $y(i) = y_i$, $z(i) = z_i$. Согласно предыдущим неравенствам $y \leqq x \leqq z$, $y \leqq 0 \leqq z$, следовательно, $x \in K$. Согласно (2.12) и отд. 1.2 в таком случае справедливо доказываемое равенство. (Для прямого разложения с двумя факторами было это утверждение доказано в [5], отд. 3.)

2.10. Очевидно, что K – выпуклое множество в G. Так как, согласно [13], K является одновременно инвариантной подгруппой в G, можем образовать ч. у. фактор-группу $G/K = \bar{G}$. (Сравни [13].) Если $x \in G(A \subset G)$, то символом $\bar{x}(\bar{A})$ обозначим класс из $\bar{G}$, содержащий элемент x (множество всех $\bar{x} \in \bar{G}$, где $x \in A$). Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{G}$, $\bar{x} \leqq \bar{y}$. Тогда по определению частичного упорядочения в $\bar{G}$ существует $x_1 \in \bar{x}$, $y_1 \in \bar{y}$ так, что $x_1 \leqq y_1$, $0 \leqq y_1 - x_1$, $y_1 - x_1 \in K$, следовательно, $\bar{x} = \bar{y}$. Итак, частичное упорядочение в $\bar{G}$ тривиально: $\bar{x} \leqq \bar{y}$ тогда и только тогда, когда $\bar{x} = \bar{y}$.

Пусть выполняется (2.12). *Тогда*

(2.13) $$\bar{G} = \prod \bar{G}_i\,.$$

Доказательство. Для каждого $i \in M$ рассмотрим отображение $\bar{x} \to \bar{x}(i)$ множества $\bar{G}$ на $\bar{G}_i$, где $\bar{x}(i) = \overline{x(i)}$, причем принимаем во внимание отображение $x \to x(i)$ множества G на G_i, определенное соотношением (2.12). (При этом безразлично, кокой из элементов $x \in \bar{x}$ считаем при построении этого отображения исходным: если, то есть, $\bar{x} = \bar{y}$, то $x - y \in K$, так что согласно 2.9 $x(i) - y(i) = (x - y)(i) \in K$, следовательно, $\overline{x(i)} = \overline{y(i)}$.

Если $\bar{x} \in \bar{G}_i$, то $\bar{x}(i) = \bar{x}$, по отд. 1.2б). Пусть $\{\bar{x}_i\} \subset \bar{G}$, $\bar{x}_i \in \bar{G}_i$. Тогда для каждого i существует элемент y_i такой, что $y_i \in G_i$, $\bar{y}_i = \bar{x}_i$. Согласно 1.2 существует $y \in G$, $y(i) = y_i$ для каждого $i \in M$. Тогда $\bar{y}(i) = \bar{x}_i$.

Так как K есть инвариантная подгруппа в G, будет для $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{G}$

(2.14) $$\bar{x}(i) + \bar{y}(i) = \overline{x(i)} + \overline{y(i)} = \overline{(x + y)(i)} = \overline{x + y}(i)\,.$$

Пусть, далее, $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{G}$, $\bar{x} \leqq \bar{y}$. Тогда, согласно предыдущему, $\bar{x} = \bar{y}$, следовательно, для каждого i также $\bar{x}(i) = \bar{y}(i)$. Наоборот, пусть для каждого i $\bar{x}(i) \leqq \bar{y}(i)$. Тогда $\bar{x}(i) = \bar{y}(i)$, так что в силу (2.14)

$$\bar{0} = \bar{y}(i) - \bar{x}(i) = \overline{y - x}(i) = \overline{(y - x)(i)}\,.$$

Следовательно, $(y - x)(i) \in K$. Согласно 2.9 отсюда вытекает $y - x \in K$, так что $\bar{y} = \bar{x}$.

Из доказанного, ввиду 1.3 и 2.1, вытекает равенство (2.13).

Мы будем говорить, что прямое разложение (2.13) *индуцировано* прямым разложением (2.12).

2.11. Теорема. *Следующие условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы любых два прямых разложения ч. у. группы G имели общее уплотнение*:

a) *два любых индукцированных прямых разложения ч. у. группы G имеют общее уплотнение*,

b) *если A_i, B_j — прямые факторы в G, то $\overline{A_i \cap B_j} = \bar{A}_i \cap \bar{B}_j$.*

Доказательство. Пусть каждых два прямых разложения ч. у. группы имеют общее уплотнение. По теореме 2, [5] выполняется тогда б). Из б) и из 2.10 вытекает, что каждых два индуцированных разложения имеют общее уплотнение.

Наоборот, пусть имеют место условия а), б) и пусть

$$G = \prod A_i\,, \quad G = \prod B_j\,. \tag{2.15}$$

Обозначим $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Согласно (2.15) можно G представить в виде

$$G = A_i \times A_i'\,, \quad G = B_j \times B_j'\,;$$

следовательно, по теореме 1, [5] C_{ij} есть прямой фактор в G, т. е.

$$G = C_{ij} \times C_{ij}'\,. \tag{2.16}$$

Если $x \in G$, то согласно (2.16) можно x представить в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in C_{ij}$, $x_2 \in C_{ij}'$. Обозначим $x_1 = x(i, j)$. Отображение $x \to x(i, j)$ является тогда отображением множества G на множество C_{ij}, для $x, y \in G$ имеем $(x + y)(i, j) = x(i, j) + y(i, j)$ и для $x \in C_{ij}$ $x(i, j) = x$. Из 2.9 и (2.15) вытекает

$$K = \prod(K \cap A_i)\,, \quad K = \prod(K \cap B_j)\,.$$

Так как K есть ч. у. группа с единственной компонентой, имеют эти два разложения общее уплотнение; следовательно,

$$K = \prod[(K \cap A_i) \cap (K \cap B_j)]\,,$$

$$K = \prod(K \cap C_{ij})\,. \tag{2.17}$$

Пусть $x, y \in G$, $x \leqq y$. Согласно (2.16) будет тогда $x(i, j) \leqq y(i, j)$. Пусть, наоборот, для каждого $i \in M$, $j \in N$

$$x(i, j) \leqq y(i, j)\,. \tag{2.18}$$

Тогда $0 \leqq y(i, j) - x(i, j)$, так что $y(i, j) - x(i, j) \in K \cap C_{ij}$. Следовательно, согласно (2.17) $y - x \in K$ и затем согласно (2.18) $x \leqq y$.

Пусть для каждого $i \in M$, $j \in N$ $x_{ij} \in C_{ij}$. Согласно (2.15) и 2.10 $\bar{G} = \prod \bar{A}_i$, $\bar{G} = \prod \bar{B}_j$. В силу условия а) имеют эти два прямых разложения общее уплотнение, следовательно, $\bar{G} = \prod(\bar{A}_i \cap \bar{B}_j)$. В силу б) будет тогда $\bar{G} = \prod \bar{C}_{ij}$. Из этого равенства и из соотношения $\bar{x}_{ij} \in \bar{C}_{ij}$ вытекает по определению прямого произведения, что существует элемент $\bar{y} \in \bar{G}$ такой, что

$$\bar{y}(i, j) = \bar{x}_{ij}\,. \tag{2.19}$$

Возьмем фискированные $i \in M$, $j \in N$. По доказательству 2.10

$$\bar{y}(i, j) = \overline{y(i, j)} . \tag{2.20}$$

Обозначим $k_{ij} = x_{ij} - y(i, j)$. Согласно (2.19) и (2.20) $k_{ij} \in K \cap C_{ij}$, следовательно, в силу (2.17) существует элемент $k \in K$, удовлетворяющий равенству $k(i, j) = k_{ij}$ для любых $i \in M$, $j \in N$. Обозначим $x = k + y$. Тогда для любых $i \in M$, $j \in N$ $x(i, j) = x_{ij}$.

Согласно 1.2, 2.1 и выше доказанному имеем $G = \prod C_{ij}$, чем утверждение полностью доказано.

3. ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ K-ЛИНЕАЛОВ

3.1. Понятие K-линеала имеет здесь такое же значение, как в [10]. Пусть G — K-линеал. Мы скажем, что G можно разложить в прямое произведение K-линеалов G_i и пишем

$$G = \prod G_i[K] , \tag{3.1}$$

если для G как ч. у. группы имеет место равенство $G = \prod G_i$ и если для каждого $i \in M$, для каждого действительного числа α и для каждого $x \in G$ выполняется равенство $(\alpha x)(i) = \alpha x(i)$.

Легко можно обнаружить, что это определение совпадвет с понятием „полное соединение" из [10], стр. 69.

3.2. Теорема. *Пусть G — K-линеал. Пусть для G как ч. у. группы справедливо*

$$G = \prod G_i . \tag{3.2}$$

Тогда справедливо и (3.1).

Доказательство. Пусть выполняется (3.2), пусть $x \in G_i$, пусть α — действительное число. Выберем натуральное число n, $n > |\alpha|$. Так как $-n|x_i| \leqq \alpha x_i \leqq \leqq n|x_i|$ и так как, согласно (3.2), G_i есть выпуклая подструктура в G, должно быть $\alpha x_i \in G_i$. Следовательно, G_i есть K-линеал.

Из (3.2) вытекает, что $G_i = G_i \times G'_i$, $G'_i = \prod G_j(j \in M, j \neq i)$. Элемент $x \in G$ можно однозначно представить в виде

$$x = x(i) + x'(i) , \quad x(i) \in G_i , \quad x'(i) \in G'_i ; \tag{3.3}$$

значит, элемент $(\alpha x)(i)$ представляет собой тот элемент из G_i, для которого существует $y \in G'_i$ так, что

$$\alpha x = (\alpha x)(i) + y . \tag{3.3'}$$

Из (3.3) вытекает $\alpha x = \alpha x(i) + \alpha x'(i)$. По доказанному выше $\alpha x(i) \in G_i$, $\alpha x'(i) \in G'_i$, следовательно, согласно (3.3') должно быть $\alpha x(i) = (\alpha x)(i)$.

3.3. Из теоремы 3.2 вытекает, что для K-линеалов имеют место утверждения, аналогичные тем, которые были доказаны в § 2 для ч. у. групп с одной компонентой. Например: если $G-K$-линеал и если G можно как ч. у. множество разложить в прямое произведение $G \simeq \prod G_i(0)$, то для каждого $i \in M$ $G_i(0) = G_i$ есть K-линеал и $G = \prod G_i[K]$. Далее, из 3.2 и 2.4 получаем теорему о существовании общего уплотнения для произвольных двух разложений K-линеала G.

3.4. *Пусть G — арпимедовский K-линеал. Пусть G можно разложить в прямое произведение $G = A \times B[K]$, где A — упорядоченный K-линеал. Тогда K-линеал A изоморфен K-линеалу R.*

Доказательство. Из предположений вытекает, что A-архимедовская упорядоченная группа. Согласно [1], гл. 14, теорема 15 A как l-группа изоморфна подгруппе l-группы R. Так как для $x \in A$ и для любого действительного числа α должно быть $\alpha x \in A$, то K-линеал A, очевидно, изоморфен K-лиеалу R (Сравни также [1], гл. 14, § 12, упр. 4).

3.5. *Пусть архимедовский K-линеал G имеет размерность n (в смысле отд. 2.6). Тогда G можно разложить в прямое произвендебие K-линеалов G_i количеством n, из которых каждый изоморфен R.*

Доказательство вытекает из 2.7, 3.2 и 3.4.

3.6. Теперь займемся исследованием связи между определением 2.6 и обычным определением n-мерного линейного пространства (сравни также [10], стр. 107).

Пусть архимедовский K-линеал имеет размерность n. Тогда существуют элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ так, что каждый элемент $x \in G$ можно представить в виде линейной комбинации элементов $x_1, \ldots, x_n$, и эти элементы линейно независимы.

Доказательство. Разложим G в прямое произведение по 3.5 и выберем $x_i \in G_i$, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $z \in G^+$. Согласно 3.5 можно представить z в виде $z = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, $y_i \in G_i$. Так как K-линеал G_i изоморфен R, существует действительное число α_i такое, что $y_i = \alpha_i x_i$, т. е. $z = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. Выбранные элементы $x_1, \ldots, x_n$, очевидно, линейно независимы. Чтобы окончить доказательство, достаточно учесть, что каждый элемент $z \in G$ можно выразить в виде $z = u - v$, $u, v \in G^+$. (Сравни [1], гл. 14, § 3, лемма 1).

3.7. *Пусть G — архимедовский K-линеал. Пусть в G существуют элементы $y_1, \ldots, y_n$, которые линейно независимы, и пусть каждый элемент из G можно представить в виде линейной комбинации этип элементов. Тогда G имеет размерность n.*

Доказательство. Используем следующее вспомогательное утверждение, которое можно легко доказать на основании основных теорем о линейной зависимости:

Пусть G удовлетворяет предположениям, приведенным в 3.7, пусть $G = G_1 \times G'_1[K]$, $G_1 \neq \{0\}$, $G'_1 \neq \{0\}$. Тогда существуют натуральные числа m, k так, что

a) в $G_1(G_1')$ существует множество элементов $u_1, \ldots, u_m$ $(v_1, \ldots, v_k)$ которые линейно независимы, и каждый элемент из $G_1(G_1')$ зависит линейно от элементов этого множества;

b) $m + k = n$.

Далее применяем метод математической индукции. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что доказываемое утверждение справедливо для $n - 1$. Если $x_1, \ldots, x_s \in G$, $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ и если любых два из этих элементов взаимно дизъюнтны, то эти элементы, очевидно, линейно независимы (сравни [10], стр. 108). Если бы к любому $z \in G$, $z > 0$ существовали элементы z_1, $z_2 \in G$, $0 < z_i < z$, $i = 1, 2$, $z_1 \cap z_2 = 0$, то мы могли бы для каждого натурального числа s найти элементы $x_1, \ldots, x_s$, $x_i > 0$, из которых каждых два были бы взаимно дыизъюнктными. Но ввид предыдущего это противоречит предположению теоремы. Следовательно, должен существовать элемент $z \in G$, $z > 0$ такой, что из соотношения $0 < z_i < z$, $i = 1, 2$ вытекает $z_1 \cap z_2 > > 0$. Отсюда уже легко вывести, что интервал $\langle 0, z \rangle$ должен быть цепью. Согласно теореме 1′, [6], G можно разложить в прямое произведение

$$G = G_1 \times G_1'[K]\,, \tag{3.3''}$$

где G_1 – упорядоченный K-линеал и $\langle 0, z \rangle \subset G_1$. Согласно 3.4 каждый элемент $z \in G_1$ линейно зависит от z. Итак, существуют элементы $v_1, \ldots, v_k \in G_1'$, обладающие свойствами, приведенными в выше высказанном вспомогательном утверждении, причем $k = n - 1$. По предположению индукции G_i' имеет размерность $n - 1$, так что в силу 3.5 можно G_i' разложить в прямое произведение

$$G_1' = G_2 \times \ldots \times G_n[K]\,,$$

причем каждый из прямых факторов G_i, $i = 2, \ldots, n$ изоморфен R. Из (3.3″) получаем тогда $G = G_1 \times \ldots \times G_n[K]$, так что ввиду 2.7 б) G имеет размерность n.

3.8. Из хода доказательства в 3.7 или же 3.5 получаем обобщение и одновременно новое доказательство теоремы о K-пространствах конечной размерности ([10], стр. 108, теорема 5.25; сравни также [9], теорема I):

Пусть G – архимедовский K-линеал, пусть в G существуют элементы $x_1, \ldots, x_n$, которые линейно независимы, и пусть каждый элемент $z \in G$ можно представить в виде линейной комбинации элементов $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $G = \prod G_i[K]$ $(i = 1, \ldots, n)$, причем каждый из K-линеалов G_i изоморфен R.

3.9. Напомним, что теорему 5.3.1 из гл. III, [10], касающуюся разложения K-пространства в прямое произведение „дискретного" и „непрерывного" K-пространства нельзя обобщить на K-линеалы. Примером K-линеала, который нельзя таким образом разложить, может служить K-линеал всех действительных функций, определенных на интервале $\langle 0, 1 \rangle$, и непрерывных на $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$. (Подобным вопросом для полных l-групп будем заниматься в отд. 5.)

4. СЛАБО ДИСКРЕТНЫЕ l-ГРУППЫ

4.1. В работе [12] Ф. Лонстра называет дискретной такую l-группу, в которой к каждому элементу $x \in G$, $x > 0$ существует элемент y покрывающий 0, и такой, что $y \leqq x$. В таком смысле будем понятием дискретности для l-групп в дальнейшем пользоваться. В книге [10], стр. 104 вводится понятие дискретности для K-пространств; соответствующее определение можем, однако, применить и в случае l-групп. Элемент $y \in G^+$ называется *дискретным*, если из соотношений $y = u \cup v$, $u \cap v = 0$ вытекает $u = 0$ или $v = 0$. (Легко можно обнаружить — например, при помощи отд. 1.73d, гл. I, [10] — что это определение только формально отличается от определения из [10].) Мы скажем, что l-группа G является K-дискретной, если каждый элемент $x \in G$ можно представить в виде $x = \mathrm{S} y_i$, причем символ S имеет значение, описанное в [10], гл. I, отд. 1.7, и каждый из элементов y_i является дискретным.

Далее введем понятие *слабой дискретности* следующим образом: l-группу G назовем слабо дискретной, если к любому $x \in G, x > 0$ найдется $y \in G, 0 < y \leqq x$ так, что интервал $\langle 0, y \rangle$ будет цепью и полной структурой.

4.2. Пусть G — слабо дискретная l-группа. Пусть M — множество всех элементов $y \in G$, $y \geqq 0$ таких, что интервал $\langle 0, y \rangle$ есть цепь. Для $y_1, y_2 \in M$ пишем $y_1 \mathrm{p}\, y_2$, если эти элементы сравнимы. Отношение p транзитивно на M. Достаточно доказать, что для $y_1, y_2, y_3 \in M$ невозможно, чтобы было $y_1 > y_2$, $y_2 < y_3$ и чтобы элементы y_1, y_3 были несравнимыми. (Доказательство велось бы аналогичным способом как в [6], отд. 6.) Так как отношение p одновременно рефлексивно и симметрично, то оно определяет разбиение множества M на непересекающиеся классы. Выберем из каждого класса по одному элементу; множество всех выбранных таким образом элементов обозначим через N.

4.3. Теорема. *Пусть l-группа G является архимедовской и слабо дискретной Пусть N имеет значение, как в 4.2. Если $x \in N$ и интервал $\langle 0, x \rangle$ имеет конечное (бесконечное) число элементов, то пусть $I(x)$ означает l-группу всеп целых (всех действительных) чисел. Тогда l-группа X изоморфна полупрямому произведению l-групп $I(x)$ $(x \in N)$.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Пусть $x \in N$. По теореме 1′, [6] существует упорядоченная группа $J(x) \subset G$, которая является прямым фактором в G, причем $\langle 0, x \rangle \subset J(x)$. Если интервал $\langle 0, x \rangle$ имеет конечное число элементов, то $J(x)$ является дискретной и архимедовской упорядоченной группой, следовательно, согласно [12] (теорема 2.4) l-группа $J(x)$ изоморфна $I(x)$. Если цепь $\langle 0, x \rangle$ бесконечна, то по построению в доказательстве цитированной теоремы из [6] $J(x)$ является полной и упорядоченной группой. Так как $J(x)$ представляет собой в тоже время архимедовскую l-группу, то согласно [1] (гл. 14, § 12, упр. 4) $J(x)$ и в этом случае изоморфна $I(x)$.

Для каждого $x \in N$ можно G представить в виде

$$G = J(x) \times J'(x)\,. \tag{4.1}$$

Пусть $R(x)$ – конгруэнция на G, относящаяся к l-идеалу $J'(x)$. Из (4.1) следует для соответствующей l-группы классов

$$G/J'(x) \simeq J(x) \tag{4.2}$$

причем, в отличие от отд. 1, символ $\simeq$ выражает здесь изоморфизм относительно операции $+$ и относительно частичного упорядочения. Рассмотрим конгруэнцию $R = \bigcap R(x)\,(x \in N)$ на G. Предположим, что существует элемент $z \in G$, $z \neq 0$ такой, что $z \equiv 0(R)$. Тогда существует и $y \in G$, $y > 0$, $y \equiv 0(R)$. По предположению слабой дискретности существует, далее, элемент $u \in M$, $u \leqq y$. Следовательно,

$$u \equiv 0(R)\,. \tag{4.3}$$

По построению множества N существует элемент $x \in N$, сравнимый с элементом u. Образуем для этого x прямое произведение (4.1). Согласно (4.1), 2.1, 1.6 и 1.4 существуют элементы $x_1 \in J(x)$, $x_2 \in J'(x)$ такие, что

$$u = x_1 \cup x_2\,. \tag{4.4}$$

Элементы x_1, x_2 не могут одновременно равняться нулю. Если бы было $x_1 = 0$ то было бы $u = x_2 > 0$, $y \in J'(x)$, $x \in J(x)$, $x > 0$, следовательно, ввиду 1.7 $x \cap u = 0$. Значит, элементы u, x были бы несравнимыми в силу 1.7, что противоречит предположению. Так как $x_1 \cap x_2 = 0$, то по определению множества M и по (4.4) должно быть $x_2 = 0$, откуда вытекает $u \in J(x)$. Однако, согласно (4.3) $u \in J'(x)$ следовательно, $J(x) \cap J'(x) \neq \{0\}$, что противоречит (4.1). Этим мы доказали, что должно быть

$$\bigcap R(x)\,(x \in N) = 0\,. \tag{4.5}$$

Из теоремы 9, гл. 6, [1], из (4.5), (4.2) и из свойств l-групп $J(x)$ вытекает доказываемое утверждение.

4.4. Пусть l-группа G дискретна. Тогда она является, очевидно, слабо дискретной, и каждый из интервалов $\langle 0, x\rangle$, о которых была речь в теореме 4.3, будет конечным. Из теоремы 4.3 вытекает, следовательно, как частный случай теорема Лонстра 2.6 из работы [12].

Пусть l-группа G удовлетворяет следующему условию: (c) *каждое непустое подмножество множества G^+ содержит минимальный элемент* (сравни [1], гл. 14, § 13). Тогда G, очевидно, дискретна. Из теоремы 4.3 получаем путем простого рассуждения теорему 21, [1], гл. 14.

Если G – слабо дискретная l-группа, то она не должна быть дискретной и не должна удовлетворять условию (c).

4.5. Теперь займемся исследованием связи между слабой дискретностью и K-дискретностью.

Если G — K-дискретный K-линеал, то G не должна быть слабо дискретной l-группой.

Пример. Пусть G — множество всех непрерывных функций, определенных на интервале $J = \langle 0, 1 \rangle$, причем операция $+$ и частичное упорядочение имеет в множестве G обычное значение. Пусть открытый интервал (a, b) является подмножеством множества J, пусть $f \in G$, пусть для каждого $x \in (a, b)$ $f((x) > 0$ и для x non $\in (a, b)$ $f(x) = 0$. Легко можно проверить, что f — дискретный элемент в K-линеале G (в смысле отд. 4.1). Каждую функцию $g \in G$ можно представить в виде

$$g = \mathrm{S} f_i \,, \tag{4.6}$$

где S имеет то же значение, как в отд. 4.1 и каждый из элементов f_i является дискретным. Очевидно, что G не является слабо дискретной l-группой.

Если K-линеал G слабо дискретен, то он не должен быть K-дискретным.

Примером может служить K-линеал, построенный аналогично тому, как l-группа, описанная в [8], отд. 2.

4.6. *Пусть G — полная l-группа. Пусть $a \in G$, пусть элемент a дискретен. Тогда интервал $\langle 0, a \rangle$ есть цепь.*

Доказательство. Предположим, что интервал $J = \langle 0, a \rangle$ не является цепью. Тогда существуют несравнимые элементы $b, c \in J$. Обозначим $b \cap c = u$, $b - u = b_1$, $c - u = c_1$. Элементы b_1, c_1, принадлежащие J, несравнимы и

$$b_1 \cap c_1 = 0 \,. \tag{4.7}$$

Пусть $K'(b_1)$ — множество всех $x \in G$, для которых $b_1 \cap x = 0$; пусть $K(b_1)$ — множество всех $y \in G^+$ таких, что для каждого $x \in K'(b_1)$ $y \cap x = 0$ (сравни [7]). Обозначим

$$a_1 = \sup y(y \in K(b_1)\,, \quad y \leqq a)\,, \tag{4.8}$$

$$a_2 = \sup x(x \in K'(b_1)\,, \quad x \leqq a)\,, \tag{4.9}$$

$$a_1 \cup a_2 = a_3\,, \quad a - a_3 = a_4\,. \tag{4.10}$$

Из бесконечной дистрибутивности ([1], гл. 14, § 10) вытекает $a_2 \in K'(b_1)$, $a_1 \in K(b_1)$, так что

$$a_1 \cap a_2 = 0\,. \tag{4.11}$$

Из (4.10) получаем с учетом (4.11)

$$a_3 = a_1 + a_2 = a_2 + a_1\,, \quad a = a_4 + a_2 + a_1\,. \tag{4.12}$$

Предположим, что $a_4 > 0$. Если при этом $b_1 \cap a_4 = 0$, то $a_4 \in K'(b_1)$, следовательно (согласно [1], гл. 14, теорема 6), $a_4 + a_2 \in K'(b_1)$. Так как в силу (4.12) $a_2 < a_4 + a_2 \leqq a$, получаем противоречие с (4.9). Следовательно, должно быть $b_1 \cap a_4 = a_5 > 0$. Тогда, очевидно, $a_5 \in K(b_1)$; значит по цитированной теореме из [1], $a_5 + a_1 \in K(b_1)$. Так как в силу (4.12) $a_1 < a_5 + a_1 \leqq a_4 + a_1 \leqq a$, получаем противоречие с (4.8). Итак, должно быть $a_4 = 0$. Согласно (4.10) справедливо

$$a_1 \cup a_2 = a\,. \tag{4.13}$$

Так как $a_1 \geqq b_1 > 0$, $a_2 \geqq c_1 > 0$, получаем, согласно (4.11) и (4.13), противоречие с предположением о дискретности элемента a.

4.7. *Пусть полная l-группа G K-дискретна. Тогда G слабо дискретна.*

Доказательство. Пусть выполнены приведенные условия, пусть $x \in G$, $x > 0$. Тогда x можно записать в виде $x = \mathrm{S}x_i$, где каждый из элементов x_i дискретен. Очевидно, что в таком случае $x_i > 0$ для каждого i, так что $x = \bigcup x_i$. Согласно 4.6 интервал $\langle 0, x_i \rangle$ есть цепь. Следовательно, G — слабо дискретная l-группа.

4.8. *Пусть G — архимедовская l-группа. Если G слабо дискретна, то она также K-дискретна.*

Доказательство. Пусть G — архимедовская и слабо дискретная l-группа, пусть $u \in G^+$. По теореме 4.3 существует l-группа G', которую можно представить в виде

$$G' = \prod J(x)\,(x \in N)\,, \tag{4.14}$$

где N, $J(x)$ имеют то же значение, как в 4.3, причем G является l-подгруппой в G'. Пусть $u(x)$ — компонента элемента u в прямом факторе $J(x)$ l-группы G'. Согласно (4.14), 1.6 и 1.4 можно элемент u выразить в виде

$$u = \bigcup u(x)\,(x \in N)\,, \tag{4.15}$$

причем любых два различных элемента $u(x)$ взаимно дизъюнктны и для каждого $x \in N$ или $u(x) = 0$ или $u(x)$ есть дискретный элемент. Так как каждый элемент $z \in G$ можем записать в виде $z = z^+ + z^-$, причем $z^+ \cap |z^-| = 0$, и так как в силу (4.1) для каждого $x \in N$ $u(x) \in G$, вытекает из приведенных свойств представления (4.15) и из определения в отд. 1.7, гл. I, [10], что каждый элемент $z \in G$ можно представить в виде $z = \mathrm{S}z_i(i \in N')$, где $N' \subset N$ и где каждый из элементов $|z_i|$ дискретен. Из этого вытекает, что l-группа G K-дискретна.

4.9. Из теоремы 4.3 и из 4.7, 4.8, 3.4 следует путем простого приема теорема о разложении K-дискретного K-пространства на компоненты, доказанная в [10] (гл. III, теорема 5.2.1).

5. ЕДИНИЦЫ В l-ГРУППЕ

Элемент $e \in G$ называется сильной единицей в l-группе G, если для каждого $a \in G$ существует натуральное число n так, что $a < ne$. Элемент $e \in G$ называется слабой единицей в G, если $e > 0$ и если из условия $a \in G$, $a \cap e = 0$

вытекает $a = 0$. (Сравни [1], гл. 14, § 6). Особенно важное значение имеет понятие слабой единицы в теории K-пространств (сравни [10]).

5.1. Пусть G — l-группа, $x \in G$, $x > 0$. Пусть индекс i пробегает множество M. Предположим, что

$$x = \bigcup x_i, \tag{5.1}$$

причем для $i, j \in M$, $i \neq j$ $x_i \cap x_j = 0$, $x_i > 0$. Тогда мы скажем, что уравнение (5.1) определяет прямое разложение элемента x. Это прямое разложение не тривиально, если множество M содержит по крайней мере два элемента.

Мы скажем, что прямому разложению (5.1) элемента x соответствует разложение l-группы G в прямое произведение, если G можно представить в виде

$$G = \prod G_i, \tag{5.2}$$

причем $x_i \in G_i$ для каждого $i \in M$.

Г. Биркгоф доказал следующую теорему ([2], § 26):

Пусть M — конечное множество. Пусть e — слабая единица в полной l-группе G и пусть уравнение $e = \bigcup e_i$ выражает прямое разложение элемента e. Тогда этому прямому разложению элемента e соответствует единственное разложение l-группы G в прямое произведение.

Займемся вопросом, справедлива ли теорема Биркгофа и без предположения о конечности множества M.

5.2. Теорема. *Пусть e — сильная единица в l-группе G, пусть уравнение*

$$e = \bigcup e_i \tag{5.3}$$

выражает прямое разложение элемента e. Прямому разложению (5.3) *соответствует разложение l-группы G в прямое произведение тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие*:

(p) *пусть $\{y_i\} \subset G^+$, пусть для каждого $i \in M$ существует натуральное число n_i так, что $y_i \leqq n_i e_i$. Тогда в G существует элемент $\bigcup y_i$.*

Сначала докажем два вспомогательных утверждения.

5.3. *Пусть равенство* (5.3) *выражает прямое разложение элемента e, пусть n — произвольные натуральное число. Тогда в G существует элемент $\bigcup ne_i$, который равен ne.*

Доказательство методом индукции. Допустим, что мы доказали равенство

$$\bigcup ne_i = ne \tag{5.4}$$

и докажем аналогичное равенство для $n + 1$. Имеют место равенства

$$(n + 1) e = ne + e = \bigcup_i ne_i + e = \bigcup_i (ne_i + e).$$

(Мы воспользовались соотношениями (22) из гл. 14, [1]. В этих соотношениях достаточно, очевидно, предполагать, что выражение в правой или в левой части приведенных уравнений существует). Аналогично получим далее $\bigcup_i (ne_i + e) = \bigcup_i (ne_i + \bigcup_j e_j) = \bigcup_i \bigcup_j (ne_i + e_j) = \bigcup_{i,j} (ne_i + e_j)$. Если $i \neq j$, то $ne_i + e_j = ne_i \cup e_j$, так как $ne_i \cap e_j = 0$. Если $i = j$, то $ne_i + e_j = (n + 1) e_i > e_i$. Из этого вытекает, что $\bigcup_{i,j} (ne_i + e_j) = \bigcup_i (n + 1) e_i$, чем утверждение доказано.

5.4. *Пусть уравнение* (5.3) *выражает прямое разложение элемента e. Пусть выполнено условие* (p). *Пусть* $x \in X$, $0 < x < ne$. *Обозначим* $x \cap ne_i = x_i$. *Тогда* $x = \bigcup x_i$.

Доказательство. Согласно (p) существует в G элемент $\bigcup x_i$. Согласно [1], гл. 14, § 10 и согласно 5.3 имеем

$$\bigcup x_i = \bigcup (ne_i \cap x) = (\bigcup ne_i) \cap x = ne \cap x = x\,.$$

5.5. Доказательство утверждения 5.2. a) Пусть e — сильная единица в G, пусть уравнение (5.3) выражает прямое разложение элемента e и пусть выполняется условие (p). Пусть для $i \in M$ A_i есть идеал в структуре G^+, образованный множеством $\{ne_i\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $\{y_i\} \subset G^+$, причем $y_i \in A_i$, то в силу условия (p) существует в G^+ элемент $\bigcup y_i$. Далее, если $x \in G^+$, то согласно 5.4 можно элемент x представить в виде $x = \bigcup x_i$, $x \in A_i$.

Пусть для $x \in G$, $x > 0$ имеет символ x_i то же значение, как в 5.4. Предположим, что одновременно

$$x = \bigcup y_i\,, \quad y_i \in A_i\,. \tag{5.5}$$

Из (5.5) вытекает $y_i \cap e_j = 0$ для каждого $i, j \in M$, $i \neq j$, так что и $y_i \cap x_j = 0$. Отсюда получаем

$$y_i = x \cap y_i = (\bigcup_j x_j) \cap y_i = \bigcup_j (x_j \cap y_i) = x_i \cap y_i\,.$$

Аналогично можно доказать и равенство $x_i = x_i \cap y_i$, так что $x_i = y_i$. Итак› выражение элемента в виде (5.5) однозначно.

Пусть $u = \bigcup u_i$, $v = \bigcup v_i$, u_i, $v_i \in A_i$, $u \leqq v$. Тогда одновременно $v = (\bigcup u_i) \cup (\bigcup v_i) = \bigcup (u_i \cup v_i)$, и вследствие однозначности выражения $u_i \cup v_i = v_i$, $u_i \leqq v_i$.

Из доказанного и из 1.5 вытекает, что G^+ можно как ч. у. множество разложить в прямое произведение $G^+ \simeq \prod A_i$. Согласно 2.3 можно G представить в виде (5.2), причем $A_i = G_i^+$. Очевидно, что $e_i \in G_i$.

b) Пусть e — силная единица в G, пусть прямому разложению (5.3) элемента e соответствует разложение l-группы G в прямое произведение (5.2). Пусть для множества $\{y_i\}$ выполнены предположения из условия (p). Тогда $y_i \in G_i^+$. Из (5.2) вытекает согласно 1.6, что для G^+ как ч. у. множества $G^+ \simeq \prod G_i^+$, следовательно, в силу 1.4 в G^+ существует элемент $y = \bigcup y_i$.

5.6. Пусть для $x \in G^+$ символы $K(x)$, $K'(x)$ имеют то же значение, как в доказательстве утверждения 4.6. Тогда справедлива

Теорема. *Пусть e — слабая единица в полной группе G, пусть уравнение* (5.3) *выражает прямое разложение элемента e. Прямому разложению* (5.3) *соответствует разложение l-группы G в прямое произведение тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие*:

(p') *если $\{y_i\} \subset G^+$ и если для каждого $i \in M$ $y_i \in K(e_i)$, то в G^+ существует элемент $\bigcup y_i$.*

Доказательство. a) Пусть выполнены предположения теоремы и условие (p'). Если $B \subset K(e_i)$, $\sup B = z$ и если y — произвольный элемент из $K'(e_i)$, то для каждого $b \in B$ $b \cap y = 0$. Из этого уравнениея получаем на основании бесконечной дистрибутивности $z \cap y = 0$, значит, $z \in K(e_i)$. Далее, если b_1, $b_2 \in K(e_i)$, то $b_1 + b_2 \in K(e_i)$.

Пусть $x \in G^+$; обозначим для каждого $i \in M$

$$x_i = \sup b(b \in K(e_i)\,, \quad b \leqq x)\,. \tag{5.6}$$

Так как для каждого $i \in M$ $x_i \leqq x$, вытекает из полноты l-группы G, что в G имеется элемент $\bigcup x_i = z$, $z \leqq x$. Обозначим $x - z = u$. Далее обозначим $u_i = u \cap e_i$. Если для каждого $i \in M$ $u_i = 0$, то $u \cap e = u \cap (\bigcup e_i) = \bigcup(u \cap e_i) = 0$, следовательно, (так как e — слабая единица), $u = 0$. Если для некоторго $i \in M$ $u_i > 0$, то из уравнения $x = u + z$ вытекает

$$x \geqq u_i + x_i > x_i\,. \tag{5.7}$$

Согласно предыдущему рассужденю и (5.6) $x_i \in K(e_i)$; очевидно, что также $u_i \in K(e_i)$, так что $u_i + x_i \in K(e_i)$. Но в таком случае соотношение (5.7) находится в противоречии с уравнением (5.6). Итак, должно быть $u_i = 0$, так что $u = 0$, $x = z$. Из этого вытекает, что каждый элемент $x \in G^+$ можно представить в виде

$$x = \bigcup x_i\,, \quad x_i \in K(e_i)\,. \tag{5.8}$$

В дальнейшем ход доказательства аналогичен тому, как в части a) отд. 5.5, причем вместо A_i берем $K(e_i)$. В качестве результата получим (используя 1.5 и условие (p')) утверждение, что прямому разложению (5.3) элемента e соответствует разложение l-группы G в прямое произведение.

b) Пусть уравнение (5.3) выражает прямое разложение слабой единицы e в полной l-группе G. Пусть прямому разложению (5.3) соответствует разложение l-группы G в прямое произведение (5.2). Обозначим $\prod G_j(j \in M, j \neq i) = G'_i$. Справедливо $G = G_i \times G'_i$, следовательно, согласно 1.6 $G^+ \simeq G_i^+ \times G_i'^+$. Если $x \in G_i'^+$, то согласно 1.7 $x \cap e_i = 0$; значит $x \in K'(e_i)$, $G_i'^+ \subset K'(e_i)$. Наоборот, пусть $x \in K'(e_i)$. Согласно 1.4 можно элемент x представить в виде

$$x = x_1 \cup x_2\,, \quad x_1 \in G_i^+\,, \quad x_2 \in G_i'^+\,.$$

Так как для каждого $j \in M$, $j \neq i$ должно быть $e_j \in G'_i$, будет согласно 1.7 $x_1 \cap e_j = 0$. Далее, из уравнения $x \cap e_i = 0$ получаем $x_1 \cap e_i = 0$, так что (на основании полной дистрибутативности) $x_1 \cap e = 0$. Итак, $x_1 = 0$, $x = x_2 \in G_i'^{+}$. Этим мы доказали, что $K'(e_i) = G_i'^{+}$. Используя определение множества $K(e_i)$, можем теперь уже легко доказать, что $K(e_i) = G_i^{+}$. Выполнение условия (p′) вытекает теперь из (5.2), 1.6 и 1.4.

5.7. Покажем на примере, что условия (p) или же (p′) не должны всегда иметь места.

Пример 1. Пусть G – множество всех ограниченных функций, определенных на интервале $J = \langle 0, 1 \rangle$, пусть сложение и частичное упорядочение в G определено обычным способом. Тогда G – полная l-группа. Пусть $e \in G$, $e(x) = 1$ для каждого $x \in J$. Элемент e есть сильная единица в G. Пусть для $x \in J$ $f_x \in G$, причем $f_x(x) = 1, f_x(y) = 0$ для $y \in J$, $y \neq x$. Равенство $e = \bigcup f_x (x \in J)$ выражает прямое разложение элемента e; легко можно проверить, что для этого прямого разложения не выполняется ни условие (p), ни (p′).

Из этого примера следует, что ответ на вопрос, поставленный в 5.1, отрицателен.

Если уравнение (5.3) выражает прямое разложение слабой единицы в l-группе G и если по отношению к этому прямому разложению построим множества A_i, как в отд. 5.5, то не должно быть $A_i = K(e_i)$:

Пример 2. Пусть G – множество всех функций, определенных на интервале $\langle -1, 1 \rangle$, с обычным сложением и частичным упорядочением. Пусть $e \in G$, $e(x) = 1$ для каждого $x \in J$. Пусть $e_1(x) = 1$ для $x \in \langle -1, 0 \rangle$, $e_1(x) = 0$ для $x \in (0, 1\rangle$, $e_2 = e - e_1$. Тогда уравнение $e = e_1 \cup e_2$ выражет прямое разложение слабой единицы e в G. При этом $K(e_1)$ есть множество всех функции $f \in G^{+}$ таких, что для каждого $x \in (0, 1\rangle$ $f(x) = 0$; A_1 есть множество всех $f \in K(e_1)$, которые ограничены.

Я не знаю, существует ли прямое разложение (5.3) слабой единицы e в полной l-группе G так, чтобы выполнялось условие (p) и не выполнялось условие (p′).

Предположение теоремы 5.6, что l-группа G полна, нельзя выпустить. Сравни пример, приведенный в [2], стр. 325.

5.8. *Прямому разложению слабой единицы l-группы G не может соответствовать больше чем одно разложение l-группы G в прямое произведение.*

Доказательство. Пусть прямому разложению (5.3) слабой единицы в l-группе G соответствует разложение l-группы G в прямое произведение (5.2) и одновременно разложение l-группы G в прямое произведение $G = \prod \bar{G}_i$. Согласно части b) доказателства теоремы 5.6 должно быть $G_i^{+} = K(e_i)$, $\bar{G}_i^{+} = K(e_i)$, так что $G_i^{+} = \bar{G}_i^{+}$, $G_i = \bar{G}_i$.

5.9. *Пусть e — фиксированная слабая единица в G. Пусть для каждого прямого разложения элемента e полной l-группы G выполняется условие* (p'). *Пусть интервал $\langle 0, e\rangle$ является вполне дистрибутивной структурой. Тогда G можно разложить в прямое произведение $G = \prod G_i$, в котором никакой из прямых факторов G_i прямо не разложим.*

Доказательство. По предположению интервал $I = \langle 0, e\rangle$ является полной и вполне дистрибутирвной структурой. Согласно [8] можно структуру I разложить в прямое произведение

$$I \simeq \prod L_i \tag{5.9}$$

где никакая из структур L_i прямо разложима. Так как структура L имеет наибольший элемент, то и структура L_i должна при любом i иметь наибольший элемент; обозначим его через e_i. Из (5.9), 1.4 и 1.7 вытекает, что имеет место (5.3) и что это равенство выражает прямое разложение элемента e. Если бы существовало нетривиальное прямое разложение элемента e_i, то элемент e_i можно было бы выразить в виде $e_i = a \cup b$, $a \cap b = 0$, $a > 0$, $b > 0$. Так как L_i — дистривутивная структура, то было бы в таком случае $L_i \simeq A \times B$, где $A = \langle 0, a\rangle$, $B = \langle 0, b\rangle$. Но это невозможно, так как структура L_i прямо не разложима. Итак, для элемента e_i не существует нетривиальное прямое разложение.

В силу предположения и отд. 5.6 соответствует прямому разложению (5.3) элемента e разложение l-группы G в прямое произведение (5.2). Предположим, что некоторая из l-групп G_i была бы прямо разложимой:

$$G_i = A \times B\,, \quad A \neq \{0\}\,, \quad B \neq \{0\}\,. \tag{5.9.1}$$

Из (5.9.1) получаем согласно 1.6, 1.5

$$e_i = a \cup b\,, \quad a \in A^+\,, \quad b \in B^+\,, \tag{5.9.2}$$

так что $a \cap b = 0$. Из (5.2) и (5.3) вытекает, что e_i — слабая единица в G_i, так что в силу (5.9.1) и (5.9.2) должно быть $a > 0$, $b > 0$. Таким образом мы получили противоречие с доказанным выше. Значит, никакая из l-групп G_i прямо не разложима.

5.9.1. В теореме 5.9 нельзя пропустить предположение, что $\langle 0, e\rangle$ — вполне дистрибутивная структура. Пример: пусть G — множество всех измеримых функций, определенных на интервале $J = \langle 0, 1\rangle$ (если $f, g \in G$ и если f, g отличаются друг от друга только на множестве меры нуль, то полагаем $f = g$). В G определим сложение и соотношение $\leqq$ обычным способом. Пусть e — функция, определенная на J и тождественно равная 1. Тогда e есть слабая единица в G и G — полная l-группа (сравни [10], стр. 52), и одновременно выполняется условие (p') (что легко доказать). Однако G невозможно разложить в прямое произведение неразложимых прямых факторов.

5.10. Пусть выполнены условия теоремы 5.9. Рассмотрим разложение l-группы G в прямое произведение $G = \prod G_i$, о котором идет речь в этой теореме. Каждая из l-групп G_i полна. Из утверждения, приведенного в [1], гл. 14, § 11, упр. 3, непосредственно следует: полная l-группа, которая не является упорядоченной, разложима нетривиальным способом в прямое произведение. Итак, из 5.9 получаем в качестве следствия:

Пусть для каждого прямого разложения слабой единицы e полной l-группы G выполняется условие (p′). Пусть интервал $\langle 0, e \rangle$ является вполне дистрибутивной структурой. Тогда G можно разложить в прямое произведение (полных) упорядоченных групп.

5.11. Теорема. *Пусть для каждого прямого разложения слабой единицы e полной l-группы G выполняется условие* (p′). *G можно разложить в прямое произведение неразложимых полных l-групп тогда и только тогда, когда интервал $\langle 0, e \rangle$ является вполне дистрибутивной структурой.*

Доказательство. Утверждение „тогда" было доказано в 5.9. Если выполнено условие теоремы и если G можно разложить в прямое произведение прямо неразложимых факторов G_i, то все G_i, согласно 5.10, должны быть упорядоченными группами.

В силу 1.6 и 1.4 можно e представить в виде $e = \bigcup e_i$, $e_i \in G_i$. Так как интервал $L_i = \langle 0, e_i \rangle$ есть полная цепь, то L_i есть вполне дистрибутивная структура. По 1.6 имеем $\langle 0, e \rangle = \prod L_i$, так что $\langle 0, e \rangle$ есть также вполне дистрибутивная структура.

Замечание. Согласно 5.10 можем в формулировке предыдущей теоремы заменить выражение „полных l-групп" выражением „полных упорядоченных l-групп".

5.12. Пусть для каждого прямого разложения слабой единицы e полной l-группы G выполняется условие (p′). Пусть

$$G = A \times B\,, \tag{s$_1$}$$

$e = e_1 \cup e_2$, $e_1 \in A$, $e_2 \in B$. Тогда, очевидно, A – полная группа и e_1 – слабая единица в A. Исследуем, выполняется ли для каждого прямого разложения слабой единицы e_1 в A условие (p′).

Пусть уравнение $e_1 = \bigcup e_i (i \in M)$ выражает прямое разложение элемента e_1 в A. Обозначим $N = \{e_i\} \cup \{e_2\}$. Тогда равенство $e = \bigcup z$ $(z \in N)$ выражает прямое разложение элемента e; этому прямому разложению соответствует по предположению и по 5.6 разложение l-группы G в прямое произведение $G = \prod G_z$ $(z \in N)$, так что ввиду определения множества N

$$G = \left(\prod G_i\right) \times G_2\,, \tag{s$_2$}$$

причем $e_i \in G_i$, $e_2 \in G_2$. Согласно доказательству в отд. 5.8 и (s$_2$) будет тогда

$G_2^+ = K(e_2)$ и согласно (s_1) будет одновременно $B^+ = K(e_2)$. Отсюда вытекает $B = G_2$. Согласно 2.8 получаем затем из (s_1) и (s_2) равенство $A = \prod G_i$. Этим, ввиду 5.6, доказано, что ответ на поставленный выше вопрос положителен.

5.13. Теорема. *Пусть для каждого прямого разложения слабой единицы e полной l-группы G выполняется условие* (p′). *Тогда G можно разложить в прямое произведение*

$$G = A \times B\,, \tag{5.10}$$

причем: a) *A можно разложить в прямое произведение l-групп, из которых ни одна прямо не разложима;* b) *каждый прямой фактор $C \neq \{0\}$ l-группы B является прямо разложимым.*

Доказательство. По предположению структура $L = \langle 0, e\rangle$ полна и согласно [1], гл. 14 она бесконечно дистрибутивна. Согласно [8] можно L разложить в прямое произведение

$$L \simeq L_1 \times L_2\,, \tag{5.11}$$

причем: a′) L_1 можно разложить в прямое произведение структур, из которых ни одна прямо не разложима; b′) каждый прямой фактор $L_3 \neq \{0\}$ структуры L_2 можно нетривиальным способом разложить в прямое произведение.

Из (5.11) вытекает, что e можно при помощи элементов $e_1 \in L_1$, $e_2 \in L_2$ записать в виде

$$e = e_1 \cup e_2\,, \quad e_1 \cap e_2 = 0\,, \tag{5.12}$$

причем

$$L_1 = \langle 0, e_1\rangle\,, \quad L_2 = \langle 0, e_2\rangle\,. \tag{5.12′}$$

По предположению и по отд. 5.6 прямому разложению (5.12) элемента e соответствует разложение l-группы G в прямое произведение (5.10), причем $e_1 \in A$, $e_2 \in B$. Согласно 5.12 вытекает теперь из условия a′) утверждение a) при помощи такого же приема, как в доказательстве 5.9.

Пусть, далее, для l-группы B

$$B = C \times D\,, \quad C \neq \{0\}\,. \tag{5.13}$$

Тогда элемент e_2 можно представить в виде

$$e_2 = c \cup d\,, \quad c \in C\,, \quad d \in D\,. \tag{5.14}$$

Согласно (5.10) и 5.12 e_2 есть слабая единица в B, так что в силу (5.13) и (5.14) c есть слабая единица в C; следовательно, $c > 0$. Обозначим $C_1 = \langle 0, c\rangle$, $D_1 = \langle 0, d\rangle$. Из (5.14) вытекает $c \cap d = 0$, так что L_2 можно согласно (5.12′) представить в виде $L_2 \simeq C_1 \times D_1$, причем $C_1 \neq \{0\}$. Согласно b′) можно C_1 разложить в прямое произведение

$$C_1 \simeq U \times V\,, \quad U \neq \{0\}\,, \quad V \neq \{0\}\,. \tag{5.15}$$

Из (5.15) вытекает, что элемент e можно представить в виде

$$e = u \cup v \tag{5.16}$$

причем $u \cap v = 0$; так как e – слабая единица в C и, следовательно, также в $C_1 \subset C$, должно быть $u > 0$, $v > 0$. Итак, уравнение (5.16) выражает прямое разложение элемента c. Согласно предположению и отд. 5.12 можно C нетривиальным способом разложить в прямое произведение. Следовательно, выполняется b).

5.14. Если бы вместо теоремы 5.6 взять в качестве исходного утверждения теорему 5.2, мы могли бы подобным способом доказать утверждения, аналогичные теоремам 5.9 и 5.11, в которых использовалось бы предположение (p) для сильной единицы и предположение, что $\langle 0, e \rangle$ – полная и вполне дистрибутивная структура (не требуя полной дистрибутивности, мы могли бы доказать теорему, аналогичную 5.13).

Литература

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Vol. XXV, New York 1948.

[2] *G. Birkhoff:* Lattice-ordered groups. Annals of Math. *43*, 1942, 298—331.

[3] *C. J. Everett* and *S. Ulam:* On ordered groups. Trans. Amer. Math. Soc. *57*, 1945, 208—216.

[4] *J. Hashimoto:* On direct product decomposition of partially ordered sets. Ann. of Math., (*2*) *54*, 1951, 315—318.

[5] *Я. Якубик:* Прямые разложения структурно упорядоченных групп. Чехосл. мат. ж. *10* (*85*) 1960, 231—243.

[6] *J. Jakubík:* Konvexe Ketten in *l*-Gruppen. Čas. pěst. mat. *84*, 1959, 53—63.

[7] *Я. Якубик:* Об одном классе структурно упорядоченных групп. Čas. pěst. mat. *84*, 1959, 150—161.

[8] *J. Jakubík:* Centrum nekonečne distributívnych sväzov. Matem. fyz. čas. Slov. akad. vied, *7*, 1957, 116—120.

[8′] *Я. Якубик:* Об одном свойстве структурно упорядоченных групп. Čas. pěst. mat. *85*, 1960, *51*—59.

[9] *Е. А. Юдин:* Решение двух проблем теории полуупорядоченных пространств. Доклады АН СССР, *23*, 1939, 418—422.

[10] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих* и *А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Москва, 1950.

[11] *А. Г. Курош:* Теория групп. Москва, 1953.

[12] *F. Loonstra:* Discrete groups. Proceed. Nederl. Akad. Ser. A, *59*, No 2, 1951, 162—168.

[13] *Е. П. Шимбирева:* К теории частично упорядоченных групп. Мат. сборник *20*, 1947, 145—178.

Zusammenfassung

DIREKTE ZERLEGUNGEN DER TEILWEISE GEORDNETEN GRUPPEN II

JÁN JAKUBÍK, Košice

Es sei S eine teilweise geordnete Menge, $e \in S$. Die direkte Produktzerlegung von S (im Zeichen $S \simeq \prod S_i(e)$) definieren wir – bis auf einen Isomorphismus – gleich wie in [1]; wir setzen aber voraus, dass $S_i(e) \subset S$, $e \in S_i(e)$. (Vgl. Abs. 1.) G sei eine teilweise geordnete Gruppe. Das Symbol $G = \prod G_i(0) = \prod G_i$ bezeichnet eine vollständige direkte Produktzerlegung von G. $K(0)$ ist die kleinste Untergruppe in G, welche alle Elemente $x \in G$, $x > 0$ enthält. Ist $x \in G$, $A \subset G$, setzen wir $\bar{x} = x + K(0)$, $\bar{A} = A + K(0)$. $K(0)$ ist ein Normalteiler in G, $G/K(0) = \bar{G}$. Aus $G = \prod G_i$ folgt $\bar{G} = \prod \bar{G}_i$. Die Begriffe einer schwachen bzw. starken Einheit e in einer l-Gruppe G und einer direkten Zerlegung $e = \bigcup_{i=1}^{n} e_i$ von e wurden in [2] erklärt. Das Symbol $G(\leqq)$ bedeutet die teilweise geordnete Menge G (d. h. die Gruppenoperation $+$ ziehen wir dabei nicht in Betracht).

Satz 2.2. *Es sei G eine gerichtete Gruppe. Ist $G(\leqq) \simeq \prod G_i(0)$, so sind $G_i(0)$ Untergruppen in G und es gilt $G = \prod G_i(0)$.*

Satz 2.3. *Es sei G eine gerichtete Gruppe. Ist $G^+(\leqq) \simeq S_i(0)$, so gibt es eine Zerlegung $G = \prod A_i$ derart, dass $A_i^+ = S_i(0)$.*

Satz 2.11. *Es sei G eine teilweise geordnete Gruppe. Die Zerlegungen $G = \prod A_i$, $G = \prod B_j$ besitzen eine gemeinsame Verfeinerung genau dann, wenn 1. die „induzierten" Zerlegungen $\bar{G} = \prod \bar{A}_i$, $\bar{G} = \prod \bar{B}_j$ eine gemeinsame Verfeinerung haben, 2. für jedes i und jedes j $\bar{A}_i \cap \bar{B}_j = \overline{A_i \cap B_j}$.*

Für den Fall von Zerlegungen mit zwei Faktoren wurden analoge Sätze in [5] bewiesen. Die zu 2.2 und 2.3 analogen Sätze gelten auch für K-Lineale (Abs. 3). Weiter werden im Absatz 3 die K-Lineale endlicher Dimension untersucht.

Eine l-Gruppe heisst schwach diskret, wenn es zu jedem $x \in G$, $x > 0$ ein Element $y \in G$, $0 < y \leqq x$ gibt, dass $\langle 0, y \rangle$ eine vollständige Kette ist. Es sei N eine Teilmenge einer schwach diskreten l-Gruppe G, wobei: 1. aus $x \in N$ folgt: $x > 0$ und $\langle 0, x \rangle$ ist eine Kette; 2. je zwei verschiedene Elemente von N sind unvergleichbar; 3. ist $y \in G$ und ist $\langle 0, y \rangle$ eine Kette, so gibt es $x \in N$ so, dass x, y vergleichbar sind.

Satz 4.3. *Es sei G eine archimedische und schwach diskrete l-Gruppe. Wenn $x \in N$ und wenn das Interval $\langle 0, x \rangle$ eine endliche (unendliche) Anzahl von Elementen enthält, dann sei $I(x)$ die l-Gruppe von allen ganzen (allen reellen) Zahlen. Dann ist G ein subdirektes Produkt der l-Gruppen $I(x)$ $(x \in N)$.*

G. Birkhoff [2] untersuchte die Beziehung zwischen den direkten Zerlegungen einer schwachen Einheit $e \in G$ und den direkten Produktzerlegungen der l-Gruppe G unter der Voraussetzung, dass in der direkten Zerlegung (*) $e = \bigcup e_i \, (i \in M)$ die Menge M endlich ist. Ist M beliebig, so gelten die Sätze:

Satz 5.2. *Es sei e eine starke Einheit in einer l-Gruppe G,* (*) *sei eine direkte Zerlegung von e. Dieser Zerlegung entspricht eine direkte Zerlegung von G genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

(p) *Wenn* $\{y_i\} \in G^+ \; (i \in M)$ *und wenn es für jedes i eine natürliche Zahl* n_i *gibt, so dass* $y_i \leqq n_i e_i$, *dann existiert in G das Element* $\bigcup y_i$.

Ist e eine schwache Einheit in einer vollständigen l-Gruppe G, so ist im Satz 5.2 (p) mit der folgenden Bedingung zu ersetzen:

(p′) *Wenn* $\{y_i\} \in G^+ \; (i \in M)$, *wobei für jedes i* $y_i \in K(e_i)$, *dann existiert in G das Element* $\bigcup y_i$. ($K(e_i)$ *ist der positive Teil des von* e_i *erzeugten l-Ideals in G.*)

Satz 5.13. *Gilt für jede direkte Zerlegung einer schwachen Einheit e einer vollständigen l-Gruppe G die Bedingung* (p′), *so gibt es eine Zerlegung* $G = A \times B$, *wobei* a) *A ein Produkt von direkt unzerlegbaren Gruppen ist,* b) *jeder direkte Faktor* $C \neq \{0\}$ *von B direkt zerlegbar ist.*