Miroslav Fiedler; František Nožička

Об одном критериив теории транспортной проблемы

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 2, 204–212

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100454

Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961, Прага

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ В ТЕОРИИ ТРАНСПОРТНОЙ ПРОБЛЕМЫ

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler) и ФРАНТИШЕК НОЖИЧКА (František Nožička), Прага

(Поступило в редакцию 7/I 1960 г.)

Работа примыкает к теории и результатам предыдущей работы авторов [1]. Здесь выводится удобное для практики условие для того, чтобы какое-либо решение данной транспортной проблемы было простым решением. Значение такого условия для практического решения обосновывается в тексте. Соответствующий критерий и его использование иллюстрируются на примере.

Пусть $E_1, \ldots, E_m$ $(m \geqq 1)$ — производственные центры какого-либо продукта и $a_i \geqq 0$ — количество в единицах продукта, выработанного в центре E_i (за определенное время). Этот продукт разводится (за то же время) по центрам потребления $V_1, \ldots, V_n$ $(n \geqq 1)$ с планированным потреблением b_j в центре V_j. Предполагается, что $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (экономическое равновесие). Далее дана система неотрицательных чисел k_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, представляющих собой транспортные расходы по перевозке единицы продукта из E_i в V_j. С экономической точки зрения мы далее предполагаем, что развозимый продукт можно при перевозке делить на любые части и что емкость путей сообщения неограничена. Математическая задача — найти абсолютный минимум линейной формы

$$L(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

на множестве всех числовых последовательностей

$$x \equiv (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{mn}) \tag{2}$$

со свойствами

$$x_{ij} \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

— является математической формулировкой соответствующей транспортной проблемы. Каждую систему чисел x_{ij} со свойствами (3) мы называем допустимым решением (или просто решением данной транспортной задачи). Каждому допустимому решению (2) можно сопоставить некоторую оценку[1]) X четного графа G, вершинами которого являются центры

[1]) См. [1], стр. 96.

$E_1, E_2, \ldots, E_m, V_1, V_2, \ldots, V_n$, а ребра которого $h_{ij} \equiv E_i V_j$ представляют пути сообщения; ребру h_{ij} сопоставлено как раз число x_{ij}. Подграф графа G, у которого при оценке X все ребра имеют ненулевые оценки, мы называем ядром $N(X)$ оценки X графа G. Если для данного решения x соответствующее ядро $N(X)$ не содержит ни одной окружности, то это решение мы называем простым решением.

В работе [1], к результатам и символике которой мы отсылаем читателя, описывается алгорифм для решения конкретных транспортных проблем, исходящий из т. наз. „первого приближения" искомого оптимального решения данной транспортной проблемы, которое соответствует определенным образом выбранному простому решению. На практике, однако, случается — и очень часто —, что выбранное таким образом простое решение (т. е. первое приближение) не является в качестве исходного шага соответсвующего алгорифма вполне приемлемым в тех случаях, когда до сего времени развоз определенного продукта планировался на основании богатого долговременного опыта. Планированный таким образом (не математическим путем) развоз дает в некоторых случаях лучшие результаты, чем упомянутое выше „первое приближение", но не является, вообще говоря, оптимальным решением. Полученное на основании опыта решение не будет, как правило, даже простым решением. Поэтому в таком случае представляется целесообразным отыскать какое-либо простое решение приводящее к меньшему значению данной линейной формы, чем значение этой формы, соответствующее решению, полученному на основании опыта. Отыскавши такое простое решение, мы принимаем его за „первое приближение" и производим далее обычные шаги алгорифма. Нужно, однако, иметь в распоряжении удобный критерий, на основании которого можно было бы легко установить, является ли какое-либо решение данной транспортной проблемы простым или нет. Вывод такого удобного критерия и является целью настоящей работы.

Пусть $x \equiv (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{mn})$ — какое-либо фиксированное допустимое решение данной транспортной проблемы. Числа x_{ij} расположим в виде матрицы

$$M_0(x) \equiv \begin{bmatrix} x_{11}, \ldots, x_{1j}, \ldots, x_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{i1}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}, \ldots, x_{mj}, \ldots, x_{mn} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Элементам матрицы (4), которые таким образом представляют собой определенное решение данной транспортной проблемы, поставим в соответствие оценку X графа G, вершины которого — центры $E_1, \ldots, E_m, V_1, \ldots, V_n$, а ребрам h_{ij} сопоставлены числа x_{ij}. Пусть $N_0(X)$ — ядро этой оценки.[2]) Таким образом матрице $M_0(x)$ поставлен во взаимно-однозначное соответствие граф с оценкой $N_0(X)$. Пусть теперь

$$M_l(x) \equiv \begin{bmatrix} x_{i_1 j_1}, x_{i_1 j_2}, \ldots, x_{i_1 j_s} \\ x_{i_2 j_1}, x_{i_2 j_2}, \ldots, x_{i_2 j_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{i_r j_1}, x_{i_r j_2}, \ldots, x_{i_r j_s} \end{bmatrix} \tag{5}$$

[2]) См. [1], стр. 96, D 16.

есть некоторая подматрица матрицы (4), полученная из матрицы $M_0(x)$ путем вычеркивания $m - r$ строк и $n - s$ столбцов (где $0 \leqq l = m + n - (r + s)$, $r + s > 0$). Обозначим через G_l подграф графа G, определенный следующим образом: Вершины E_i, V_j и ребро h_{ij} ($1 \leqq i \leqq m$; $1 \leqq j \leqq n$) графа G будут соответственно вершинами и ребром графа G_l, если и только если $i = i_p$ и $j = j_q$ для некоторых p, q.[3]) Каждому ребру $h_{i_p j_q}$ $x_{i_p j_q}$ ($1 \leqq p \leqq r$; $1 \leqq q \leqq s$) графа G_l мы тогда сопоставим оценку. Пусть $N_l(X)$ обозначает граф, являющийся ядром этой оценки. Очевидно, граф $N_l(X)$ будет подграфом графа $N_0(X)$, полученным из графа $N_0(X)$ в результате вычеркивания тех вершин E_i, V_j и исходящих из них ребер в $N_0(X)$, для которых i-я стройка и j-й столбец были при переходе от матрицы $M_0(x)$ к матрице $M_l(x)$ вычеркнуты. Итак, матрице $M_l(x)$ можно взаимно-однозначно поставить в соответствие граф $N_l(X)$.

Вспомогательная **теорема 1.** *Вершина E_{i_0} (соотв. V_{j_0}) графа $N_l(X)$ является его изолированной вершиной или концевой вершиной тогда и только тогда, если i_0-я строка (j_0-й столбец) матрицы $M_l(x)$ содержит не более одного ненулевого элемента.*

Доказательство. Если E_{i_0} – изолированная вершина графа $N_l(X)$, то всем ребрам в графе G_l, исходящим из вершины E_{i_0} – т. е. ребрам $h_{i_0 j}$ ($j = j_1, j_2, \ldots, \ldots, j_s$) – присвоено значение нуль; итак, обязательно будет $x_{i_0 j} = 0$ для $j = j_1, j_2, \ldots, j_s$; другими словами, все элементы строки i_0 в матрице (5) будут нули. Если все элементы строки i_0 в матрице (5) – нулевые, то всем ребрам $h_{i_0 j}$ ($j = j_1, \ldots, j_s$) в графе G_l присвоены нули и, следовательно, вершина E_{i_0} есть изолированная вершина графа $N_l(X)$. Если E_{i_0} – концевая вершина графа $N_l(X)$ с единственным исходящим из нее ребром $h_{i_0 j_q}$ ($1 \leqq q \leqq s$), то ребрам $h_{i_0 j_k}$ ($1 \leqq k \leqq s$; $k \neq q$) присвоено в G_l значение нуль. Итак, обязательно будет $x_{i_0 j_k} = 0$ для $k = 1, \ldots, s$, $k \neq p$, $x_{i_0 j_q} > 0$. В i_0-й строке матрицы (5) все элементы $x_{i_0 j_k}$ кроме элемнта $x_{i_0 j_q}$ равны нулю. Если все элементы i_0-й строки матрицы (5) кроме одного равны нулю, то – как нетрудно видеть – вершина E_{i_0} будет концевой вершиной с соответствующим единственным исходящим из него ребром графа $N_l(X)$. Аналогично дело обстоит и в случае изолированной или концевой вершины V_{j_0} графа $N_l(X)$. Этим и завершается доказательство теоремы.

Пусть теперь дан какой-либо неориентированный граф G. Дадим такое определение алгорифма A:

Если в $G = G_0$ имеется хоть одна изолированная вершина или концевая вершина, устраним какую-либо из этих изолированных вершин или концевую вершину с соответствующим консевым ребром. Таким образом из G_0 получится граф G_1. У графа G_1 поступаем аналогично. Алгорифм будет закончен, когда

[3]) Говоря наглядно: в графе G мы устраним те вершины E_i, соотв. V_j, и ребра исходящие из них, для которых соответствующие им i-я строка, соотв. j-й столбец, были в матрице M_0 при переходе к матрице M вычеркнуты.

какой-то граф G_r уже не будет содержать ни изолированной, ни концевой вершины.

Вспомогательная **теорема 2.** *Граф G не содержит окружностей тогда и только тогда, если алгорифм A заканчивается пустым графом. Более подробно: если граф G не содержит окружности, то алгорифм A заканчивается всегда пустым графом независимо от способа применения алгорифма. Если же G содержит окружность, алгорифм A заканчивается всегда непустым графом независимо от способа применения алгорифма.*

Для доказательства воспользуемся индукцией по числу s вершин в графе G. Если $s = 1$, то теорема справедлива. Итак, пусть число вершин графа G есть $s > 1$, и допустим, что теорема справедлива для всех графов с числом вершин не более $s - 1$.

Прежде всего, если граф G не содержит окружностей, то каждая его составляющая есть дерево и поэтому содержит или изолированную или концевую вершину. Устранив любую изолированную вершину или концевую вершину с соответственным ребром, мы получим граф G_1, каждая составляющая которого будет опять деревом. Итак, G_1 не содержит окружностей и имеет $s - 1$ вершин. По предположению индукции независимо от способа применения к G_1, алгорифм приводит к пустому графу. Следовательно, и каждый алгорифм A, примененный к G, приводит к пустому графу.

Пусть, наоборот, G содержит окружность K. Если G не содержит ни изолированной, ни концевой вершины, то алгорифм A заканчивается графом G, и теорема справедлива. Если же G содержит изолированную или концевую вершину, устраним любую изолированную вершину или концевую вершину с соответствующим концевым ребром. Полученный граф G_1 имеет $s - 1$ вершин и содержит окружность K .По предположению индукции каждый примененный к G_1 алгорифм приводит к непустому графу. Итак, каждый примененный к G алгорифм, также приводит к непустому графу, что мы и хотели доказать.

Дадим теперь для матрицы $M_0(x)$ в (4), элементы которой представляют в своей совокупности некоторое допустимое решение данной транспортной проблемы, следующее определение алгорифма B:

Если матрица $M_0(x)$ содержит хоть одну строку или один столбец с не больше чем одним ненулевым элементом, то устраним одну из таких строк или один из столбцов. В результате получится субматрица $M_1(x)$ матрицы $M_0(x)$. У матрицы $M_r(x)$ поступаем аналогично. Алгорифм B закончится тогда, когда некоторая субматрица $M_r(x)$ матрицы $M_0(x)$ не будет содержать ни строки, ни столбца с не больше чем одним ненулевым элементом.[4])

---

[4]) При этом не исключается и та возможность, что описанный процесс заканчивается вычеркиванием всех элементов матрицы $M_0(x)$, т. е. когда алгорифм B приводит к „пустой матрице".

Теперь мы сформулируем теорему, утверждение которой является ядром настоящей статьи.

Теорема. *Решение* $x \equiv (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{mn})$ *данной транспортной проблемы является ее простым решением, если и только если алгорифм B в применении к матрице $M_0(x)$ заканчивается пустой матрицей. Результат применения алгорифма не зависит от того, каким способом мы применяем алгорифм B к матрице $M_0(x)$.*

Доказательство. Сопоставим матрице $M_0(x)$ граф $N_0(X)$. Рассмотрим параллельно алгорифм A в применении к графу $N_0(X)$ и алгорифм B в применении к матрице $M_0(x)$. По вспомогательной теореме 1 каждому шагу алгорифма A в применении к графу $N_0(X)$ можно сопоставить взаимно однозначно шаг алгорифма B в применении к матрице $M_0(x)$. Итак, в этом смысле алгорифмы A и B эквивалентны. Отсюда и из вспомогательной теоремы 2 уже непосредственно следует справедливость утверждения нашей теоремы.

Пример 1. Таблицей

	V_1	V_2	V_3	V_4	
E_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	10
E_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	10
E_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	10
	16	3	7	4	

вместе с данной матрицей неотрицательных чисел (тариф) k_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$) задана конкретная транспортная проблема. Каждая из матриц

$$\text{а)}\quad \begin{bmatrix} 7, & 0, & 0, & 3 \\ 0, & 3, & 7, & 0 \\ 9, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{б)}\quad \begin{bmatrix} 3, & 3, & 0, & 4 \\ 3, & 0, & 7, & 0 \\ 10, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

представляет собой допустимое решение данной транспортной проблемы. Применяя к матрице а) алгорифм B, мы видим, что этот алгорифм заканчивается матрицей

$$\begin{bmatrix} 7, & 3 \\ 9, & 1 \end{bmatrix}$$

(мы устраняем последовательно, напр., второй, третий столбцы, вторую строку) и, следовательно, элементы этой матрицы не составляют — по приведенной выше теореме — простого решения. Напротив, решение б), с тем же количеством нулевых членов, как и решение а), является простым решением данной транспортной проблемы, как нетрудно убедиться на основании приведенной выше теоремы.

Пример 2. Для транспортной проблемы, заданной при помощи таблицы

(6)

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	
E_1	0	40	0	90	0	0	550	0	0	0	0	0	680
E_2	800	0	0	0	100	0	0	0	0	0	50	0	950
E_3	0	0	0	120	160	400	0	60	200	0	0	0	940
E_4	0	0	350	0	0	0	0	0	0	65	0	0	415
E_5	0	710	0	0	0	0	0	0	40	0	100	0	850
E_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	120	120
	800	750	350	210	260	400	550	60	240	65	150	120	

в которой записано определенное допустимое решение (при данной тарифной матрице k_{ij} ($i = 1, \ldots, 6$; $j = 1, \ldots, 12$), нужно

1. установить, является ли указанное в таблице решение простым решением;
2. если оно не является простым решением, то найти такое простое решение, которое дает меньшее значение данной линейной форме

$$\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{12} k_{ij} x_{ij} .$$

Применение в этом конкретном случае алгорифма (устранение из соответствующей матрицы последовательно, напр., первого, третьего, шестого, седьмого, восьмого, десятого, двенадцатого столбцов, четвертой и шестой строки) приводит в результате к матрице

$$M_9 \equiv \begin{bmatrix} 40, & 90, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 100, & 0, & 50 \\ 0, & 120, & 160, & 200, & 0 \\ 710, & 0, & 0, & 40, & 100 \end{bmatrix},$$

у которой в каждой строке и в каждом столбце имеются по крайней мере два положительных элемента. Итак, данное решение не является простым решением.

Матрица M_9 получалась из исходной матрицы путем устранения столбцов 1, 3, 6, 7, 8, 10, 12 и строк 4, 6 (в указанном порядке), соответствующих центрам потребления V_1, V_3, V_6, V_7, V_8, V_{10}, V_{12} и производственным центрам E_4, E_6. Определим теперь „суженную“ транспортную проблему при помощи схемы

	V_2	V_4	V_5	V_9	V_{11}	
E_1						130
E_2						150
E_3						480
E_5						850
	750	210	260	240	150	

	V_2	V_4	V_5	V_9	V_{11}
E_1	k_{12}	k_{14}	k_{15}	k_{19}	$k_{1,11}$
E_2	k_{22}	k_{24}	k_{25}	k_{29}	$k_{2,11}$
E_3	k_{32}	k_{34}	k_{35}	k_{39}	$k_{3,11}$
E_5	k_{52}	k_{54}	k_{55}	k_{59}	$k_{5,11}$

,

одно из допустимых решений которой выражается элементами указанной выше матрицы M_9. Эту „суженную“ транспортную проблему мы решим при помощи алгорифма, указанного в работе [1].

Пусть это решение имеет вид $\underset{0}{x}_{ij}$ ($i = 1, 2, 3, 5$; $j = 2, 4, 5, 9, 11$). Это — простое решение рассматриваемой „суженной“ проблемы и поэтому алгорифм B в применении к матрице

$$\begin{bmatrix} \underset{0}{x}_{12}, & \underset{0}{x}_{14}, & \underset{0}{x}_{15}, & \underset{0}{x}_{19}, & \underset{0}{x}_{1,11} \\ \underset{0}{x}_{22}, & \underset{0}{x}_{24}, & \underset{0}{x}_{25}, & \underset{0}{x}_{29}, & \underset{0}{x}_{2,11} \\ \underset{0}{x}_{32}, & \underset{0}{x}_{34}, & \underset{0}{x}_{35}, & \underset{0}{x}_{39}, & \underset{0}{x}_{3,11} \\ \underset{0}{x}_{52}, & \underset{0}{x}_{54}, & \underset{0}{x}_{55}, & \underset{0}{x}_{59}, & \underset{0}{x}_{5,11} \end{bmatrix}$$

приводит к пустой матрице. Если теперь в схеме (6) заменить числа x_{ij} для $i = 1, 2, 3, 5$; $j = 2, 4, 5, 9, 11$ числами $\underset{0}{x}_{ij}$, а остальные числа оставить в (6) без изменения, то получится новое допустимое решение исходной транспортной проблемы, для которого алгорифм B заканчивается пустой матрицей и, следовательно, это решение будет простым решением. Это простое решение дает низшее (или то же) значение данной линейной формы $\sum\limits_{i=1}^{6} \sum\limits_{j=1}^{12} k_{ij} x_{ij}$ чем исходное решение, и его можно взять в качестве „первого приближения“ для алгорифма, см. [1], при помощи которого обычным способом найдем оптимальное решение данной транспортной проблемы.

В заключение упомянем ио возможности использовать при решении „суженной“ транспортной проблемы то обстоятельство, что в соответствующей матрице часто фигурирует довольно большое число нулей. Здесь мы всегда исходим из матрицы, которой заканчивается алгорифм B, т. е. из матрицы, имеющей во всех строках и столбцах по крайней мере по два ненулевых элемента. Ход решения, который мы обозначим через C, состоит в том, что из этой матрицы строится новая матрица, решающая ту же транспортную проблему, но имеющая меньшее количество ненулевых элементов. План действий таков:

Возьмем любой ненулевой элемент $x_{i_0 j_0}$, в той же строке — дальнейший ненулевой элемент $x_{i_0 j_1}$ (так как в этой строке было хотя бы два ненулевых элемента, то этот элемент существует), в том же столбце, как и элемент $x_{i_0 j_1}$, возьмем дальнейший ненулевой элемент $x_{i_1 j_1}$, затем $x_{i_1 j_2}$, $x_{i_2 j_2}$ и т. д., пока мы впервые не получим два одинаковых индекса i_k или j_k (или пока мы в первый раз не попадем в строку или столбец, в которых мы уже были перед этим). Таким образом получается замкнутый цикл элементов

$$x_{i_r j_r},\ x_{i_r j_{r+1}},\ x_{i_{r+1} j_{r+1}},\ \ldots,\ x_{i_{s-1} j_{s-1}},\ x_{i_{s-1} j_s},\ x_{i_s j_s},\ x_{i_s j_r}$$

(который может начинаться и с $x_{i_r j_{r+1}}$, а закончиться $x_{i_r j_r}$), в котором индексы $i_r, i_{r+1}, \ldots, i_s$ все отличны друг от друга, так же как и $j_r, j_{r+1}, \ldots, j_s$. Теперь мы действуем так же, как и в алгорифме из [1]: Образуем выражение

$$\delta = k_{i_r j_r} - k_{i_r j_{r+1}} + k_{i_{r+1} j_{r+1}} - \ldots + k_{i_{s-1} j_{s-1}} - k_{i_{s-1} j_s} + k_{i_s j_s} - k_{i_s j_r}.$$

Если $\delta \geqq 0$, то мы вычтем из всех элементов нечетного порядка $x_{i_l j_l}$ $(l = r, \ldots, s)$ наименьшее из этих чисел и то же число прибавим ко всем элементам четного порядка. Этим самым хотя бы одно из положительных чисел $x_{i_l j_l}$ станет равным нулю.

Теперь опять посмотрим, не содержит ли какая-либо строка или столбец лишь одно ненулевое число. Если нет, то продолжаем действовать по правилу C. Если же какой-либо столбец или строка содержит лишь один ненулевой элемент, то применяем далее алгорифм B. В случае, если правило B не приводит к пустой матрице, мы пользуемся снова правилом C. Ясно, что после конечного числа шагов мы получим пустую матрицу. Числа, которые стояли на разных местах при вычеркивании, образуют простое решение нашей исходной транспортной проблемы, так как применив к соответственной матрице алгорифм B, мы получим пустую матрицу. Но это простое решение будет лучше (или хотя бы не хуже), чем исходное решение, так как числа x_{ij} изменялись только при шагах хода решения C, давая каждый раз лучшее решение или решение одинакового качества.

Проиллюстрируем еще весь ход решения на примере 2: К матрице M_9 применим C: исходя из $x_{12} = 40$, мы продолжаем $x_{14} = 90$, далее $x_{34} = 120$, затем напр. $x_{35} = 160$, $x_{25} = 100$, $x_{2,11} = 50$, $x_{5,11} = 100$, $x_{59} = 40$, $x_{39} = 200$; здесь мы в первый раз попали в строку или в стоблец, в которых мы уже были. Цикл образуется элементами $x_{35}, x_{25}, x_{2,11}, x_{5,11}, x_{59}$ и x_{39}, Для определенности предположим, что число $\delta = k_{35} - k_{25} + k_{2,11} - k_{5,11} + k_{59} - k_{39} < 0$. Вычитая и, соответственно, прибавляя число $\min(x_{25}, x_{5,11}, x_{39}) = 100$, мы получим новые числа x'_{ij}, образующие матрицу

$$\begin{bmatrix} 40, & 90, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 150 \\ 0, & 120, & 260, & 100, & 0 \\ 710, & 0, & 0, & 140, & 0 \end{bmatrix}.$$

По правилу B зачеркнем вторую строку, третий и пятый столбцы и получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 40, & 90, & 0 \\ 0, & 120, & 100 \\ 710, & 0, & 140 \end{bmatrix},$$

которой и заканчивается ход B. По правилу C мы получим цикл $x'_{12} = 40$, $x'_{14} = 90$, $x'_{34} = 120$, $x'_{39} = 100$, $x'_{59} = 140$, $x'_{52} = 710$; если теперь, напр.,

$\delta = k_{12} - k_{14} + k_{34} - k_{39} + k_{59} - k_{52} \geqq 0$, то вычитая и прибавляя число $\min(x_{12}, x_{34}, x_{59}) = 40$, мы получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 0, & 130, & 0 \\ 0, & 80, & 140 \\ 750, & 0, & 100 \end{bmatrix}.$$

Алгорифм $\boldsymbol{B}$ переводит эту матрицу в пустую матрицу.

Итак, в общем

$$\begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 130, & 0, & 0, & 550, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 800, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 150, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 80, & 260, & 400, & 0, & 60, & 140, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 350, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 65, & 0, & 0 \\ 0, & 750, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 100, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 120 \end{bmatrix}$$

представляет простое решение нашей транспортной задачи, лучшее, чем исходное непростое решение.

Литература

[1] *J. Bílý, M. Fiedler, F. Nožička:* Die Graphentheorie in Anwendung auf das Transportproblem, Чехословацкий математический журнал, т. 8 (*83*), 1958, 94—121.

Zusammenfassung

ÜBER EIN KRITERIUM IN DER THEORIE DES TRANSPORTPROBLEMS

MIROSLAV FIEDLER und FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha

Die Arbeit knüpft sich der Theorie und Ergebnissen einer früheren Arbeit [1] an. Es wird hier eine für die Praxis passende Bedingung aufgefunden, die zu einer Entscheidung führt, ob eine Lösung des gegebenen Transportproblems eine einfache Lösung ist. Dabei wird ein Verfahren angegeben, das die Kenntnis einer (z. B. in der Praxis bewährten) Lösung auszunützen erlaubt. Ein numerisches Beispiel wird hinzugefügt.