Ludvík Janoš

Функциональные свойства спектра краевых задач

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 3, 461–474

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100473

Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961, Прага

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

ЛЮДВИК ЯНОШ (Ludvík Janoš), Прага

(Поступило в редакцию 23/V 1960 г.)

В работе исследуется краевая задача

$$\alpha z''(x) + m(x)\, y(x) = 0\,, \quad \alpha y''(x) + p(x)\, z(x) = 0\,,$$

$$x \in \langle 0,1 \rangle\,, \quad y(0) = y(1) = z(0) = z(1) = 0$$

и зависимость ее спектра от функций $m(x)$ и $p(x)$.

ВВЕДЕНИЕ

Обозначения. Мы будем заниматься однородными интегральными уравнениями типа

$$\int_\Omega \Gamma(x, t)\, y(t)\, m(t)\, \mathrm{d}t = \lambda y(x)\,, \tag{1}$$

где Ω — область k-мерного евклидова пространства E_k, $m(x)$ — положительная и непрерывная на $\overline{\Omega}$ функция, а $\Gamma(x, t)$ — непрерывное и симметрическое на $\overline{\Omega}$ ядро. Оба указанных свойства ядра мы будем в дальнейшем всегда предполагать.

Определение 1. C_Ω обозначает множество всех действительных непрерывных функций на $\overline{\Omega}$; $C_\Omega^+ \subset C_\Omega$ обозначает подмножество положительных на $\overline{\Omega}$ функций.

Определение 2. Ядро $\Gamma(x, t)$ мы назовем положительно определенным, если $\int\int_{\Omega\Omega} \Gamma(x, t)\, \varphi(x)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t > 0$ для $\varphi \in C_\Omega$, $\varphi \neq 0$.

Определение 3. Ядро $\Gamma(x, t)$ имеет свойство A, если

1. $\Gamma(x, x) > 0$ для $x \in \Omega$, 2. $\Gamma(x, t) \geqq 0$ для $x, t \in \overline{\Omega}$.

Определение 4. Если n — натуральное число, то через Σ_n мы обозначим множество всех $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in E_n$, для которых $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$.

Определение 5. Пусть $\Gamma(x, t)$ – функция двух переменных $x, t \in \langle 0, 1\rangle$, пусть n – натуральное число, $x_i, t_j \in \langle 0, 1\rangle$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда мы положим

$$\Gamma\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{pmatrix} = |\Gamma(x_i, t_j)|_1^n .$$

Символом $|a_{ij}|_1^n$ и т. п. мы будем обозначать определитель матрицы с элементами a_{ij}.

Определение 6. Пусть $\Gamma(x, t)$ – ядро $(x, t \in \langle 0, 1\rangle)$, пусть n – натуральное число. Под символом $\overset{n}{\Gamma}(x, t)$ $(x, t \in \bar{\Sigma}_n)$ мы будем подразумевать n-ое ассоциированное ядро ядра $\Gamma(x, t)$, так что

$$\overset{n}{\Gamma}(x, t) = \Gamma\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{pmatrix}; \quad x = [x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad t = [t_1, t_2, \ldots, t_n];$$
$$x, t \in \bar{\Sigma}_n .$$

Определение 7. Пусть $\Gamma(x, t)$ – ядро $(x, t \in \langle 0, 1\rangle)$. Мы будем говорить, что $\Gamma(x, t)$ – *осцилляционное ядро*, если имеет место

1. $\Gamma(x, t) > 0$; $\quad x, t \in (0, 1)$.

2. Для каждого натурального n присоединенное ядро $\overset{n}{\Gamma}(x, t)$ обладает на Σ_n свойством A, то есть

$$\Gamma\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} > 0 \quad \text{для} \quad 0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n < 1 ;$$

$$\Gamma\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{pmatrix} \geqq 0 \quad \text{для} \quad \begin{cases} 0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq 1 , \\ 0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots \leqq t_n \leqq 1 . \end{cases}$$

Определение 8. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle 0, 1\rangle$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \in C_{(0,1)}$. Символом $\Delta\begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$ мы обозначим определитель $|\varphi_i(x_j)|_1^n$.

Определение 9. Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \in C_{(0,1)}$ образует систему Чебышева, если

$$\Delta\begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{для} \quad [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \Sigma_n .$$

Определение 10. Последовательность функций $\varphi_i(x) \in C_{(0,1)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ образует последовательность Маркова, если каждый ее отрезок $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \ldots, \varphi_n(x)$ является системой Чебышева.

Приведем теперь некоторые т е о р е м ы, которые нам будут нужны в дальнейшем и на которые мы будем в дальнейшем ссылаться.

Теорема А. *Пусть $K(x, t)$ — ядро на $\bar{\Omega} \subset E_k$, имеющее свойство A, $m(x)$, $p(x) \in C_\Omega^+$. Тогда для максимального собственного числа $\alpha(m, p)$ системы*

$$(2) \qquad \int_\Omega K(x, t)\, y(t)\, m(t)\, \mathrm{d}t = \alpha z(x)\,, \quad \int_\Omega K(x, t)\, z(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t = \alpha y(x)$$

справедливо соотношение

$$(3) \qquad \alpha(m, p) = \sup_{0 \neq Y, Z \in C_\Omega} \frac{\int_\Omega \int_\Omega K(x, t)\; Y(x)\, Z(t)\, m(x)\, p(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t}{\left[\int_\Omega Y^2(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x \int_\Omega Z^2(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}}\,,$$

причем экстремум правой части получается на единственной (с точностью до множителя) паре $y(x)$, $z(x)$, которая является решением системы (2) и которая может быть выбрана так, что $y(x) > 0$, $z(x) > 0$ для $x \in \Omega$. Итак, $\alpha(m, p)$ является невырожденным собственным числом системы (2).

Доказательство соотношения (3) проведено в [2] (Лемма 1, стр. 69). Остальная часть утверждения следует из [1], лемма 1, стр. 214, следующим образом:

Исключая, напр., $z(x)$ из системы (2), мы получаем интегральное уравнение для $y(x)$ вида (1), где

$$\Gamma(x, t) = \int_\Omega K(x, s)\, K(t, s)\, p(s)\, \mathrm{d}s\,; \quad \lambda = \alpha^2\,,$$

причем ядро $\Gamma(x, t)$ обладает, очевидно, снова свойством А, и согласно цитированной теореме в [2] следует $y(x) \neq 0$ для любого $x \in \Omega$.

Число $\alpha(m, p)$, определенное соотношением (3), является функционалом, определенным на $C_\Omega^+ \times C_\Omega^+$.

Покажем еще, как упрощается соотношение (3) для случая, когда $m(x) = p(x) \in C_\Omega^+$. В этом случае мы получим путем исключения $y(x)$ и затем $z(x)$ из системы (2) для обеих функций $y(x)$ и $z(x)$ одно уравнение (1). Но так как согласно цитированной теореме в [2] соответствующее собственное число не является вырожденным, можно положить $y(x) = z(x)$, откуда следует

$$(3a) \qquad \alpha(m, m) = \sup_{0 \neq Y \in C_\Omega} \frac{\int_\Omega \int_\Omega K(x, t)\; Y(x)\; Y(t)\, m(x)\, m(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t}{\int_\Omega Y^2(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x}\,.$$

Приведем еще важное интегральное тождество, указанное в [2] (стр. 218):

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x); \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x) \in C_{(0,1)}, m(x) \in C^+_{(0,1)}$; тогда имеет место

$$(4) \quad \int_{\Sigma_n} \Delta\begin{pmatrix}\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n\end{pmatrix} \Delta\begin{pmatrix}\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n\end{pmatrix} m(t_1)\, m(t)_2 \ldots m(t_n)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n =$$

$$= \frac{1}{n!} \underbrace{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1}\Delta\begin{pmatrix}\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n\end{pmatrix} \Delta\begin{pmatrix}\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n\end{pmatrix} m(t_1)\, m(t_2) \ldots$$

$$\ldots m(t_n)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n = \left|\int_0^1 \varphi_i(t)\, \psi_j(t)\, m(t)\, \mathrm{d}t\right|_1^n .$$

Наконец, нам нужна будет еще важная теорема, доказанная в [2] (теорема 1, стр. 217):

Теорема Б. *Пусть $\Gamma(x, t)$ – осцилляционное ядро интегрального уравнения*

$$\int_0^1 \Gamma(x, t)\, y(t)\, m(t)\, \mathrm{d}t = \lambda y(x)\,, \quad m(x) \in C^+_{(0,1)}\,.$$

Тогда имеет место:

1. *Каждое собственное число λ_i спектра $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots$ является невырожденным;* 2. *соответственные собственные функции $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots$ образуют последовательность Маркова.*

1. ПРИНЦИП АРИФМЕТИЧЕСКОГО, ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО И ГАРМОНИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Для наибольшего собственного числа $\lambda(m)$ интегрального уравнением (1) справедливо соотношение

$$0 < \lambda(m) = \sup_{0 \neq Y \in C_\Omega} \frac{\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega \Gamma(x, t)\; Y(x)\; Y(t)\, m(x)\, m(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_\Omega Y^2(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x}$$

при условии, что ядро $\Gamma(x, t)$ или положительно определенно или обладает свойством А. В обоих случаях правая часть определяет положительный функционал $\lambda(m)$ на C^+_Ω. Теперь мы исследуем некоторые его свойства в зависимости от условий, выполняемых ядром $\Gamma(x, t)$. Для упрощения записи обозначим арифметическое, геометрическое и гармоническое средние чисел $x, y > 0$ символами

$$a(x, y) = \tfrac{1}{2}(x + y)\,; \quad g(x\ \ y) = \sqrt{xy}\,; \quad h(x, y) = \frac{2xy}{x + y}\,.$$

Если $m_1(x), m_2(x) \in C_\Omega^+$, то будет, очевидно, и

$$a[m_1(x), m_2(x)]\,, \quad g[m_1(x), m_2(x)]\,, \quad h[m_1(x), m_2(x)] \in C_\Omega^+\,.$$

Теорема 1.1. *Пусть $\Gamma(x, t)$ – положительно определенное ядро уравнения* (1), $m_1(x), m_2(x) \in C_\Omega^+$. *Тогда*

$$\lambda[a(m_1, m_2)] \leqq a[\lambda(m_1), \lambda(m_2)]\,;$$
$$\lambda[h(m_1, m_2)] \leqq h[\lambda(m_1), \lambda(m_2)]\,.$$

Доказательство. В работе [3] (часть IV) доказана субаддитивность функционала $\lambda(m)$, т. е.

$$\lambda(m_1 + m_2) \leqq \lambda(m_1) + \lambda(m_2)\,,$$

откуда, разделив на два, получим первую часть утверждения.

Для доказательства второй части утверждения введем в выражение

$$\frac{\int_\Omega\int_\Omega \Gamma(x, t)\; Y(x)\; Y(t)\, m(x)\, m(t)\; \mathrm{d}x\; \mathrm{d}t}{\int_\Omega Y^2(x)\; m(x)\; \mathrm{d}x}$$

новую функцию $\varphi(x)$ посредством соотношения

$$\varphi(x) = Y(x)\, m(x)\,, \quad Y(x) \in C_\Omega\,.$$

Ввиду того, что $m(x) \in C_\Omega^+$, последнее соотношение определяет взаимно однозначное отображение C_Ω на себя, а в силу однородности выражения и положительной определенности ядра функционал $\lambda(m)$ можно выразить в виде

$$\lambda(m) = \sup_{\varphi \in B_\Gamma} \left[\int_\Omega \varphi^2(x)\; m^{-1}(x)\; \mathrm{d}x\right]^{-1},$$

где множество $B_\Gamma \subset C_\Omega$ определяется соотношением

$$\varphi \in B_\Gamma \Leftrightarrow \int_\Omega\int_\Omega \Gamma(x, t)\; \varphi(x)\; \varphi(t)\; \mathrm{d}x\; \mathrm{d}t = 1\,.$$

Положим теперь $m(x) = h[m_1(x), m_2(x)]$, и пусть $\varphi(x)$ является максимализирующей функцией для $m(x)$. Тогда будет

$$\lambda(m) = \left[\int_\Omega \varphi^2(x)\; m^{-1}(x)\; \mathrm{d}x\right]^{-1},$$

$$\lambda(m_1) \geqq \left[\int_\Omega \varphi^2(x)\; m_1^{-1}(x)\; \mathrm{d}x\right]^{-1}, \quad \lambda(m_2) \geqq \left[\int_\Omega \varphi^2(x)\; m_2^{-1}(x)\; \mathrm{d}x\right]^{-1}.$$

Из последних двух неравенств получим

$$\lambda^{-1}(m_1) + \lambda^{-1}(m_2) \leqq \int_\Omega \varphi^2(x)[m_1^{-1}(x) + m_2^{-1}(x)]\,dx\,.$$

Однако,

$$m(x) = \frac{2m_1(x)\,m_2(x)}{m_1(x) + m_2(x)}$$

следовательно, $m^{-1}(x) = \frac{1}{2}[m_1^{-1}(x) + m_2^{-1}(x)]$, откуда

$$2\lambda^{-1}(m) = \int_\Omega \varphi^2(x)[m_1^{-1}(x) + m_2^{-1}(x)]\,dx\,.$$

Сравнивая, мы получим $\lambda^{-1}(m_1) + \lambda^{-1}(m_2) \leqq 2\lambda^{-1}(m)$, откуда следует наше утверждение.

Теперь докажем аналогичное утверждение для случая ядра, обладающего свойством А.

Теорема 2.1. *Пусть $\Gamma(x, t)$ – ядро со свойством* А *и пусть $m_1(x), m_2(x) \in C_\Omega^+$. Тогда*

$$\lambda[g(m_1, m_2)] \leqq g[\lambda(m_1), \lambda(m_2)]\,.$$

Доказательство. Если положить $Z(x) = Y(x)\sqrt{m(x)}$, то относительно функционала $\lambda(m)$ справедливо соотношение

$$\lambda(m) = \sup_{0 \neq Z \in B} \int_\Omega\int_\Omega \Gamma(x, t)\, Z(x)\, Z(t) \sqrt{m(x)}\sqrt{m(t)}\,dx\,dt\,,$$

где множество $B \subset C_\Omega$ определяется предписанием

$$Z \in B \Leftrightarrow \int_\Omega Z^2(x)\,dx = 1\,.$$

Положим $m(x) = g[m_1(x), m_2(x)]$. Пусть теперь $z(x)$ – максимализирующая функция для $m(x)$. Тогда имеют место соотношения

$$\lambda(m) = \int_\Omega\int_\Omega \Gamma(x, t)\, z(x)\, z(t) \sqrt{m(x)}\sqrt{m(t)}\,dx\,dt\,,$$

$$\lambda(m_1) \geqq \int_\Omega\int_\Omega \Gamma(x, t)\, z(x)\, z(t) \sqrt{m_1(x)}\sqrt{m_1(t)}\,dx\,dt\,,$$

$$\lambda(m_2) \geqq \int_\Omega\int_\Omega \Gamma(x, t)\, z(x), z(t) \sqrt{m_2(x)}\sqrt{m_2(t)}\,dx\,dt\,.$$

По приведенной теореме из [2] (лемма 1, стр. 214) имеем $z(x) > 0$ для $x \in \Omega$ и, следовательно, функция $G(x, t) = \Gamma(x, t)\, z(x)\, z(t)$ неотрицательна на $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, т. е. $G(x, t) \geqq 0$, $x, t \in \overline{\Omega}$.

Если положить $[m_i(x)\, m_i(t)]^{\frac{1}{4}} = \varphi_i(x, t)$ $(i = 1, 2)$, то в силу неотрицательности $G(x, t)$ справедливо неравенство Шварца

$$\left[\iint\limits_{\Omega\,\Omega} \varphi_1(x, t)\, \varphi_2(x, t)\, G(x, t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\right]^2 \leqq$$

$$\leqq \iint\limits_{\Omega\,\Omega} \varphi_1^2(x, t)\, G(x, t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \,.\, \iint\limits_{\Omega\,\Omega} \varphi_2^2(x, t)\, G(x, t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,,$$

а тем более и $\lambda^2(m) \leqq \lambda(m_1)\, \lambda(m_2)$, что и требовалось доказать.

Теорему 2.1 нетрудно обобщить на функционал $\alpha(m, p)$. Докажем следующее утверждение:

Теорема 3.1. *Пусть* $K(x, t)$ – *ядро со свойством* А. *Тогда функционал* $\alpha(m, p)$, *определенный соотношением* (3) *в введении, удовлетворяет неравенству*

$$\alpha(\sqrt{m_1 m_2}, \sqrt{p_1 p_2}) \leqq \sqrt{\alpha(m_1, p_1)\, \alpha(m_2, p_2)}$$

для $m_1(x)$, $m_2(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x) \in C_\Omega^+$.

Доказательство. Функционал $\alpha(m, p)$ можно, очевидно, выразить в виде

$$\alpha(m, p) = \sup_{u,v\in B} \iint\limits_{\Omega\,\Omega} K(x, t)\, u(x)\, v(t)\, \sqrt{m(x)}\, \sqrt{p(t)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,.$$

Если теперь положить $m(x) = \sqrt{m_1(x)\, m_2(x)}$, $p(x) = \sqrt{p_1(x)\, p_2(x)}$ и если $u(x)$, $v(x)$ – максимализирующая пара функций для $m(x)$, $p(x)$, то

$$\alpha(m, p) = \iint\limits_{\Omega\,\Omega} K(x, t)\, u(x)\, v(t)\, \sqrt{m(x)}\, \sqrt{p(t)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,,$$

$$\alpha(m_1, p_1) \geqq \iint\limits_{\Omega\,\Omega} K(x, t)\, u(x)\, v(t)\, \sqrt{m_1(x)}\, \sqrt{p_1(t)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,,$$

$$\alpha(m_2, p_2) \geqq \iint\limits_{\Omega\,\Omega} K(x, t)\, u(x)\, v(t)\, \sqrt{m_2(x)}\, \sqrt{p_2(t)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,.$$

Далее, если положить

$$G(x, t) = K(x, t)\, u(x)\, v(t)\,,$$
$$[m_i(x)\, p_i(t)]^{\frac{1}{4}} = \varphi_i(x, t)\,, \quad i = 1, 2,$$

то в силу нетроицательности функций $u(x)$, $v(x)$ на $\overline{\Omega}$ можно снова воспользоваться неравенством Шварца, откуда и получится наше утверждение.

Непосредственным следствием является следующая

Теорема 4.1. *Функционал* $\alpha(m, p)$ *удовлетворяет функциональному соотношению*

$$\alpha(\sqrt{mp}, \sqrt{mp}) \leqq \alpha(m, p) .$$

Доказательство. Утверждение следует из (3.1), если положить $m_1(x) = p_2(x) = m(x)$, $m_2(x) = p_1(x) = p(x)$, и из соотношения $\alpha(m, p) = \alpha(p, m)$, вытекающего из симметрии ядра $K(x, t)$.

2. ПРИНЦИП ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО СПЕКТРА КРАЕВОЙ ПРОБЛЕМЫ

$$\text{(5)} \qquad \begin{gathered} \alpha z''(x) + m(x)\, y(x) = 0 , \quad \alpha y''(x) + p(x)\, z(x) = 0 , \\ m(x) > 0 , \quad p(x) > 0 , \quad x \in \langle 0, 1\rangle ; \end{gathered}$$

$$\text{(5a)} \qquad y(0) = y(1) = z(0) = z(1) = 0 .$$

Непосредственным интегрированием системы (5) с учетом (5a) мы получим эквивалентную систему интегральных уравнений

$$\text{(6)} \qquad \begin{gathered} \int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, m(t)\, \mathrm{d}t = \alpha z(x) , \\ \int_0^1 K(x, t)\, z(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t = \alpha y(x) , \end{gathered}$$

где $K(x, t)$ определяется так:

$$K(x, t) = \begin{cases} x(1 - t) & \text{для} \quad x \leqq t , \\ t(1 - x) & \text{для} \quad t \leqq x . \end{cases}$$

Ядро $K(x, t)$ является осцилляционным (см. [2]).

Докажем теперь теорему о сложении двух осцилляционных ядер.

Теорема 2.1. *Пусть* $K_1(x, t)$, $K_2(x, K)$ *— два осцилляционных ядра на* $\langle 0, 1\rangle$ *и пусть* $m(x) \in C^+_{(01)}$. *Тогда ядро* $\Gamma(x, t) = \int_0^1 K_1(x, s)\, K_2(x, s)\, m(s)\, \mathrm{d}s$ *будет также осцилляционным.*

Доказательство. Очевидно, $\Gamma(x, x) > 0$, $x \in (0, 1)$ $\Gamma(x, t) \geqq 0$, $x, t \in \langle 0, 1\rangle$. Остается показать, что для любого натурального n будет

$$\overset{n}{\Gamma}(x, x) > 0 , \quad x \in \Sigma_n ; \qquad \overset{n}{\Gamma}(x, t) \geqq 0 , \quad x, t \in \overline{\Sigma}_n .$$

Мы имеем

$$\Gamma\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{pmatrix} = |\Gamma(x_i, t_j)|_1^n = \left| \int_0^1 K_1(x_i, s)\, K_2(t_j, s)\, m(s)\, \mathrm{d}s \right|_1^n ,$$

что согласно тождеству (4) равно

$$\left|\int_0^1 K_1(x_i, s)\, K_2(t_j, s)\, m(s)\, \mathrm{d}s\right|_1^n =$$

$$= \int K_1\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ s_1, s_2, \ldots, s_n \end{pmatrix} K_2\begin{pmatrix} t_1, t_2, \ldots, t_n \\ s_1, s_2, \ldots, s_n \end{pmatrix} m(s_1)\, m(s_2) \ldots m(s_n)\, \mathrm{d}s_1\, \mathrm{d}s_2 \ldots \mathrm{d}s_n\,,$$

если в нем положить

$$\varphi_i(s) = K_1(x_i, s)\,; \quad \psi_i(s) = K_2(t_i, s)\,.$$

Итак, для $x, t \in \Sigma_n$ получим

$$\overset{n}{\Gamma}(x, t) = \int_{\Sigma_n} \overset{n}{K_1}(x, s)\, \overset{n}{K_2}(t, s)\, m(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

где

$$m(s) = m(s_1)\, m(s_2) \ldots m(s_n) \in C^+_{\Sigma_n}\,, \quad \mathrm{d}s = \mathrm{d}s_1\, \mathrm{d}s_2 \ldots \mathrm{d}s_n\,.$$

Из указанного выше соотношения непосредственно следует, что $\overset{n}{\Gamma}(x, t)$ обладает свойством A на Σ_n, откуда следует наше утверждение.

Теорема 2.2. *Каждое собственное число α_i спектра $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \ldots$ системы* (6) *невырождено, а соответственные собственные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, …, $z_1(x)$, $z_2(x)$, $z_3(x)$, … образуют последовательности Маркова.*

Доказательство. Исключая сначала $y(x)$ и потом $z(x)$ из системы (6), мы получим для обеих функций интегральное уравнение с ядром, которое будет, согласно (1.2), осцилляционным. Тогда наше утверждение следует из теоремы Б (см. введение).

Обозначим теперь символом $\alpha_i(m, p)$ i-е положительное собственное число системы (6) и положим

$$\vartheta_n(m, p) = \prod_1^n \alpha_i(m, p)\,, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 2.3. *Пусть $m_1(x), m_2(x), p_1(x), p_2(x) \in C^+_{(0,1)}$. Тогда будет*

$$\vartheta_n[\sqrt{m_1 m_2}, \sqrt{p_1 p_2}] \leqq \sqrt{\vartheta_n(m_1, p_1)\, \vartheta_n(m_2, p_2)}\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Решим систему

$$\int_{\Sigma_n} \overset{n}{K}(x, t)\, y(t)\, m(t)\, \mathrm{d}t = \vartheta z(x)\,, \qquad \int_{\Sigma_n} \overset{n}{K}(x, t)\, z(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t = \vartheta y(x)\,,$$

где $m, p \in C^+_{\Sigma_n}$. Пусть теперь $m(x)$, $p(x) \in C^+_{(0,1)}$, и положим

$$m(x) = m(x_1)\, m(x_2) \ldots m(x_n)\,,$$
$$p(x) = p(x_1)\, p(x_2) \ldots p(x_n)\,; \quad x \in \overline{\Sigma}_n\,.$$

Тогда указанная выше система удовлетворяется парой функций $y(x)$, $z(x)$:

$$y(x) = \Delta\begin{pmatrix} y_1, y_2, \dots, y_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix},$$

$$z(x) = \Delta\begin{pmatrix} z_1, z_2, \dots, z_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}, \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \bar{\Sigma}_n,$$

причем пара $y_i(x)$, $z_i(x)$ является i-ым решением системы (6). В этом мы убедимся непосредственным вычислением:

$$\int_\Sigma K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix} \Delta\begin{pmatrix} y_1, y_2, \dots, y_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix} m(t_1)\, m(t_2) \dots m(t_n)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \dots \mathrm{d}t_n =$$

$$= \left| \int_0^1 K(x_i t)\, y_j(t)\, m(t)\, \mathrm{d}t \right|_1^n = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \left| z_j(x_j) \right|_1^n = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \Delta\begin{pmatrix} z_1, z_2, \dots, z_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}.$$

Так как по теореме Б функции

$$\Delta\begin{pmatrix} y_1, y_2, \dots, y_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}, \quad \Delta\begin{pmatrix} z_1, z_2, \dots, z_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}$$

не принимают нулевых значений на Σ_n, число $\vartheta = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ будет наибольшим собственным числом исследуемой системы, откуда в силу теоремы 3.1 следует наше утверждение.

В качестве следствия получаем теорему:

Теорема 2.4. *Пусть* $m(x)$, $p(x) \in C^+_{(0,1)}$. *Тогда*

$$\vartheta_n(\sqrt{mp}, \sqrt{mp}) \leqq \vartheta_n(m, p), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Доказателство. Теорема следует из 2.3, если положить $m_1 = p_2 = m$, $m_2 = p_1 = p$.

Теперь мы приступим к доказательству заключительной теоремы.

Теорема 2.5. *Функционалы* $\vartheta_n(m, p)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\vartheta_n(m, p) \leqq \sqrt{\vartheta_n(m, m)\, \vartheta_n(p, p)}, \quad n = 1, 2, \dots, m, p \in C^+_{(0,1)}.$$

Доказательство. Для $\vartheta_n(m, p)$ справедливо по теореме А соотношение

$$\vartheta_n(m, p) = \sup_{0 \neq Y, Z \in C_{\Sigma_n}} \frac{\int_{\Sigma_n}\int_{\Sigma_n}^{n} K(x, t)\, Y(x)\, Z(t)\, m(x)\, p(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t}{\left[\int_{\Sigma_n} Y^2(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x \int_{\Sigma_n} Z^2(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}},$$

где

$$m(x) = m(x_1)\, m(x_2) \cdots m(x_n), \quad p(x) = p(x_1)\, p(x_2) \dots p(x_n),$$
$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \dots \mathrm{d}t_n, \qquad x = [x_1, x_2, \dots x_n] \in \bar{\Sigma}_n.$$

Аналогично для $\vartheta_n(m, m)$ и $\vartheta_n(p, p)$ имеет согласно (3а) место

$$\vartheta(m, m) = \sup_{0 \neq Y \in C_{\Sigma_n}} \frac{\int\limits_{\Sigma_n} \int\limits_{\Sigma_n}^{n} K(x, t)\, Y(x)\, Y(t)\, m(x)\, m(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t}{\int\limits_{\Sigma_n} Y^2(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x},$$

$$\vartheta(p, p) = \sup_{0 \neq Z \in C_{\Sigma_n}} \frac{\int\limits_{\Sigma_n} \int\limits_{\Sigma_n}^{n} K(x, t)\, Z(x)\, Z(t)\, p(x)\, p(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t}{\int\limits_{\Sigma_n} Z^2(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x}.$$

По теореме Б пара функций

$$Y(x) = \Delta \begin{pmatrix} y_1, y_2, \ldots, y_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}, \quad Z(x) = \Delta \begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

является максимализирующей парой правой части выражения для $\vartheta_n(m, p)$, ибо, как было показано, эта пара удовлетворяет системе

$$\int\limits_{\Sigma_n}^{n} K(x, t)\, Y(t)\, m(t)\, \mathrm{d}t = \vartheta Z(x),$$

$$\int\limits_{\Sigma_n}^{n} K(x, t)\, Z(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t = \vartheta Y(x).$$

Итак,

$$\vartheta_n(m, p) = \frac{\int\limits_{\Sigma_n} \int\limits_{\Sigma_n}^{n} K(x, t)\, Y(x)\, Z(t)\, m(x)\, p(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t}{\left[\int\limits_{\Sigma_n} Y^2(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x \int\limits_{\Sigma_n} Z^2(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\vartheta_n(m, m) \geqq \frac{\int\limits_{\Sigma_n} \int\limits_{\Sigma_n}^{n} K(x, t)\, Y(x)\, Y(t)\, m(x)\, m(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t}{\int\limits_{\Sigma_n} Y^2(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x},$$

$$\vartheta_n(p, p) \geqq \frac{\int\limits_{\Sigma_n} \int\limits_{\Sigma_n}^{n} K(x, t)\, Z(x)\, Z(t)\, p(x)\, p(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t}{\int\limits_{\Sigma_n} Z^2(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x},$$

откуда следует

$$\frac{\vartheta_n(m, m)\, \vartheta_n(p, p)}{\vartheta_n^2(m, p)} \geqq$$

$$\geqq \frac{\int\limits_{\Sigma}\int\limits_{\Sigma_n} \overset{n}{K}(x, t)\; Y(x)\; Y(t)\, m(x)\, m(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \,.\, \int\limits_{\Sigma_n}\int\limits_{\Sigma_n} \overset{n}{K}(x, t)\, Z(x)\, Z(t)\, p(x)\, p(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t}{\left[\int\limits_{\Sigma_n}\int\limits_{\Sigma_n} \overset{n}{K}(x, t)\; Y(x)\, Z(t)\, m(x)\, p(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\right]^2} \,.$$

Но так как $Y(x)$, $Z(x)$ являются решением указанной выше системы, то

$$\int\limits_{\Sigma_n}\int\limits_{\Sigma_n} \overset{n}{K}(x, t)\; Y(x)\; Y(t)\, m(x)\, m(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \vartheta_n(m, p) \int\limits_{\Sigma_n} Y(x)\, Z(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x \,,$$

$$\int\limits_{\Sigma_n}\int\limits_{\Sigma_n} \overset{n}{K}(x, t)\, Z(x)\, Z(t)\, p(x)\, p(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \vartheta_n(m, p) \int\limits_{\Sigma_n} Y(x)\, Z(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x \,,$$

$$\int\limits_{\Sigma_n}\int\limits_{\Sigma_n} \overset{n}{K}(x, t)\; Y(x)\, Z(t)\, m(x)\, p(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t =$$

$$= \vartheta_n(m, p) \int\limits_{\Sigma_n} Y^2(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x = \vartheta_n(m, p) \int\limits_{\Sigma_n} Z^2(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

Подставляя в выведенное неравенство и сокращая $\vartheta_n(m, p)$, мы получим

$$\frac{\vartheta_n(m, m)\, \vartheta_n(p, p)}{\vartheta_n^2(m, p)} \geqq \frac{\int\limits_{\Sigma_n} Y(x)\, Z(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x \int\limits_{\Sigma_n} Y(x)\, Z(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x}{\int\limits_{\Sigma_n} Y^2(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x \int\limits_{\Sigma_n} Z^2(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x} \,.$$

Теперь мы подставим сюда

$$Y(x) = \Delta \begin{pmatrix} y_1, y_2, \ldots, y_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}, \quad Z(x) = \Delta \begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}.$$

Согласно тождеству (4) нетрудно получить, например,

$$\int\limits_{\Sigma_n} \Delta \begin{pmatrix} y_1, y_2, \ldots, y_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} m(x_1)\, m(x_2) \ldots m(x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \left| \int_0^1 y_i(x)\, z_j(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x \right|_1^n ,$$

и привести таким образом неравенство к виду

$$(7)\qquad \frac{\vartheta_n(m, m)\,\vartheta_n(p, p)}{\vartheta_n(m, p)} \geqq \frac{\left|\int_0^1 y_i(x)\, z_j(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x\right|_1^n \left|\int_0^1 y_i(x)\, z_j(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x\right|_1^n}{\left|\int_0^1 y_i(x)\, y_j(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x\right|_1^n \left|\int_0^1 z_i(x)\, z_j(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x\right|_1^n}\,.$$

Напишем теперь систему (5) для i-го собственного числа α_i:

$$\begin{aligned} \alpha_i z_i''(x) + m(x)\, y_i(x) &= 0\,, \\ \alpha_i y_i''(x) + p(x)\, z_i(x) &= 0\,. \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Умножив первое уравнение на $y_j(x)$ и проинтегрировав по частям с учетом условия (5a), нетрудно получить

$$\int_0^1 y_i(x)\, y_j(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x = \alpha_i \int_0^1 z_i'(x)\, y_j'(x)\, \mathrm{d}x\,, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

и аналогично

$$\int_0^1 z_i(x)\, z_j(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x = \alpha_i \int_0^1 y_i'(x)\, z_j'(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

$$\int_0^1 y_i(x)\, z_j(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x = \alpha_i \int_0^1 z_i'(x)\, z_j'(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

$$\int_0^1 z_i(x)\, y_j(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x = \alpha_i \int_0^1 y_i'(x)\, y_j'(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Пользуясь этими соотношениями можно написать, напр., для первого определителя в числителе соотношения (7)

$$\left|\int_0^1 y_i(x)\, z_j(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x\right|_1^n = \left|\alpha_i \int_0^1 z_i'(x)\, z_j'(x)\, \mathrm{d}x\right|_1^n = \vartheta_n(m, p) \left|\int_0^1 z_i'(x)\, z_j'(x)\, \mathrm{d}x\right|_1^n \approx$$

$$= \vartheta_n(m, p) \int_{\Sigma_n} \Delta^2 \begin{pmatrix} z_1', & z_2', & \ldots & z_n' \\ x_1, & x_2, & \ldots & x_n \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n\,,$$

и аналогично для остальных определителей. Сокращая на $\vartheta_n^2(m, p)$, мы приведем неравенство (7) наконец к виду

$$\frac{\vartheta_n(m, m)\,\vartheta_n(p, p)}{\vartheta_n^2(m, p)} \geqq$$

$$\geqq \frac{\int_{\Sigma_n} \Delta^2 \begin{pmatrix} z_1', & z_2', & \ldots, & z_n' \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \int_{\Sigma_n} \Delta^2 \begin{pmatrix} y_1', & y_2', & \ldots, & y_n' \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots, \mathrm{d}x_n}{\left[\int_{\Sigma_n} \Delta \begin{pmatrix} y_1', & y_2', & \ldots, & y_n' \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} z_1', & z_2', & \ldots, & z_n' \\ x_1, & x_1, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n\right]^2}\,.$$

Согласно неравенству Шварца выражение в правой части, однако, больше или равно единице, откуда и следует наше утверждение.

В сочетании с результатом теоремы 3.2 ясно, что функционалы $\vartheta_n(m, p)$ удовлетворяют неравенствам

$$\vartheta_n(\sqrt{mp}, \sqrt{mp}) \leqq \vartheta_n(m, p) \leqq \sqrt{\vartheta_n(m, m)\, \vartheta_n(p, p)}\,.$$

Литература

[1] *Ф. Р. Гантмахер* и *М. Г. Крейн:* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Москва 1950.

[2] *Л. Янош:* Вывод одного неравенства для первых собственных значений двух краевых задач. Чехосл. мат. ж., *10* (*85*), 1960, 68—82.

[3] *Л. Янош:* Однородные функционалы на локально компактных конусах. Чехосл. мат. ж. *10* (*85*), 1960, 380—399.

Summary

FUNCTIONAL PROPERTIES OF THE SPECTRUM OF BOUNDARY PROBLEMS

LUDVÍK JANOŠ, Praha

The main result of this paper are the relations

$$\vartheta_n(\sqrt{mp}, \sqrt{mp}) \leqq \vartheta_n(m, p) \leqq \sqrt{\vartheta_n(m, m)\, \vartheta(p, p)}\,,$$

where

$$\vartheta_n(m, p) = \prod_1^n \alpha_i(m, p)\,;$$

$\alpha_i(m, p)$ is the i-th positive eigenvalue of the boundary problem

$$\alpha\, z''(x) + m(x)\, p(x) = 0\,, \quad \alpha\, y''(x) + p(x)\, z(x) = 0\,, \quad x \in \langle 0, 1\rangle\,;$$

$y(0) = y(1) = z(0) = z(1) = 0$; $m(x)$, $p(x)$ are positive continuous functions on $\langle 0, 1\rangle$.