Alois Švec

Sur la géométrie différentielle d'une surface plongée dans un espace à trois dimensions à connexion projective

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 3, 386–397

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100467

Чехословацкий математический журнал т. 11 (86) 1961, Прага

SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE D'UNE SURFACE PLONGÉE DANS UN ESPACE A TROIS DIMENSIONS A CONNEXION PROJECTIVE

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 1er avril 1960)

On généralise les notions de quadriques de Darboux et de directrices de Wilczynski pour le cas des surfaces dans un espace à connexion projective et on détermine le repère local canonique.

I. LES QUADRIQUES DE DARBOUX D'UNE SURFACE

1. Soit donnée une surface π dans un espace à connexion projective à trois dimensions. Dans mon travail [1], j'ai montré que l'étude de ses propriétés est équivalente à l'étude d'une variété $P^2_{0,3}$ que j'appellerai brièvement *surface à connexion projective* (ou encore surface tout court). On peut choisir les repères locaux de la surface à connexion projective de telle manière que la connexion soit donnée par les équations

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_0 &= \omega_0^0 A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2 , \\ \mathrm{d}A_1 &= \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + (1-h)\,\omega^2 A_3 , \\ \mathrm{d}A_2 &= \omega_2^0 A_0 + \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + (1+h)\,\omega^1 A_3 , \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_3^0 A_0 + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 ; \end{aligned} \tag{1}$$
$$\omega^a = f_1^a(u, v)\,\mathrm{d}u + f_2^a(u, v)\,\mathrm{d}v , \quad \omega_i^j = a_i^j \omega^1 + b_i^j \omega^2 ,$$
$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 , \quad [\omega^1 \omega^2] \neq 0 .$$

Les changements admissibles des formes ω^a et des repères locaux sont

$$\omega^1 = r\bar{\omega}^1 , \quad \omega^2 = s\bar{\omega}^2 , \tag{2}$$

$$\begin{aligned} A_0 = \alpha_0^0 \bar{A}_0 , \quad A_1 = \alpha_1^0 \bar{A}_0 + r^{-1}\alpha_0^0 \bar{A}_1 , \quad A_2 = \alpha_2^0 \bar{A}_0 + s^{-1}\alpha_0^0 \bar{A}_2 , \\ A_3 = \alpha_3^0 \bar{A}_0 + \alpha_3^1 \bar{A}_1 + \alpha_3^2 \bar{A}_2 + r^{-1}s^{-1}\alpha_0^0 \bar{A}_3 ; \quad (\alpha_0^0)^4 = r^2 s^2 . \end{aligned} \tag{3}$$

Il est évident qu'on peut même supposer que l'on ait choisi les paramètres asymptotiques sur la surface, et

$$\omega^1 = \mathrm{d}u , \quad \omega^2 = \mathrm{d}v , \tag{4}$$

en échangeant les paramètres asymptotiques

(5) $$u = u(\bar{u}), \quad v = v(\bar{v})$$

on obtient

(6) $$\mathrm{d}u = u'\,\mathrm{d}\bar{u}, \quad \mathrm{d}v = v'\,\mathrm{d}\bar{v} \quad \left(\text{c'est-à-dire } r = u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}}, \; s = v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right).$$

Le calcul direct fait voir que les lois de transformation des fonctions a_1^2, a_2^1, b_1^2, b_2^1 lors de l'application simultanée de (3) et (6) sont

(7) $$\bar{a}_1^2 = \frac{u'^2}{v'}\,a_1^2, \quad \bar{b}_2^1 = \frac{v'^2}{u'}\,b_2^1,$$

(8) $$\begin{aligned}\bar{b}_1^2 &= u'b_1^2 - u'(\alpha_0^0)^{-1}\,\alpha_1^0 + u'v'(1-h)(\alpha_0^0)^{-1}\,\alpha_3^2,\\ \bar{a}_2^1 &= v'a_2^1 - v'(\alpha_0^0)^{-1}\,\alpha_2^0 + u'v'(1+h)(\alpha_0^0)^{-1}\,\alpha_3^1.\end{aligned}$$

Il découle des équations (8) qu'on peut spécialiser les repères locaux de telle façon que l'on ait

(9) $$b_1^2 = a_2^1 = 0$$

pour les changements admissibles des repères locaux, les conditions (9) étant toujours vérifiées, on obtient

(10) $$\alpha_1^0 = (1-h)\,v'\alpha_3^2, \quad \alpha_2^0 = (1+h)\,u'\alpha_3^1.$$

Posons enfin

(11) $$a_1^2 = \beta, \quad b_2^1 = \gamma$$

de sorte que j'aurai des repères locaux pour lesquels

(12) $$\begin{aligned}\mathrm{d}A_0 &= \omega_0^0A_0 + \mathrm{d}u\,A_1 + \mathrm{d}v\,A_2,\\ \mathrm{d}A_1 &= \omega_1^0A_0 + \omega_1^1A_1 + \beta\,\mathrm{d}u\,A_2 + (1-h)\,\mathrm{d}v\,A_3,\\ \mathrm{d}A_2 &= \omega_2^0A_0 + \gamma\,\mathrm{d}v\,A_1 + \omega_2^2A_2 + (1+h)\,\mathrm{d}u\,A_3,\\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_3^0A_0 + \omega_3^1A_1 + \omega_3^2A_2 + \omega_3^3A_3;\end{aligned}$$

les équations (7) prennent la forme

(13) $$\bar{\beta} = \frac{u'^2}{v'}\,\beta, \quad \bar{\gamma} = \frac{v'^2}{u'}\,\gamma.$$

Dans ce qui suit, j'emploierai la notation

(14) $$a = a_0^0 - a_1^1 - a_2^2 + a_3^3, \quad b = b_0^0 - b_1^1 - b_2^2 + b_3^3.$$

2. Choisissons un point fixe A_0 de la surface π étudiée et considérons son espace local $P_3(A_0)$. Nous pouvons introduir les coordonnées locales des points analytiques dans $P_3(A_0)$ par rapport à la base locale correspondante par la relation

(15) $$X = x^0A_0 + x^1A_1 + x^2A_2 + x^3A_3 \equiv x^iA_i.$$

J'appelle *quadrique osculatrice* Q de la surface π au point A_0 toute quadrique de l'espace local $P_3(A_0)$ qui contient l'élément du second ordre du développement d'une courbe γ quelconque de la surface π, passant par le point A_0 (il s'agit du développement en $P_3(A_0)$). La courbe γ soit donnée par l'équation

$$v = v(u)\,, \tag{16}$$

la notation $v' = \dfrac{dv}{du}$, etc. ne sera certainement pas en collision avec (6). Pour le développement γ^* de la courbe γ on aura

$$A = (A)_0 + u(A')_0 + \tfrac{1}{2}u^2(A'')_0 + \tfrac{1}{6}u^3(A''')_0 + \dots \tag{17}$$

où

$$\begin{aligned}(A)_0 &= A_0\,,\\ (A')_0 &= (a_0^0 + b_0^0 v')\,A_0 + A_1 + v'A_2\,,\\ (A'')_0 &= (a_{0u}^0 + a_{0v}^0 v' + b_{0u}^0 v' + b_{0v}^0 v' + b_0^0 v'' + \overline{a_0^0 + b_0^0 v'}^2 +\\ &\quad + a_1^0 + b_1^0 v' + a_2^0 v' + b_2^0 v'^2)\,A_0 +\\ &\quad + (a_0^0 + b_0^0 v' + a_1^1 + b_1^1 v' + \gamma v'^2)\,A_1 +\\ &\quad + (v'' + a_0^0 v' + b_0^0 v'^2 + \beta + a_2^2 v' + b_2^2 v'^2)\,A_2 + 2v'A_3\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Considérons, dans $P_3(A_0)$ la quadrique

$$(X, X) \equiv c_{ij}x^i x^j = 0\,, \quad c_{ij} = c_{ji}\,; \quad i, j = 0, \dots, 3\,. \tag{19}$$

Si (19) est une quadrique osculatrice, il doit y avoir

$$(A, A) = 0 \tag{20}$$

identiquement en u^0, u^1, u^2 pour tout v', v''. En y appliquant (17) on obtient

$$\begin{aligned}((A)_0, (A)_0) &= 0\,,\\ ((A)_0, (A')_0) &= 0\,,\\ ((A)_0, (A'')_0) + ((A')_0, (A')_0) &= 0\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Il s'ensuit de (19) que $(A_i, A_j) = c_{ij}$; en substituant (18) dans $(21_{1,2})$ il vient

$$c_{00} = c_{01} = c_{02} = 0\,. \tag{22}$$

La substitution en (21) donne

$$2v'(A_0, A_3) + (A_1, A_1) + v'^2(A_2, A_2) + 2v'(A_1, A_2) = 0$$

de sorte que

$$c_{11} = c_{22} = c_{03} + c_{12} = 0\,. \tag{23}$$

L'équation de la quadrique osculatrice générale est donc (je pose $c_{12} = 1$; dans le cas où $c_{12} = 0$ la quadrique en question est singulière)

$$x^0x^3 - x^1x^2 - c_{13}x^1x^3 - c_{23}x^2x^3 = \tfrac{1}{2}c_{33}(x^3)^2\,. \tag{24}$$

Cherchons sur la surface π des courbes (16) passant par A_0 et telles que leur développement en $P_3(A_0)$ a avec la quadrique (23) un contact du troisième ordre. Pour une telle courbe l'équation (20) doit être vérifiée identiquement en u^0, u^1, u^2, u^3, on doit donc avoir

$$((A)_0, (A''')_0) + 3((A')_0, (A'')_0) = 0\,. \tag{25}$$

Le calcul direct donne

$$\begin{aligned}(A''')_0 = (.)A_0 + (.)A_1 + (.)A_2 &+ \\ + \big[(3 + h)\,v'' + (1 + h)\,\beta + (2a_0^0 + a_1^1 + a_2^2 + 2a_3^3 - ha_1^1 + ha_2^2)\,v' &+ \\ + (2b_0^0 + b_1^1 + b_2^2 + 2b_3^3 - hb_1^1 + hb_2^2)\,v'^2 + \gamma v'^3\big]\,A_3\,,&\end{aligned} \tag{26}$$

il en vient par substitution en (25)

$$\begin{aligned}hv'' + (h - 2)\,\beta + (2a + \overline{a_2^2 - a_1^1}\,.\,h - 6c_{13})\,v' &+ \\ + (2b + \overline{b_2^2 - b_1^1}\,.\,h - 6c_{23})\,v'^2 - (h + 2)\,\gamma v'^3 &= 0\,.\end{aligned} \tag{27}$$

Si la torsion h de la surface π est $\neq 0$, alors il existe sur la surface π des courbes passant par A_0 qui ont une tangente donnée arbitrairement et un contact du troisième ordre avec une quadrique osculatrice (24) *arbitrairement choisie.* Toutes ces courbes-là admettent la représentation paramétrique

$$v = v_0 + uv' + \tfrac{1}{2}u^2v'' + \tfrac{1}{6}u^3v''' + \ldots$$

où v', v'' sont liés par l'équation (27). Pour $h = 0$ (27) se réduit à

$$\beta + (3c_{13} - a)\,v' + (3c_{23} - b)\,v'^2 + \gamma v'^2 = 0\,. \tag{28}$$

Pour toute quadrique osculatrice Q (24) il existe trois tangentes à la surface π au point A_0 jouissant de la propriété: le développement de toute courbe qui touche à une d'elles a un contact du troisième ordre avec Q. Les quadriques telles que les trois tangentes correspondantes sont apolaires par rapport aux tangentes asymptotiques, forment le faisceau

$$x^0x^3 - x^1x^2 - \tfrac{1}{3}ax^1x^3 - \tfrac{1}{3}bx^2x^3 = \tfrac{1}{2}c_{33}(x^3)^2\,; \tag{29}$$

les trois tangentes mentionnées engendrent alors sur π une 3-couche de *courbes de Darboux*

$$\beta\,\mathrm{d}u^3 + \gamma\,\mathrm{d}v^3 = 0\,. \tag{30}$$

3. Sur la surface π donnée par les équations (12) considérons une courbe γ (16) qui touche au point A_0 l'asymptotique $v = \text{const}$, on a alors $v' = 0$ en A_0. En chaque point de la courbe γ considérons la tangente à l'asymptotique $u = \text{const}$, passant par ce point; développons la surface réglée ainsi obtenue dans l'espace local $P_3(A_0)$. Je vais trouver l'équation de la quadrique Q (19) dont un regulus a un contact réglé du second ordre avec le développement de la surface mentionnée. La quadrique Q doit contenir tous les points de la droite $\{A_0, A_2\}$, c'est-à-dire on doit avoir $(A_0 + tA_2, A_0 + tA_2) = 0$ identiquement en t, ce qui donne

$$(A_0, A_0) = (A_0, A_2) = (A_2, A_2) = 0\,. \tag{31}$$

La différentiation (en u) de ces équations donne

$$(32)\qquad (A_0, A_1) = 0\,, \qquad (A_1, A_2) + \gamma v'(A_0, A_1) + (1 + h)(A_0, A_3) = 0\,,$$
$$\gamma v'(A_1, A_2) + (1 + h)(A_2, A_3) = 0\,;$$

en y possant $v' = 0$ on obtient

$$(33)\qquad (A_0, A_1) = 0\,, \quad (A_1, A_2) + (1 + h)(A_0, A_3) = 0\,, \quad (A_2, A_3) = 0\,.$$

Une nouvelle différentiation des équations (32), l'application de (31) + (33) et $v' = 0$ donne

$$(34)\qquad (A_1, A_1) = 0\,, \quad \left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right)(A_1, A_2) - 2(1 + h)(A_1, A_3) = 0\,,$$
$$(\gamma v'' + \overline{1 + h}\,.\,a_3^1 - a_2^0)(A_0, A_3) - (1 + h)(A_3, A_3) = 0\,.$$

Pour la quadrique cherchée on a (31), (33) et (34) de sorte que son équation est

$$(35)\qquad (1 + h)\,x^1x^2 - x^0x^3 + \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right)x^1x^3 =$$
$$= \frac{1}{2(1 + h)}\,(\overline{1 + h}\,a_3^1 - a_2^0 + \gamma v'')(x^3)^2\,.$$

Considérons l'asymptotique $v = \text{const}$ passant par le point A_0 et la courbe (16) qui la touche (cela veut dire que $v' = 0$). Pour les développements de ces deux courbes dans l'espace local $P_3(A_0)$ on a — voir (17) et (18) —

$$(36)\qquad A = A_0 + u(a_0^0 A_0 + A_1) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}u^2(\overline{a_{0u}^0 + (a_0^0)^2 + a_1^0}\,.\,A_0 + \overline{a_0^0 + a_1^1}\,.\,A_1 + \beta A_2) + \ldots$$

ou encore

$$A = A_0 + u(a_0^0 A_0 + A_1) + \tfrac{1}{2}u^2(\overline{a_{0u}^0 + (a_0^0)^2 + a_1^0}\,.\,A_0 + \overline{a_0^0 + a_1^1}\,.\,A_1 +$$
$$+ \overline{v'' + \beta}\,.\,A_2) + \tfrac{1}{6}u^3\{(.)A_0 + (.)A_1 + (.)A_2 +$$
$$+ \beta(1 + h + \overline{3 + h}\,.\,v)\,A_3\} + \ldots$$

de sorte que leur invariant de Smith-Mehmke est

$$(37)\qquad 1 + v = \frac{\beta + v''}{\beta}$$

ce qui donne

$$(38)\qquad v'' = \beta v\,.$$

La quadrique (35) pour la courbe (16) qui a avec l'asymptotique $v = \text{const}$ l'invariant de contact $1 + v$ (je désigne cette quadrique par $Q_v(v)$) a l'équation

$$(39)\qquad (1 + h)\,x^1x^2 - x^0x^3 + \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right)x^1x^3 =$$
$$= \frac{1}{2(1 + h)}\,(\overline{1 + h}\,.\,a_3^1 - a_2^0 + v\beta\gamma)(x^3)^2\,.$$

Si la courbe (16) a un contact du second ordre avec l'asymptotique $c = \text{const}$, on a $v'' = 0$, c'est-à-dire $v = 0$ et j'obtiens *la quadrique de Lie* $Q_v(0)$. Si la courbe (16) a une inflexion au point A_0, on a $v'' = -\beta$, c'est-à-dire $v = -1$ et j'obtiens *la quadrique* $Q_v(-1)$ *de Wilczynski-Bompiani.* Si le plan tangent $\{A_0, A_1, A_2\}$ au point A_0 a un contact du troisième ordre avec la courbe (16), on a en vertu de (36_2) $v = -\dfrac{1+h}{3+h}$ et on obtien *la quadrique de Fubini* $Q_v\left(-\dfrac{1+h}{3+h}\right)$.

4. L'interchangement des asymptotiques est exprimé par la substitution

$$(40) \qquad \left|\begin{matrix} 1 & u & a\colon & \beta & h & a \\ 2 & v & b\colon & \gamma & -h & b \end{matrix}\right|$$

Ainsi p. ex. l'expression $a_1^0 + h - \beta a$ sera remplacée par $b_2^0 - h - \gamma b$.

La quadrique $Q_u(v)$ a donc l'équation

$$(41) \qquad (1-h)\,x^1x^2 - x^0x^3 + \frac{1}{2}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)x^2x^3 = \\ = \frac{1}{2(1-h)}\left(\overline{1-h}\,.\,b_3^2 - b_1^0 + v\beta\gamma\right)(x^3)^2\,.$$

J'appelle *quadrique* $Q(v, \lambda)$ *de Darboux* la quadrique $Q_v(v) + \lambda\, Q_u(v) = 0$ dont l'équation est

$$(42) \qquad (1 + h + \lambda - h\lambda)\,x^1x^2 - (1+\lambda)\,x^0x^3 + \\ + \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)x^1x^3 + \frac{1}{2}\,\lambda\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)x^2x^3 = \\ = \frac{1}{2}\left\{a_3^1 + \lambda b_3^2 - \frac{a_2^0}{1+h} - \frac{\lambda b_1^0}{1-h} + v\beta\gamma\left(\frac{1}{1+h} + \frac{\lambda}{1-h}\right)\right\}(x^3)^2\,.$$

Le faisceau de quadriques $Q(v, \infty)$, ou $Q(v, 0)$ coïncide donc avec le faisceau (41), ou (39) respectivement. La quadrique $Q(v, \lambda)$ est singulière et contient le plan tangent $\{A_0, A_1, A_2\}$ (dont l'équation est $x^3 = 0$) si et seulement si $\lambda = \dfrac{h+1}{h-1}$. Par cela la signification géométrique des nombres v, λ est suffisamment établie pour toute quadrique $Q(v, \lambda)$, car dans chacun des faisceaux $Q(v, \infty)$, $Q(v, 0)$ on a trois quadriques remarquables déterminées géométriquement, il en est de même pour le faisceau $Q(v, \lambda)$ (v étant fixe).

J'appellerai *quadriques de Lie* de la surface π les quadriques de faisceau $Q(0, \lambda)$. J'appellerai *faisceau principal de Darboux* le faisceau de quadriques $Q(v, 1)$ dont les quadriques sont

$$(43) \qquad x^1x^2 - x^0x^3 + \frac{1}{4}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)x^1x^3 + \frac{1}{4}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)x^2x^3 = \\ = \frac{1}{4}\left(a_3^1 + b_3^2 - \frac{a_2^0}{1+h} - \frac{b_1^0}{1-h} + 2\,\frac{v\beta\gamma}{1-h^2}\right)(x^3)^2\,;$$

la quadrique $Q(0, 1)$ qui est à la fois quadrique de Lie et quadrique principale de Darboux et dont l'équation est

$$x^1x^2 - x^0x^3 + \frac{1}{4}\left(a + \frac{h_u}{1+h}\right)x^1x^3 + \frac{1}{4}\left(b - \frac{h_v}{1-h}\right)x^2x^3 = \tag{44}$$
$$= \frac{1}{4}\left(a_3^1 + b_3^2 - \frac{a_2^0}{1+h} - \frac{b_1^0}{1+h}\right)(x^3)^2$$

sera appelée *quadrique principale de Lie.*

5. Soit donnée une surface π (12), considérons les repères locaux duelles

$$E^0 = [A_1A_2A_3]\,, \quad E^1 = -[A_0A_2A_3]\,, \quad E^2 = [A_0A_1A_3]\,, \quad E^3 = -[A_0A_1A_2] \tag{45}$$

et les repères liés à eux

$$F^3 = E^3\,, \quad F^2 = -(1+h)\,E^2\,, \quad F^1 = -(1-h)\,E^1\,, \quad F^0 = E^0\,; \tag{46}$$

les repères (46), bien entendu, ne vérifient plus la condition $[F^3F^2F^1F^0] = 1$. La dualisation π^* de la surface π est donnée par les équations

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F^3 &= (-a_3^3\,\mathrm{d}u - b_3^3\,\mathrm{d}v)\,F^3 + \mathrm{d}u\,F^2 + \mathrm{d}v\,F^1\,, \\ \mathrm{d}F^2 &= (1+h)(a_3^2\,\mathrm{d}u + b_3^2\,\mathrm{d}v)\,F^3 + \\ &\quad + \left\{\left(\frac{h_u}{1+h} - a_2^2\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{h_v}{1+h} - b_2^2\right)\mathrm{d}v\right\}F^2 - \\ &\quad - \frac{1+h}{1-h}\,\beta\,\mathrm{d}u\,F^1 + (1+h)\,\mathrm{d}v\,F^0\,, \\ \mathrm{d}F^1 &= (1-h)(a_3^1\,\mathrm{d}u + b_3^1\,\mathrm{d}v)\,F^3 - \frac{1-h}{1+h}\,\gamma\,\mathrm{d}v\,F^2 + \\ &\quad + \left\{\left(-\frac{h_u}{1-h} - a_1^1\right)\mathrm{d}u + \left(-\frac{h_v}{1-h} - b_1^1\right)\mathrm{d}v\right\}F^1 + (1-h)\,\mathrm{d}u\,F^0\,, \\ \mathrm{d}F^0 &= (-a_3^0\,\mathrm{d}u - b_3^0\,\mathrm{d}v)\,F^3 + \frac{1}{1+h}(a_2^0\,\mathrm{d}u + b_2^0\,\mathrm{d}v)\,F^2 + \\ &\quad + \frac{1}{1-h}(a_1^0\,\mathrm{d}u + b_1^0\,\mathrm{d}v)\,F^1 + (-a_0^0\,\mathrm{d}u - b_0^0\,\mathrm{d}v)\,F^0\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Par comparaison avec (12) on obtient la substitution des expressions particulières figurant dans (12) qui a lieu au passage de la surface π à sa dualisation. Si j'introduis les coordonnées locales duelles par la relation

$$\eta = \eta_3F^3 + \eta_2F^2 + \eta_1F^1 + \eta_0F^0 \equiv \eta_iF^i \tag{48}$$

la quadrique $Q^*(\bar{v}, \lambda)$ aura l'équation

$$(49) \qquad (1 - h + \lambda + h\lambda)\,\eta_1\eta_2 - (1 + \lambda)\,\eta_0\eta_3 - \\ - \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right)\eta_0\eta_2 - \frac{1}{2}\left(b - \frac{h_v}{1 - h}\right)\eta_0\eta_1 = \\ = - \frac{1}{2}\left\{a_3^1 + \lambda b_3^2 - \frac{a_2^0}{1 + h} - \frac{\lambda b_1^0}{1 - h} - \bar{v}\beta\gamma\left(\frac{1}{1 - h} + \frac{\lambda}{1 + h}\right)\right\}\eta_0^2 .$$

Les coordonnées locales

$$(50) \qquad \xi = \xi_3 E^3 + \xi_2 E^2 + \xi_1 E^1 + \xi_0 E^0 \equiv \xi_i E^i$$

sont liées avec η_i par les relations

$$(51) \qquad \xi_3 = \eta_3\,, \quad \xi_2 = -(1 + h)\,\eta_2\,, \quad \xi_1 = -(1 - h)\,\eta_1\,, \quad \xi_0 = \eta_0$$

d'où l'on trouve facilement l'équation de la quadrique $Q^*(\bar{v}, \lambda)$ en coordonnées locales ξ_i. L'équation ponctuelle de cette quadrique est

$$(52) \qquad (1 + \lambda)\,x^1x^2 - \frac{1 - h + \lambda + h\lambda}{1 - h^2}\,x^0x^3 + \\ + \frac{1}{2(1 + h)}\left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right)x^1x^3 + \frac{\lambda}{2(1 - h)}\left(b - \frac{h_v}{1 - h}\right)x^2x^3 = \\ = \frac{1}{2(1 + \lambda)}\,(a_{00}a_{12} - 2a_{01}a_{02})(x^3)^2$$

où

$$a_{00} = a_3^1 + \lambda b_3^2 - \frac{a_2^0}{1 + h} - \frac{\lambda b_1^0}{1 - h} - \bar{v}\beta\gamma\left(\frac{1}{1 - h} + \frac{\lambda}{1 + h}\right),$$

$$a_{01} = \frac{\lambda}{2(1 - h)}\left(b - \frac{h_v}{1 - h}\right), \quad a_{02} = \frac{1}{2(1 + h)}\left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right),$$

$$a_{12} = \frac{1 - h + \lambda + h\lambda}{1 - h^2} .$$

Si je ne borne aux surfaces sans torsion (j'ai donc $h = 0$), la quadrique $Q(v, \lambda)$, ou bien la quadrique $Q^*(\bar{v}, \lambda)$ aura l'équation

$$(53) \qquad (1 + \lambda)(x^1x^2 - x^0x^3) + \tfrac{1}{2}ax^1x^3 + \tfrac{1}{2}\lambda bx^2x^3 = \\ = \tfrac{1}{2}(a_3^1 + \lambda b_3^2 - a_2^0 - \lambda b_1^0 + v\,.\,\overline{1 + \lambda}\,.\,\beta\gamma)(x^3)^2$$

ou respectivement

$$(54) \qquad (1 + \lambda)(x^1x^2 - x^0x^3) + \tfrac{1}{2}ax^1x^3 + \tfrac{1}{2}\lambda bx^2x^3 = \\ = \frac{1}{2}\left(a_3^1 + \lambda b_3^2 - a_2^0 - \lambda b_1^0 - \bar{v}\,.\,\overline{1 + \lambda}\,.\,\beta\gamma - \frac{1}{2}\frac{ab\lambda}{1 + \lambda}\right)(x^3)^2 .$$

Les quadriques $Q(v, \lambda)$ et $Q^*(\bar{v}, \lambda)$ coïncident si et seulement si

$$(55) \qquad v + \bar{v} = \frac{ab\lambda}{(1 + \lambda)^2 \beta\gamma}.$$

6. Dans mon travail [2] j'ai déterminé, à l'aide du procédé dû à E. Čech pour le cas des surfaces d'un espace droit, un réseau de quadriques associées à chaque point de la surface considérée. Il y avait entre elles une quadrique qui généralisait d'une manière évidente le quadrique de Lie et dont l'équation était (cf. [2], (38))

$$(56) \qquad x^1x^2 - x^0x^3 + \frac{1}{4}\left(a - \frac{h_u}{1 + h}\right)x^1x^3 + \frac{1}{4}\left(b + \frac{h_v}{1 - h}\right)x^2x^3 =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\overline{1 - h} \,.\, a_3^1 + \overline{1 + h} \,.\, b_3^2 - a_2^0 - b_1^0 + \varrho_{1v} + \varrho_{2u} - \tfrac{1}{2}ab - \frac{h_uh_v}{2(1 - h^2)}\right)(x^3)^2$$

où

$$(57) \qquad \varrho_1 = -\frac{h_u}{2(1 + h)} - \tfrac{1}{2}a\,, \quad \varrho_2 = \frac{h_v}{2(1 - h)} - \tfrac{1}{2}b\,.$$

Cette quadrique-là est, en géneral, différente de la quadrique principale de Lie (44).

II. REPERE CANONIQUE D'UNE SURFACE

7. Les équations (10) ont la suivante signification géométrique: la droite $\{A_0, A_3\}$ étant choisi, la droite $\{A_1, A_2\}$ est déterminée sans ambiguïté. On trouve facilement sa construction géométrique. La droite polairement conjuguée à $\{A_0, A_3\}$ par rapport à la quadrique $Q(v, \lambda)$ ne dépend pas de v et a pour équations

$$(58) \qquad x^3 = (1 + \lambda)\, x^0 - \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right)x^1 - \frac{1}{2}\,\lambda\left(b - \frac{h_v}{1 - h}\right)x^2 = 0\,.$$

La droite conjuguée à $\{A_0, A_3\}$ par rapport aux quadriques $Q(v, \infty)$ (ou $Q(v, 0)$ resp.) coupe la tangente asymptotique $\{A_0, A_1\}$ (ou $\{A_0, A_2\}$ respectivement) au point A_1 (ou A_2 resp.).

Pour déterminer la repère local canonique il suffit donc de déterminer une droite géométriquement remarquable passant par A_0 et de placer le point A_3 sur elle et sur la quadrique principale de Lie. Dans la suite, je me borne aux surfaces sans torsion et j'identifie la droite $\{A_0, A_3\}$ avec la directrice de Wilczynski généralisée.

8. Sur la surface π donnée par les équations (12) (où l'on pose $h = 0$) considérons l'asymptotique $v =$ const passant par le point A_0 et en chacun de ses points sa tangente; développons ensuite la surface réglée ainsi obtenue dans l'espace local $P_3(A_0)$. Je vais trouver un complex réglé linéaire en $P_3(A_0)$ et qui a un contact du quatrième ordre avec la surface réglée en question. Si le complexe linéaire a la forme

$$(59) \qquad [X, Y] \equiv a_{ij}[x^i, y^j] = 0\,,$$

alors la condition pour qu'il jouisse de la propriété désirée est évidemment

$$\frac{\partial^i}{\partial u^i}[A_0, A_1] = 0 \quad \text{pour} \quad i = 0, \ldots, 4\,.$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}(60)\qquad & [A_0, A_1] = 0\,, \quad [A_0, A_2] = 0\,, \quad [A_1, A_2] + [A_0, A_3] = 0\,, \\ & 2[A_1, A_3] - a[A_1, A_2] = 0\,, \quad \alpha_1[A_1, A_2] + \beta[A_2, A_3] = 0\end{aligned}$$

où

$$(61)\qquad \alpha_1 = a_3^2 - a_1^0 - \tfrac{1}{2}a_u + \tfrac{1}{2}a(a_3^3 - a_2^2) - \tfrac{1}{4}a^2\,.$$

Vu que $[A_i, A_j] = a_{ij}$, on obtient l'équation du complexe linéaire cherché sous la forme

$$(62)\qquad q^{03} - q^{12} - \tfrac{1}{2}aq^{13} + \frac{\alpha_1}{\beta}\,q^{23} = 0\,.$$

En interchangeant les asymptotiques on obtient un autre complexe linéaire

$$(63)\qquad q^{03} + q^{12} - \tfrac{1}{2}bq^{23} + \frac{\alpha_2}{\gamma}\,q^{13} = 0$$

où

$$(64)\qquad \alpha_2 = b_3^1 - b_2^0 - \tfrac{1}{2}b_v + \tfrac{1}{2}b(b_3^3 - b_1^1) - \tfrac{1}{4}b^2\,.$$

Dans le faisceau déterminé par les complexes (62) et (63) il y a des complexes linéaires spéciaux

$$\begin{aligned}(65)\qquad & q^{12} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2}{\gamma} + \tfrac{1}{2}a\right)q^{13} - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} + \tfrac{1}{2}b\right)q^{23} = 0\,, \\ & q^{03} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2}{\gamma} - \tfrac{1}{2}a\right)q^{13} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} - \tfrac{1}{2}b\right)q^{13} = 0\,,\end{aligned}$$

dont les axes sont

$$\begin{aligned}(66)\qquad & p_{03} = 1\,, \quad p_{02} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2}{\gamma} + \tfrac{1}{2}a\right), \quad p_{01} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} + \tfrac{1}{2}b\right), \\ & \qquad p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0\,, \\ & p_{12} = 1\,, \quad p_{02} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2}{\gamma} - \tfrac{1}{2}a\right), \quad p_{01} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} - \tfrac{1}{2}b\right), \\ & \qquad p_{03} = p_{13} = p_{23} = 0\,,\end{aligned}$$

ce qui sont les droites

$$\begin{aligned}(67)\qquad & k_1 = \left\{A_0, -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} + \tfrac{1}{2}b\right)A_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2}{\gamma} + \tfrac{1}{2}a\right)A_2 + A_3\right\}, \\ & k_2 = \left\{A_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2}{\gamma} - \tfrac{1}{2}a\right)A_0, A_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} - \tfrac{1}{2}b\right)A_0\right\}\end{aligned}$$

que j'appelle *directrices de Wilczynski.*

A partir des équations mentionnées plus haut on trouve facilement par un calcul direct que les directrices de Wilczynski de la dualisation π^* de la surface π sont les droites

(68) $$k_1^* = \left\{E^3, \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} - \tfrac{1}{2}b\right)E^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2}{\gamma} - \tfrac{1}{2}a\right)E^1 + E^0\right\},$$

$$k_2^* = \left\{E^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2}{\gamma} + \tfrac{1}{2}a\right)E^3, \quad E' + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} + \tfrac{1}{2}b\right)E^3\right\},$$

donc qu'elles coïncident avec les droites (67):

$$k_1 \equiv k_2^*, \quad k_2 \equiv k_1^*.$$

9. Supposons maintenant que le point A_3 soit situé à l'intersection de la directrice de Wilczynski k_1 (67_1) avec la quadrique principale de Lie (44) dont l'équation est

(69) $$x^1x^2 - x^0x^3 + \tfrac{1}{4}ax^1x^3 + \tfrac{1}{4}bx^2x^3 = \tfrac{1}{4}(a_3^1 + b_3^2 - a_2^0 - b_1^0)(x^3)^2.$$

On a alors

(70) $$a_u = 2(a_3^2 - a_1^0) + a(a_3^3 - a_2^2) - \tfrac{1}{2}a^2 + b\beta,$$
$$b_v = 2(b_3^1 - b_2^0) + b(b_3^3 - b_1^1) - \tfrac{1}{2}b^2 + a\gamma,$$
$$a_3^1 - a_2^0 + b_3^2 - b_1^0 = 0.$$

Les points géométriques A_0, A_1, A_2, A_3 étant complètement déterminés par les conditions précitées, il est encore possible de changer les paramètres asymptotiques (5) ou (6) ainsi que les bases locales

(71) $$A_0 = \alpha_0^0\bar{A}_0, \quad A_1 = r^{-1}\alpha_0^0\bar{A}_1, \quad A_2 = s^{-1}\alpha_0^0\bar{A}_2, \quad A_3 = r^{-1}s^{-1}\alpha_0^0\bar{A}_3;$$
$$(\alpha_0^0)^4 = r^2s^2.$$

En écrivant

(72) $$\alpha_0^0 = \alpha, \quad \frac{\alpha_u}{\alpha} = \alpha_U, \quad \frac{\alpha_v}{\alpha} = \alpha_V,$$

on obtien les équations de transformation pour les fonctions a_j^i, b_j^i correspondant aux substitutions (5) + (71):

(73) $$\bar{a}_0^0 = r(a_0^0 - \alpha_U), \quad \bar{b}_0^0 = s(b_0^0 - \alpha_V);$$
$$\bar{a}_1^0 = r^2a_1^0, \quad \bar{b}_1^0 = rsb_1^0;$$
$$\bar{a}_1^1 = ra_1^1 + r^{-1}r' - \alpha_Ur, \quad \bar{b}_1^1 = s(b_1^1 - \alpha_V);$$
$$\bar{a}_2^0 = rsa_2^0, \quad \bar{b}_2^0 = s^2b_2^0;$$
$$\bar{a}_2^2 = r(a_2^2 - \alpha_V), \quad \bar{b}_2^2 = sb_2^2 + s^{-1}s' - \alpha_Vs;$$
$$\bar{\beta} = r^2s^{-1}\beta, \quad \bar{\gamma} = r^{-1}s^2\gamma,$$
$$\bar{a}_3^0 = r^2sa_3^0, \quad \bar{b}_3^0 = rs^2b_3^0;$$
$$\bar{a}_3^1 = rsa_3^1, \quad \bar{b}_3^1 = s^2b_3^1;$$
$$\bar{a}_3^2 = r^2a_3^2, \quad \bar{b}_3^2 = rsb_3^2;$$
$$\bar{a}_3^3 = ra_3^3 + r^{-1}r' - \alpha_Ur, \quad \bar{b}_3^3 = sb_3^3 + s^{-1}s' - \alpha_Vs.$$

A partir de ces relations il est déjà possible de trouver de façon machinale le système complet d'invariants différentiels projectifs de la surface envisagée; il faut, bien entendu, tenir toujours compte des relations (70).

Bibliographie

[1] *A. Švec:* L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle., Чех. мат. журнал, *10 (85)*, 1960, 523—550.

[2] *A. Švec:* Les quadriques de Lie d'une surface plongée dans un espace tridimensionnel à connexion projective, Чех. мат. журнал, 11 (86), 1961, 134—142.

Резюме

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ, ПОГРУЖЕННОЙ В ТРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО С ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Пусть в пространстве с проективной связностью задана поверхность π уравнениями (12). Изучаются ее соприкасающиеся квадрики (24) и доказывается, что при $h \neq 0$ на π существуют кривые с прозвольной наперед заданной касательной, имеющие касание третьего порядка с любой квадрикой (24). Обычным способом определяются две связки квадрик (39), (41), которые образуют сеть квадрик Дарбу (42), содержащих связку квадрик Ли (43) и главную квадрику Ли (44). Квадрики Дарбу дуализации имеют вид (52). Наконец, при $h = 0$ построены обобщения директрис Вильчинского (67) и, с их помощью, канонический репер поверхности, определенный вплоть до нормализации вершин; для него имеет место соотношение (70), и при допустимых изменениях базисов (71) + (72) получаем (73).

Работа примыкает к работе автора [2], в которой рассматривается другое обобщение квадрики Ли поверхности, погруженной в пространство с проективной связностью.